Cálculo de campo eléctrico para distribuciones de carga. Notas

E.F. Lavia

Resumen. Ejercicio sobre determinación del campo eléctrico para una distribución de carga continua, un hilo finito uniformemente cargado, con comentarios varios.

1. El campo eléctrico

1.1. Cálculo de campo eléctrico por integración

A esta altura sabemos que el campo eléctrico puede calcularse a través de la integral

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \int\int\int \frac{k\rho(x',y',z')(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}')dx'dy'dz'}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|^3}, \tag{1}$$

que no es otra cosa que sumar aportaciones de campos que hacen cargas infinitesimales $\rho\, dV$ ubicadas en $\boldsymbol{X}'$ respecto al punto $\boldsymbol{X}$. Notemos también que esta integral son tres integrales (el campo es un vector) de modo que en realidad significa

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \int\int\int \frac{k\,\rho(x',y',z')(x-x')\,\hat{x}\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$+\int\int\int \frac{k\,\rho(x',y',z')(y-y')\,\hat{y}\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$+\int\int\int \frac{k\,\rho(x',y',z')(z-z')\,\hat{x}\,dx'dy'dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}},$$

donde hemos escrito explícitamente la dependencia en las coordenadas (cartesianas). Recordemos también que las coordenadas sobre las cuales se integra son las primadas de modo que el vector $\boldsymbol{E}$, que es el campo ya integrado, sólo depende a lo sumo de x, y, z.

1.2. Ejemplo: hilo cargado

Consideremos un hilo muy fino recto, de longitud L, cargado uniformemente con una carga total Q. Calculemos el campo a una distancia R del centro del hilo. Ver figura 1.

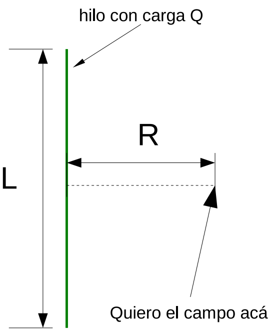

FIGURA 1. *Esquema del problema que queremos resolver.*

Simetrías. Un hilo cargado uniformemente tendrá simetría de rotación en $\hat{\phi}$, es decir que si giramos el hilo en torno al eje definido por él mismo en algún ángulo no deberíamos percibir diferencias en el campo que ejerce. Dada esta simetría de rotación es razonable utilizar coordenadas cilíndricas (ver figura 2) (con R morando en el plano xy). Lo ubicamos como muestra la figura orientado a lo largo de $\hat{z}$, con su centro en el origen de coordenadas y con R en el eje $\hat{y}$. Ahora resulta patente que existe una simetría de reflexión respecto del plano xy; es decir que lo que está por debajo del plano xy es igual a lo que está por encima.

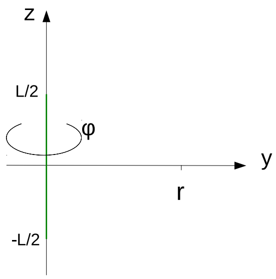

FIGURA 2. *Sistema coordenado para el problema; cilíndricas en xy.*

La simetría de rotación que mencionamos nos lleva a deducir en primer lugar que $\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{E}(\phi)$. En segundo lugar notamos que para un punto a distancia R en el plano definido por el centro del hilo (observar figura), existen tantos aportes de la zona $z > 0$ como de la zona $z < 0$; pensándolo un poco razonamos que el campo en el punto R no puede tener componente en z, porque los aportes se compensan; es decir debe ser un campo en $\hat{r}$. Notemos también que no puede tener componente en $\hat{\phi}$ porque los aportes de cada elemento de hilo se hallan contenidos en el plano zy (la fuerza eléctrica es central y trabaja en la dirección de la recta que une carga con punto campo). Finalmente R no es otra cosa que la coordenada r de cilíndricas, así que evaluar en un R genérico es evaluar en r de cilíndricas.

Juntando toda esta información deducimos que

$$\boldsymbol{E} = E(r,z)\hat{r}$$

Planteando la integral. Queremos plantear la integral (1) para esta configuración. Notemos que si el hilo está cargado uniformemente con carga Q y la longitud es L tendremos

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow Q = \lambda L \quad \Rightarrow dQ = \lambda dL,$$

es decir que un *cachito* de carga ubidado en un diferencial de hilo dL tendrá una carga λdL, pero según la figura $dL = dz$. Bien.

Queremos calcular el campo en un punto a distancia $R \equiv r$, es decir en $\boldsymbol{X} = (r, z = 0) = r\,\hat{r}$, considerando que un punto cualquiera del hilo (la distribución de carga) se halla genéricamente en coordenadas $\boldsymbol{X}' = (0, z') = z'\,\hat{z}$. Con esto último estamos queriendo expresar una coordenada cualquiera del hilo (¡No olvidemos que hay que integrar!). Entonces:

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}' = (r, 0) - (0, z') = (r, -z') = r\,\hat{r} - z'\,\hat{z}$$

la distancia entre el punto campo y el punto fuente siempre será en $\hat{r}$ y $\hat{z}$: vemos que no tiene componente en $\hat{\phi}$. Luego el módulo al cubo de esa distancia será:

$$|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'|^3 = |(r, -z')|^3 = (r^2 + z'^2)^{3/2}.$$

Estamos en condiciones de plantear la integral del campo en r

$$\boldsymbol{E}(r, z = 0) = k \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda\, dz'(r, -z')}{(r^2 + z'^2)^{(3/2)}} \tag{2}$$

la cual son dos integrales

$$\boldsymbol{E}(r, z = 0) = k \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda\, r\, \hat{r}\, dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} - k \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda\, z'\, \hat{z}\, dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{3}$$

Hemos planteado la solución. Tomemos un poco de aire y contemplemos (3) a ver si simplificamos algo; estamos integrando en coordenadas primadas, en las de la distribución (que es una recta en $\hat{z}$) de manera que tenemos un único diferencial dz' y asimismo evaluamos en un punto $r\,\hat{r}$. Podemos sacar fuera de la primer integral a λ y a r (repito que integramos en z') de forma que

$$\boldsymbol{E}(r, z = 0) = k\lambda\, r \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\hat{r}\, dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} - k\lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{z'\, \hat{z}\, dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Haciendo la integral. Ahora evaluamos las integrales (4) y vemos que la segunda es nula (¡Pero ya lo sabíamos por simetría!: el campo en $z = 0$ no puede tener componente en $\hat{z}$). Nos queda la primer integral que puede consultarse en una tabla y entonces

$$\boldsymbol{E}(r, z=0) = k\lambda r \left[\frac{2L\sqrt{L^2+4r^2}}{r^2(L^2+4r^2)} \right] \hat{r} \;=\frac{k\lambda 2L}{r\sqrt{L^2+4r^2}}\,\hat{r}\,,$$

que es el resultado que estabamos buscando y vamos a recuadrar,

$$\boxed{\boldsymbol{E}(r, z=0) = \frac{k\lambda 2L}{r\sqrt{L^2+4r^2}}\,\hat{r}\,.} \tag{5}$$

Algunas cosas más. Este ejemplo permite una evaluación sencilla del caso extremo de un hilo infinito, que implica considerar $L \to \infty$, para lo cual sacamos factor común L así

$$\frac{k\lambda 2L}{r\sqrt{L^2+4r^2}} = \frac{k\lambda 2}{r\sqrt{1+4(r/L)^2}}$$

Ahora si $L \to \infty$ resulta

$$\boldsymbol{E} = \frac{k\lambda 2}{r}\hat{r}.$$

Veamos si podemos hacer *por Gauss* este ejercicio (hilo infinito). Para aplicar la ley de Gauss consideramos una superficie Σ cilíndrica de algún radio R_0 y altura L_0 (ver figura 3) de forma que tenemos la siguiente relación válida:

$$\int_\Sigma \boldsymbol{E} \cdot\, \hat{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Operamos primero en el miembro derecho y resulta

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L_0}{\varepsilon_0},$$

ahora vamos al miembro izquierdo y hacemos la integral de superficie utilizando lo que sabemos del campo por simetría: será radial y perpendicular a las tapas del cilindro Σ. Dado que $\boldsymbol{E} = E\,\hat{r}$ y la normal de la superficie lateral de Σ es $\hat{r}$ resulta

$$\int_{lateral} E\hat{r}\cdot\hat{r}R_0 d\phi dz = ER_0 2\pi L_0$$

Notemos que el elemento de área en cilíndricas es $rd\phi dz$. Igualando ambos miembros

$$ER_0 2\pi L_0 = \frac{\lambda L_0}{\varepsilon_0}$$

entonces

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi R_0 \varepsilon_0}\,\hat{r} = \frac{2k\lambda}{R_0}\,\hat{r}$$

es decir que hemos arribado a la misma expresión. Parece que nuestro cálculo es consistente.

Remarquemos una vez más que la ley de Gauss sólo puede usarse cuando existen las suficientes simetrías para hacer la integral. En el caso del hilo finito, existen las suficientes simetrías sólo en $z = 0$. En el caso del hilo infinito para

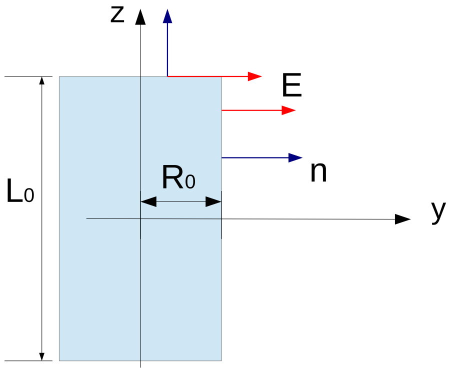

FIGURA 3. *Superficie ficticia para aplicar la ley de Gauss al problema del hilo infinito. Vemos la normal a la misma y la dirección del campo eléctrico. Sobrevive el aporte sobre la superficie lateral y se anula el de las tapas del cilindro.*

cualquier z da lo mismo (el hilo es infinito en z y si me desplazo a otro z_0 veo la misma imagen: infinito en ambas direcciones).

1.3. El potencial

Se ha visto que para un campo electrostático $\boldsymbol{E}$ dado por la integral (1) existe una función potencial escalar $\phi(\boldsymbol{X})$ tal que

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi,$$

lo cual significa que el campo es (menos) el gradiente del potencial. Una única carga q situada en el origen de coordenadas ejerce un campo dado, en esféricas, por

$$\boldsymbol{E} = \frac{kq}{r^2}\,\hat{r} \tag{6}$$

cuyas líneas de campo eran *flechas* radiales alejándose del origen si $q > 0$ o acercándose si $q < 0$. Por derivación directa vemos que si planteamos

$$\phi = \frac{kq}{r}, \tag{7}$$

resulta ser

$$-\nabla\phi = kq\left(-\nabla(1/r)\right) = kqr^{-2}\nabla r = \frac{kq}{r^2}\,\hat{r}.$$

Entonces (7) es el potencial del campo (6).

Es decir que para resolver un problema electrostático podríamos en lugar de evaluar una integral vectorial (tres integrales en general) evaluar solamente una integral escalar, la del potencial. Si el campo $\boldsymbol{E}$ está dado por (1) la integral correspondiente para el potencial será

$$\phi(x,y,z) = \int\int\int \frac{k\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}'|}. \tag{8}$$

Por supuesto luego de calcular ϕ hay que derivar para obtener $\boldsymbol{E}$.

Para nuestro hilo finito la integral a evaluar sería

$$\phi(r, z=0) = k\lambda\, R \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \tag{9}$$

Invito al lector a integrar y luego derivar para obtener el campo $\boldsymbol{E}$ correspondiente.

E.F. Lavia