Cuenta para el *Toddy Prize*

E.F.LAVIA

1 Febrero 2013

La idea del *Toddy Prize*[1] es ver dónde la expresión

$$F(\vec{x}) = \frac{x^t A A^t x}{x^t B x} \tag{1}$$

tiene un máximo. En (1) es $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, una matriz constante, y $A \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es también un vector constante. F es claramente un campo escalar porque se puede pensar como la contracción de cuatro tensores de rango uno en el numerador y la contracción de dos tensores de rango uno y uno de rango dos en el denominador.

Es decir, que puede escribirse en notación indicial,

$$F = \frac{x_k^t A_k A_p^t x_p}{x_j^t B_{jq} x_q}$$

donde vemos cuatro pares de índices contraídos. Procedemos a hacer, $\nabla F = 0$ en componentes, es decir:

$$(\nabla F)_m = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{x_k^t A_k A_p^t x_p}{x_j^t B_{jq} x_q}\right) = 0$$

lo cual se resume en:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_k^t A_k A_p^t x_p\right) x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p \frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_j^t B_{jq} x_q\right).$$

Esta cuenta puede ser hecha teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

y nos queda

$$\left(\delta_{km} A_k A_p^t x_p + x_k^t A_k A_p^t \delta_{pm}\right) x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p \left(\delta_{jm} B_{jq} x_q + x_j^t B_{jq} \delta_{qm}\right),$$

lo cual parece correcto al menos siquiera porque nos queda un índice libre de cada lado (todos los demás están contraídos en pares como corresponde). Hacemos *colapsar* las deltas y llegamos a

$$\left(A_m A_p^t x_p + x_k^t A_k A_m^t\right) x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p \left(B_{mq} x_q + x_j^t B_{jm}\right).$$

Pero como para un vector $\vec{v}$ se verifica que $v_i^t = v_i$ y sabiendo que B es simétrica se tendrá

$$\vec{x}^t B = \vec{v}$$

$$(\vec{x}^t B)^t = B\vec{x} = \vec{v}^{\,t},$$

en componentes vemos que vale

$$x_i^t B_{ij} = B_{ji} x_i^t$$

[1] Al menos como yo lo entendí según las palabras de Cinquini.

Relabeleando[2] subíndices mudos (contraídos)

$$(2A_m A_p^t x_p) x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p \left(2B_{mq} x_q\right),$$

y ya casi estamos porque ahora resulta que podemos identificar la siguiente igualdad vectorial

$$[A_m] A_p^t x_p x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p [B_{mq} x_q],$$

lo que significa que, separadamente, valen:

$$A_m = B_{mq} x_q \qquad \text{y} \qquad \mathrm{A_p^t x_p x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k A_p^t x_p}. \tag{2}$$

De la primer condición deducimos inmediatamente que el $\vec{x}$ buscado es

$$\boxed{\vec{x} = B^{-1}\vec{A}},$$

mientras que en la segunda podemos ver que puede escribirse

$$A_p^t x_p x_j^t B_{jq} x_q = A_p^t x_p x_k^t A_k,$$

lo cual implica que

$$\begin{gathered} x_j^t B_{jq} x_q = x_k^t A_k, \\ B_{jq} x_q = A_k, \\ x_m = B_{mj}^{-1} A_j. \end{gathered}$$

Este es, por supuesto, el mismo resultado al cual arribamos más arriba.

[2] A Rui le encantan este tipo de bastardizaciones del inglés.