Velocidad de satelización y velocidad de escape

E.F.LAVIA

21 Febrero 2013

Los comienzos, teóricos, de la satelización de objetos los puso tal vez Isaac Newton quien ya había elucubrado sobre la posibilidad de disparar una bala de cañon desde una montaña y dejarla en órbita estable en torno a la Tierra (ver Figura 1).

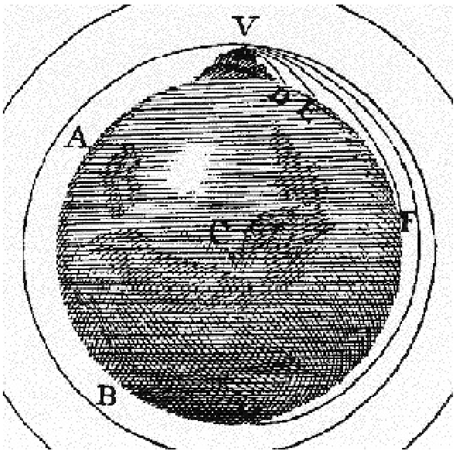

Figura 1: **Diferentes situaciones para el lanzamiento de una bala desde lo alto de una montaña. Según la velocidad inicial la bala cae en algún punto del globo más o menos cercano (D,E,F,G) o queda en órbita circular y regresa al mismo lugar de lanzamiento.**

Analizar este problema puede hacerse de manera inmediata y nocuentosa considerando coordenadas polares r, ϕ (cilíndricas 2D). Es un problema plano y nos alcanzan dos coordenadas. Por supuesto hacemos las hipótesis simplificadoras necesarias: Tierra circular[1] y movimiento sin rozamiento. La fuerza de gravedad es radial y apunta hacia el centro de la Tierra y la velocidad inicial $\vec{v_0}$ estará en $\hat{\phi}$.

La pregunta que Isaac se pudo haber hecho tal vez fue, ¿Con qué velocidad debo lanzar la bala para que no caiga a la Tierra pero para que tampoco se escape al espacio exterior? Seguramente dedujo que se necesitaba equilibrar la gravedad (tirón hacia la Tierra) con la *vis centrífuga* (a los grosos como Isaac les apetecía expresarse en latín). Tratemos de hacer la cuenta. Para polares la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$ en $\hat{r}$ es:

$$-GMm/r^2 = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2).$$

Si queremos un radio r constante tendremos

$$GM/r^2 = r\dot{\phi}^2$$

y usando que la velocidad tangencial es $v_t = r\dot{\phi}$,

$$GM/r = v_t^2$$

y esta será nuestra velocidad v_0 necesaria para que la bala quede en órbita estable,

$$v_0 = \sqrt{GM/r}.$$

[1]La montaña es desdeñable en su contribución a la alteración del campo gravitatorio.

Para una montaña de 554 km (Ok, ¡sé que no hay montañas de esa altura!) esa velocidad es de unos 7.6 km/seg. Esto es lo que se suele llamar *velocidad de satelización*. La idea es que un objeto así lanzado escapa de la Tierra y ya no vuelve (aunque tampoco se va muy lejos) si no hay perturbaciones o pérdidas de energía.

Alguien podría preguntar porqué se me ocurre poner una altura de 554 km, porqué no poner el cañon en los Himalaya y lanzar desde allí. Esta era una altura de satelización razonable para satélites en la década del 60 (al menos los Vanguard) y corresponde al uso de cohetes de varias etapas. Aparentemente es una cuestión de conveniencia tecnológica y de evitar zonas de atmósfera alta donde todavía hay un rozamiento importante.

Para un cohete de tres etapas (ver Figura 2) la velocidad de la tercer etapa es la velocidad de satelización. Como es muy difícil lograr justo esa velocidad en general se termina con órbitas levemente elípticas (velocidad algo mayor que v_0). Si la velocidad es menor a v_0 caerá a la Tierra relativamente en poco tiempo.

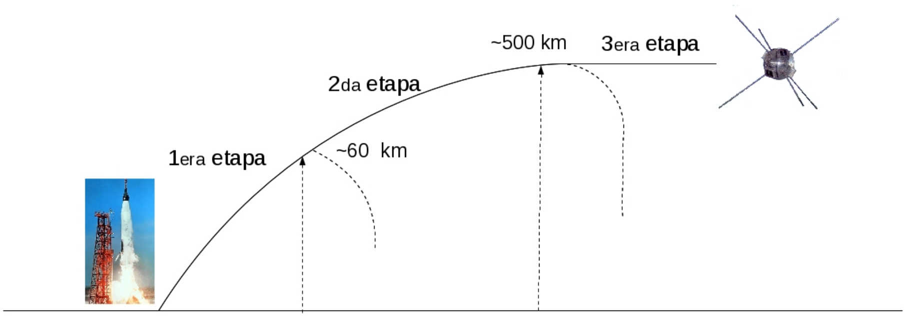

Figura 2: **Esquema rústico del proceso de satelización para un satélite Vanguard, cuyo vehículo satelizador (cohete) constaba de tres etapas. Tomado de** *Our Work in Space* **de Willy Ley.**

Podemos pensar qué sucedería si la velocidad, mayor que v_0, fuera cada vez más grande. Evidentemente tendríamos órbitas elípticas de excentricidad cada vez mayor. En el caso límite tendremos un objeto que ya no orbitará en torno a la Tierra (lo habremos despedido para siempre). Ese caso corresponde a la *velocidad de escape* y se plantea matemáticamente como la velocidad necesaria para que el cuerpo (nuestra bala o una nave al infinito) quede en $r \to \infty$ con velocidad final v_f cero. La situación física es que en cualquier punto de la trayectoria del cuerpo su energía $E = T + V$ es una constante,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

y entonces debe valer lo mismo en el suelo de la base de lanzamiento al momento de dispararse (distancia R del centro de la Tierra y velocidad inicial v_e), que en una distancia r_f, es decir

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GmM}{R} = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{GmM}{r_f}$$

y como pediremos v_f=0 y $r_f \to \infty$ [2] se deduce que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

lo cual da unos 11 km/seg y es la velocidad de escape de la Tierra. Para un objeto con mayor masa o menor radio esta velocidad puede ser mucho mayor como uno deduce rápidamente (no es lo mismo escapar de Júpiter que de la Tierra).

[2]Este caso de $E = 0$ es el caso límite de órbita cerrada, podemos pensarlo como una órbita elíptica de apogeo infinito que tarda infinito tiempo en cerrarse.