

Cuantización de campos escalares libres en espaciotiempos
curvos

Trabajo de la materia “Teoría de Campos”

Edmundo Lavia

9 de agosto de 2011

Índice

1. Introducción	2
1.1. Teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos	2
1.2. Breve sinopsis histórica	2
1.3. Objetivo del trabajo	3
1.4. Sumario	3
2. Preliminares	4
2.1. Formalismo de los números de ocupación y estado de vacío	4
3. Cuantización canónica en un espaciotiempo plano	6
3.1. Sobre la acción	7
3.2. Procedimiento de cuantización canónica	8
3.3. Cuantización de un campo escalar real libre	10
3.3.1. Expansión de los operadores de campo	11
3.3.2. Orden normal	14
3.3.3. El espacio de Fock	14
3.4. Enfoque de interacción semiclásico	15
3.5. Cuantización canónica. Conclusión	16
4. Cuantización en un espaciotiempo curvo	16
4.1. Espaciotiempo curvo	16
4.2. Cuantización canónica con inclusión de la gravedad	17
4.3. Cuantización de un campo escalar real libre en un universo de FRW	19
4.3.1. Cuantización canónica de χ	21
4.3.2. Expansión de los operadores de campo	21
4.3.3. Interpretación de las partículas	23
4.4. La ecuación de Klein-Gordon	24
4.4.1. Expansión de una solución en una base	24
4.4.2. Transformaciones de Bogolyubov	25
4.4.3. Soluciones de frecuencia positiva y negativa	26
4.5. Creación de partículas por un campo gravitacional	29
4.6. El vacío	30
4.6.1. Elección del estado de vacío. Vacíos instantáneos y adiabáticos	30
4.6.2. No unicidad del vacío	31
5. Efecto Unruh, radiación de Hawking y principio de equivalencia	32
5.1. El efecto Unruh	33
5.2. Radiación de Hawking y principio de equivalencia	35
6. Conclusiones	37
A. Nomenclatura y convenciones	38

1. Introducción

1.1. Teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos

En los últimos 150 años hemos presenciado dentro de la física teórica una tendencia unificadora de las interacciones fundamentales. No obstante ello, la interacción gravitatoria, explicada a nivel macroscópico en forma más que satisfactoria por la teoría de la relatividad general de Einstein, ha resistido hasta el momento todos los esfuerzos de verse encuadrada dentro del esquema de la mecánica cuántica, la cual es hasta el momento la física correcta en el mundo microscópico. Es decir que no tenemos aún una teoría cuántica de la gravedad que sea consistente.

La teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés) provee un marco teórico coherente en el cual podemos considerar a las interacciones (electromagnetismo, fuerza fuerte y débil) representadas mediante operadores de campo cuyas excitaciones pueden interpretarse como partículas (o mejor dicho como estados de partículas). La gravitación no permite, hasta el momento, una interpretación de este tipo que se halle libre de problemas.

Pese a esto aún podemos encarar los aspectos cuánticos de la gravedad con un enfoque del tipo “semiclásico”. En los primeros días de la teoría cuántica se realizaron muchos cálculos en los cuales el campo electromagnético era considerado como un campo clásico de *fondo* (*background* en inglés) interactuando con la materia cuantizada. Este tipo de aproximación semiclásica condujo a resultados que estuvieron luego en acuerdo con la teoría de la electrodinámica cuántica (QED) (ver [2]).

Esperaríamos que los aspectos cuánticos de la gravedad sean susceptibles de permitir un enfoque de aproximación similar: el campo gravitatorio interviene como un background clásico mientras los campos de materia son cuantizados de la manera usual. Este background representa un baño en cuyo seno se transmiten las perturbaciones de los campos cuánticos.

La teoría de la relatividad general nos dice que la gravedad es causada por la curvatura del espaciotiempo, la cual puede ser matemáticamente encapsulada en la métrica $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ del mismo. Entonces la manera natural de introducir los aspectos gravitatorios de forma semiclásica sería considerar que dicha métrica es el background que interactuará con los campos cuánticos. Este enfoque es el llamado de “acoplamiento mínimo” y constituye la base de lo que es la teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos.

No se espera que dicha teoría sea una formulación exacta de la naturaleza, al menos no en la misma medida en que QED lo es de los fenómenos electromagnéticos, pero sí que nos pueda proveer de una descripción aproximada en circunstancias donde los efectos cuánticos de la gravedad no cumplan un papel dominante. Esto permitiría establecer una base de resultados que una teoría más general y abarcativa debería reproducir en el régimen adecuado.

1.2. Breve sinopsis histórica

Básicamente los cimientos de la teoría cuántica de campos en espacios curvos fueron erigidos por L.E. Parker en su análisis de la creación de partículas en las etapas primigenias del universo, [1]. Algunas de las primitivas aplicaciones de la teoría fueron justamente estudiar los efectos de creación de partículas en un número importante de escenarios. Luego, en la década del 70 S.W. Hawking descubre que los agujeros negros radían como cuerpos negros perfectos, ([19]), lo cual implicaba también la creación de partículas. Este hallazgo le dio un

fuerte ímpetu a la teoría y motivó diversas ramificaciones de estudios sobre las consecuencias del mismo, como ser el establecer una conexión entre los agujeros negros y la termodinámica.

Durante los últimos 30 años muchos esfuerzos se han orientado a construir un marco matemático riguroso motivado principalmente por las dificultades halladas en los primeros intentos de formulación de la teoría. Estas dificultades están relacionadas principalmente con la carencia de invarianza de Poincaré en un espaciotiempo curvo y la ausencia de un estado de vacío preferido, lo cual lleva a que no sea posible definir de manera unívoca los estados de partículas. A mediados de la década del 80 se comenzó a comprender cómo podían ser superados esos inconvenientes para campos cuánticos libres (no auto-interactuantes), formulando la teoría mediante un enfoque algebraico que hace énfasis en observables de campo local más que en el concepto de partículas. No obstante, estas atractivas ideas resultaron inadecuadas para la formulación de la teoría de campos cuánticos interactuantes incluso a nivel perturbativo, porque las técnicas usuales de renormalización utilizadas para espaciotiempos planos se apoyan fuertemente en la invarianza de Poincaré del mismo.

Durante la última década se ha progresado en otra dirección, utilizando métodos de “análisis microlocal” que permitieron definir una QFT para campos interactuantes en un espaciotiempo curvo a nivel perturbativo aunque todavía resta hallar una formulación no perturbativa de la misma en estos casos (ver [3] para un análisis histórico).

1.3. Objetivo del trabajo

Lo que haremos en este trabajo es reproducir los primeros pasos de la teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos, que corresponden a la generalización del formalismo de cuantización canónica desde el espaciotiempo plano de Minkowski a un curvo. Para ello utilizaremos el modelo más sencillo, que es el del campo escalar, y veremos las dificultades y ambigüedades que se originan en el caso de un campo cuántico que se propaga en un universo en expansión. Pare reducir al mínimo las complicaciones matemáticas inherentes nos restringiremos a considerar un campo escalar real libre $\phi(\mathbf{x}, t)$ que satisface una ecuación de Klein-Gordon¹

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Este campo representará (una vez cuantizado) partículas no interactuantes de masa m , spin cero y sin carga eléctrica (mesones). Aunque elemental, este ejemplo permite visualizar muchos de los aspectos interesantes que surgen en la traslación de la teoría hacia los espaciotiempos de la relatividad general. La generalización a campos vectoriales o spinoriales es inmediata aunque trabajosa desde el punto de vista del álgebra necesaria.

1.4. Sumario

Lo que sigue del trabajo se organiza en cuatro secciones del siguiente modo: en la sección 2 se presentan de manera sucinta ciertos conceptos de la teoría de estados cuánticos de la segunda cuantización que permiten construir el espacio de Hilbert donde van a operar nuestros operadores de campo.

La sección 3 comienza con las bases del formalismo de la QFT que tiene su origen en la acción S de la teoría de campos clásica, luego trata en detalle la prescripción de cuantización

¹En el apéndice A se hallan las convenciones matemáticas y de signos utilizadas a lo largo de este trabajo.

canónica de un campo escalar real libre, se explicita la descomposición del campo para realizar la construcción de un espacio de Fock y se hace referencia al procedimiento de orden normal que permite regularizar y definir de manera consistente el estado de vacío dentro de dicho espacio. Para finalizar y motivar el enfoque de interacción gravedad-materia se presenta un breve ejemplo semiclásico.

La sección 4 parte de la definición del espaciotiempo curvo que consideraremos, un modelo de Robertson-Walker homogéneo e isótropo espacialmente, que representa de manera elemental un universo en expansión; a continuación definimos los requerimientos mínimos para trasladar nuestra teoría válida para espacios planos a este espacio curvo. Estos requerimientos se traducen en ajustes a la acción S . Luego procedemos a seguir la prescripción de cuantización canónica para nuestro ejemplo elemental de campo escalar libre en este espaciotiempo curvo. Al momento de realizar la expansión de los campos para arribar a la interpretación en términos de partículas surge una ambigüedad que radica, básicamente, en la no unicidad del estado de vacío de la teoría. El análisis del origen de esa ambigüedad nos lleva a un estudio más detallado de la ecuación de Klein Gordon y de sus soluciones. Después consideramos una aplicación de este ejemplo de campo escalar que es la creación de partículas cosmológica y finalizamos con algunas consideraciones sobre el vacío.

La sección 5 considera en forma muy esquemática dos importantes fenómenos asociados con la creación de partículas. Uno en espaciotiempos planos, como es el efecto Unruh y otro en espaciotiempos curvos como es la radiación de Hawking.

La sección 6 engloba las conclusiones de esta presentación.

2. Preliminares

2.1. Formalismo de los números de ocupación y estado de vacío

Dado un sistema de N partículas indistinguibles no interactuantes, los estados posibles de este sistema podrán describirse completamente especificando el número de partículas que se hallan en cada nivel energético. Si cada una de estas partículas puede hallarse en un nivel energético " i " y " n_i " es el número de las mismas en el susodicho nivel, entonces un vector de estado será

$$|\Phi\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$$

Postulamos que este vector contiene la descripción completa del estado de las N partículas. Decimos que n_i es el número de ocupación del nivel i -ésimo. El conjunto de estos vectores de estado forman una base del espacio de Hilbert de la segunda cuantización en la denominada *representación de número de partículas*. A este espacio se lo llama *espacio de Fock*.

El producto escalar entre un par de vectores de estado $|\Phi\rangle$ y $|\Phi'\rangle$ se define como

$$\langle\Phi|\Phi'\rangle = \langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | n'_1, n'_2, \dots, n'_i, \dots \rangle = \prod_k \delta_{n_k n'_k}, \quad (1)$$

y un estado general (dependiente del tiempo) podrá escribirse como combinación lineal de los vectores de la base, hallándose la dependencia temporal dentro de los coeficientes de la expansión,

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N \dots \sum_{n_i=0}^N \dots C_{n_1 n_2 \dots n_i \dots}(t) |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle.$$

Esta expresión implica una sumatoria de 0 a N por cada nivel energético posible del sistema, lo cual considera todas las combinaciones de poblaciones para cada estado². Cuando el número total de partículas N del sistema está fijo, toda esta sumatoria inmensa está sujeta al vínculo

$$N = \sum_i n_i.$$

Esta representación por número de partículas generaliza el formalismo de los números de ocupación de un único oscilador armónico cuántico al caso de considerar N de ellos. En el caso del oscilador armónico cuántico el papel de partículas era asumido por los cuantos de excitación n_i del nivel i -ésimo. En muchos contextos de aplicación estas pseudo-partículas son llamadas *fonones*.

Dentro de este formalismo, y análogamente al caso del oscilador armónico cuántico, definimos el operador número de ocupación del estado i -ésimo “ \hat{n}_i ”, que actuará del modo siguiente sobre un estado

$$\hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle,$$

es decir que $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$ será autoestado de \hat{n}_i con autovalor n_i . El operador número de partículas total \hat{N} resultará

$$\hat{N} \equiv \sum_i \hat{n}_i.$$

Este último trabajará de forma consistente con lo anterior

$$\begin{aligned} \hat{N} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= \left(\sum_i \hat{n}_i \right) |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ &= \left(\sum_i n_i \right) |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ &= N |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \end{aligned}$$

El operador número \hat{n}_i puede escribirse en función de los operadores de creación y destrucción \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i correspondientes

$$\hat{N} = \sum_i \hat{n}_i = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i.$$

Estos operadores tendrán el efecto de aumentar o reducir el número de partículas n_i en el estado i -ésimo de a una unidad.

De esta manera resultan:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= (n_i + 1)^{\frac{1}{2}} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \\ \hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= (n_i)^{\frac{1}{2}} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle \\ \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= (n_i)^{\frac{1}{2}} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \end{aligned}$$

²Estamos considerando que en cada nivel energético i -ésimo puede haber cualquier número de partículas; es decir que estamos pensando en bosones.

Esto nos lleva a la definición del vector de estado de no-partículas ($n_i=0 \forall i$), conocido como el vacío, que denotaremos

$$|\mathbf{0}\rangle \equiv |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle, \quad (2)$$

y que se define por la propiedad de ser el estado que es destruido por la aplicación de cualquier operador de aniquilación, es decir

$$\hat{a}_i |\mathbf{0}\rangle = 0 \quad \forall i$$

Por otro lado, los estados de muchas partículas pueden obtenerse mediante la aplicación sucesiva de $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ operadores de creación sobre el vacío

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = C_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} \dots |\mathbf{0}\rangle,$$

donde el coeficiente de normalización se elige como

$$C_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}},$$

para que valga la condición de ortonormalidad (1). Bajo este formalismo decimos que el espacio de Fock es generado por el vacío (2) en el sentido de que podemos construir cualquier estado de ese espacio aplicando operadores de creación sobre el vacío.

3. Cuantización canónica en un espaciotiempo plano

La teoría cuántica de campos (QFT) establece un procedimiento de cuantización canónica análogo al que realiza la mecánica cuántica ordinaria con las variables dinámicas de un sistema discreto, siendo la principal diferencia que el objeto de esa cuantización ahora es un campo clásico que verifica una ecuación de ondas. El proceso de cuantización puede realizarse mediante otros métodos, uno de los cuales es la cuantización por integrales de camino desarrollado por R.P. Feynman. La cuantización canónica tiene la desventaja de que considera el tiempo de manera diferenciada respecto de las coordenadas espaciales lo cual oculta la invarianza relativista de la teoría pero sin embargo tiene la virtud de permitir realizar un paralelo con la mecánica cuántica usual de forma que podemos utilizar casi sin modificación mucho del andamiaje ya construido para aquella.

Un campo clásico describe como función del espacio y del tiempo, por ejemplo, las oscilaciones de un medio físico ante una perturbación. El campo mismo surge naturalmente cuando hacemos tender un sistema discreto al continuo, ver [4], y el formalismo lagrangiano y hamiltoniano de la mecánica clásica puede extenderse en forma consistente para estos casos. El punto de partida formal de toda esta teoría y que también lo es de la QFT es el *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton* que es el que genera las trayectorias físicas en los sistemas discretos.

Suponiendo que el sistema continuo bajo estudio requiere para su completa descripción de n campos escalares³ $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), este principio establece que las ecuaciones de

³En los campos vectoriales se suelen considerar en forma separada sus componentes escalares como otros campos sujetos, por supuesto, al vínculo que proviene de pertenecer a una entidad de rango mayor.

movimiento que han de satisfacer los mismos se obtienen extremando la acción

$$S[\phi_i, \partial_\mu \phi_i] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (3)$$

la cual es un funcional de los campos y de sus derivadas. Esta acción S sigue siendo, como en la mecánica de los sistemas discretos, la integral temporal del lagrangiano L del sistema pero en la descripción de campos suele utilizarse la densidad lagrangiana \mathcal{L} para construir la teoría porque se busca en general no hacer diferencias entre el tiempo y las coordenadas espaciales para dejar explícita la invarianza Lorentz⁴.

Extremar la acción (3) es equivalente a que se verifique

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = 0$$

cuando los campos son sometidos a una variación

$$\phi_i(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \phi_i(\mathbf{x}, t) + \delta \phi_i(\mathbf{x}, t),$$

de manera que estas variaciones se hagan nulas en la superficie que rodea el recinto de integración Ω . Este proceso (cuyo desarrollo puede verse en [7]) nos conduce a que los campos deban cumplir las ecuaciones

$$\nabla \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi_i(\mathbf{x}, t))} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_i(\mathbf{x}, t))} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(\mathbf{x}, t)} = 0 \quad (4)$$

que son las versiones continuas de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones pueden escribirse en forma manifiestamente covariante como

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i(\underline{x}))} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(\underline{x})} = 0. \quad (5)$$

3.1. Sobre la acción

Debemos notar que en la elección de una acción S para una teoría dada se busca que la misma satisfaga ciertos principios generales (ver [6]) para que la teoría tenga coherencia. Entre ellos destacaremos que:

- ① La acción es un funcional *local* de los campos y sus derivadas.
- ② Las ecuaciones de los campos contienen derivadas de, a lo sumo, segundo orden.
- ③ La acción, en un espaciotiempo plano, debe ser invariante de Poincaré.
- ④ La acción, en un espaciotiempo curvo, debe ser covariante general.

⁴Claramente en (3) vemos que el lagrangiano es la integral volumétrica de la densidad, $L = \int d^3x \mathcal{L}$.

El requerimiento ① de *localidad* se traduce en que los campos y sus derivadas deben ser funciones locales de las coordenadas x^α ; esto significa que el valor del campo ϕ en el punto x^α es determinado por las propiedades del campo infinitesimalmente cerca del punto en cuestión y no depende de otro u otros puntos $x^{\alpha'}$. Piénsese por ejemplo en la fuerza gravitatoria ejercida por una masa M sobre otra m pensada como función de la posición \mathbf{x}_m de esta última, cuya expresión es

$$\vec{F}_G(\mathbf{x}_m) = -G \frac{mM}{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_M|^3} (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_M). \quad (6)$$

Una expresión del tipo (6) es no local; en este sencillo ejemplo el valor de la fuerza en el punto \mathbf{x}_m depende del punto \mathbf{x}_M . En muchos fenómenos del continuo esta hipótesis de localidad es válida si la distancia típica de variación del campo es mucho mayor a la medida típica de la granularidad del medio ([7]). Desde un punto de vista operacional digamos que las teorías locales de campos han tenido éxito en la descripción de los experimentos de manera que no hay necesidad de considerar teorías no-locales, que serían a todas luces más complicadas.

El requerimiento ② asegura que bastará con especificar condiciones iniciales para los campos y sus derivadas primeras para que el problema quede matemáticamente bien planteado. Desde el punto de vista de \mathcal{L} significará que la misma depende de los campos y de la derivada primera de los mismos; es decir que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$. Las ecuaciones usuales de la física son ecuaciones de a lo sumo segundo orden⁵.

El requerimiento ③ nos asegura que se cumplan las simetrías necesarias para que la teoría se halle de acuerdo con la relatividad especial. El grupo de transformaciones de Poincaré (que define las simetrías del espaciotiempo de Minkowski) incluye cuatro traslaciones de coordenadas x^μ , tres rotaciones espaciales y tres transformaciones de Lorentz (*boosts*)⁶. Este requerimiento restringe fuertemente las \mathcal{L} de manera que prohíbe la dependencia explícita de \mathbf{x}, t . Esto último significa que estaremos considerando sistemas cerrados, esto es, sistemas que no intercambian energía y momento con fuentes externas.

El requerimiento ④ busca que la teoría sea invariante frente a transformaciones arbitrarias de coordenadas que es un dictamen de compatibilidad con la relatividad general. Usualmente esto implica que las ecuaciones resultan expresadas en términos de tensores o contracciones de tensores.

3.2. Procedimiento de cuantización canónica

Si bien hemos dicho que el punto de partida de la teoría es la acción $S[\phi_i(\mathbf{x}, t), \partial\phi_i]$, en la práctica se suele comenzar desde las ecuaciones de movimiento de los campos para construir una \mathcal{L} que las reproduzca cuando se aplican sobre ella las ecuaciones (4) o (5).

Aún contando con la \mathcal{L} y las ecuaciones de los campos, para cuantizar una teoría clásica de campos por los métodos utilizados en mecánica cuántica ordinaria nos resta pasar a un formalismo hamiltoniano lo cual requiere definir un “momento” canónicamente conjugado para cada campo. Esto sabemos hacerlo para sistemas con un número contable de grados de libertad (i.e. sistemas discretos). En el caso de una teoría de campos en realidad tenemos un

⁵Las actuales teorías de campos cuánticos establecidas (electrodinámica, y las de las interacciones fuerte y débil) están descritas por densidades \mathcal{L} que dependen solamente de los campos y de sus derivadas primeras.

⁶Las dos últimas transformaciones constituyen el grupo de Lorentz, de manera que la invarianza de Poincaré incluye la invarianza de Lorentz.

número infinito de grados de libertad que corresponden a los valores de los campos ϕ_i en cada punto del espacio; es decir $\phi(\mathbf{x}, t)$ y $\phi(\mathbf{y}, t)$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ y son dos grados de libertad diferentes y como la coordenada \mathbf{x} es una variable continua vemos que el número de estos es infinito.

Esta tecnicidad se resuelve pasando momentáneamente a una discretización del espacio tridimensional dividiéndolo en celdas de manera que tengamos un número contable de grados de libertad dados por el valor promedio del campo en cada celda, para luego volver al continuo haciendo tender el tamaño de la celda a cero (ver [8]). Salteando este paso podemos considerar ya tomado el límite continuo. Entonces se define para cada campo $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ un campo conjugado $\pi_i(\mathbf{x}, t)$ dado por

$$\pi_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}.$$

Así construiremos la densidad hamiltoniana por medio de una transformada de Legendre

$$\mathcal{H}(\phi_i, \pi_i) = \sum_i \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L},$$

la cual integrada en el espacio nos dará el hamiltoniano del sistema

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\phi_i, \pi_i).$$

Esta teoría clásica de campos se cuantiza convirtiendo los campos $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ y sus canónico-conjugados $\pi_i(\mathbf{x}, t)$ en operadores de campo,

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{x}, t) &\longrightarrow \hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t) \\ \pi_i(\mathbf{x}, t) &\longrightarrow \hat{\pi}_i(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

y estableciendo entre ellos relaciones de conmutación ó anticonmutación según corresponda. Siguiendo la nomenclatura usual en mecánica cuántica el carácter de operador se resaltarán con el signo $\hat{}$ sobre el campo.

Se ve que para campos que representen partículas cuya estadística es la de Bose-Einstein (bosones) la elección adecuada es la de utilizar conmutadores, mientras que para campos representando partículas con estadística de Fermi-Dirac la elección adecuada es la de anticonmutadores. Una asignación diferente a las establecida produce resultados inconsistentes (en [9] se muestra ese análisis y una justificación de la relación entre espín y estadística).

Entonces, luego de realizar la conversión de campos a operadores, se establecen, suponiendo que trabajamos con bosones, relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}', t) \right] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{ij} \\ \left[\hat{\phi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_j(\mathbf{x}', t) \right] &= \left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Debe notarse que siendo ahora los campos operadores, el $*$ que indica la conjugación compleja de un ente que es un número (llamados *c-numbers* en el lenguaje de campos) pasa a un \dagger (daga) en el caso de operadores. Esta operación (*daguear*) tiene, además de la conjugación compleja, el significado extra de la trasposición en la representación matricial del operador en cuestión.

La dinámica de los operadores de campo $\hat{\phi}_j(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\pi}_j(\mathbf{x}, t)$ se determina por las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\dot{\hat{\phi}}_j = i[\hat{\phi}_j, \hat{H}] \quad \dot{\hat{\pi}}_j = i[\hat{\pi}_j, \hat{H}].$$

En los casos que trataremos aquí veremos que el operador $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ termina cumpliendo la misma ecuación diferencial que el campo clásico $\phi(\mathbf{x}, t)$, pero esto no es un resultado general.

El proceso de cuantización nos ha provisto con $\hat{\phi}_j$ y $\hat{\pi}_j$ que son operadores en algún espacio de Hilbert apropiado. No obstante para tomar contacto con la interpretación en términos de partículas, a través del formalismo de los números de ocupación, es necesario descomponer los operadores de campo en una base. Desde allí puede verse que el carácter de operador pasa a los coeficientes de la descomposición y su accionar sobre los estados $|\Phi\rangle$ vistos en la sección 2 queda en evidencia al determinar el álgebra que cumplen dichos operadores⁷ y hacer una analogía con los operadores de creación y destrucción del oscilador armónico cuántico.

3.3. Cuantización de un campo escalar real libre

El ejemplo más sencillo de cuantización lo constituye un único campo escalar real libre $\phi(\mathbf{x}, t)$. Una \mathcal{L} apropiada para dicho campo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) \partial^\mu \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

donde m representará la masa de las partículas descritas por esta teoría cuando hagamos la cuantización. El hecho de que el campo ϕ sea real implica que las partículas no tendrán carga eléctrica (son neutras). Esta expresión es válida en un espaciotiempo plano lo cual queda de manifiesto cuando hacemos aparecer la métrica de Minkowski

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t).$$

Evaluando las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de (7) nos lleva a la ecuación del campo que es la de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (8)$$

donde \square es el operador d'Alembertiano (ver apéndice A). La definición del campo conjugado a $\phi(\mathbf{x}, t)$ resulta

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t).$$

De esta manera llegamos a la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \pi(\mathbf{x}, t) \partial_t \phi(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2(\mathbf{x}, t) + |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (9)$$

Siguiendo nuestra “prescripción” de cuantización canónica reemplazamos los campos clásicos por operadores de campo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &\longrightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}, t) \\ \pi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) &\longrightarrow \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

⁷El álgebra de los operadores queda determinado a través de las relaciones de conmutación.

y establecemos entre ellos las relaciones de conmutación correspondientes a tiempos iguales

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t) \right] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10a)$$

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t) \right] = \left[\dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t), \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \quad (10b)$$

La densidad hamiltoniana conduce, mediante integración, a la expresión del hamiltoniano del sistema (que ahora también es un operador)

$$\hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left[\dot{\hat{\phi}}^2(\mathbf{x}, t) + |\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, t)|^2 + m^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (11)$$

Las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para campo y campo conjugado serán:

$$\dot{\hat{\phi}} = -i \left[\hat{\phi}, \hat{H} \right] \quad \dot{\hat{\pi}} = \dot{\hat{\phi}} = -i \left[\hat{\pi}, \hat{H} \right] \quad (12)$$

Haciendo uso de (10) y (11) podemos evaluar explícitamente la segunda ecuación de (12) llegando a que debe cumplirse

$$\dot{\hat{\pi}} = \ddot{\hat{\phi}} = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi},$$

y pasando todos los términos a un miembro obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \hat{\phi} - \nabla^2 \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} &= 0 \\ (\square + m^2)\hat{\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

lo cual significa que el operador de campo $\hat{\phi}$ satisface también la ecuación de Klein-Gordon. Como hemos dicho, esto no es una regla general: las ecuaciones de movimiento para los campos clásicos no tienen por qué ser iguales a las que verifican los operadores de campo.

3.3.1. Expansión de los operadores de campo

Ahora construiremos una representación explícita de estos operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$. Para ello comenzamos notando que una solución arbitraria de (13) puede ser expandida como una integral de Fourier sobre una base de ondas planas. Remarquemos que las ondas planas del tipo

$$u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\omega t},$$

son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con $\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. No obstante, es instructivo que expandamos los campos con funciones espaciales del tipo

$$u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = N_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (14)$$

mientras la parte temporal y el carácter de operador pasa a los coeficientes de la expansión. El coeficiente $N_{\mathbf{p}}$ es una constante (depende de \mathbf{p} pero no de \mathbf{x}, t) para ajustar la normalización a posteriori. Estas funciones (14) forman un conjunto completo y ortogonal, lo cual implica verificar

$$\begin{aligned} \int d^3x u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) u_{\mathbf{p}'}(\mathbf{x}) &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \\ \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{x}') &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned}$$

si la base es finita (es decir si la sumatoria en \mathbf{p} tiene finitos términos) o bien:

$$\int d^3x u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x})u_{\mathbf{p}'}(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

$$\int d^3p u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

si la base es infinita. El caso de una base finita corresponde a utilizar condiciones periódicas de contorno (en la jerga conocida como *normalización en una caja*) y el segundo a utilizar una normalización continua. Por supuesto la física será independiente de utilizar una u otra condición siendo la elección cuestión de conveniencia. Ahora utilizaremos la normalización continua.

Podemos escribir el operador de campo como

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \hat{c}_{\mathbf{p}}(t), \quad (15)$$

donde vemos que hemos endosado el carácter de operador y la dependencia temporal a $\hat{c}_{\mathbf{p}}(t)$, que son los modos de la expansión. Introduciendo (15) en la ecuación (13) para el operador de campo resulta que los modos verifican

$$\ddot{\hat{c}}_{\mathbf{p}}(t) = -(|\mathbf{p}|^2 + m^2)\hat{c}_{\mathbf{p}}(t),$$

la cual sabemos resolver como

$$\hat{c}_{\mathbf{p}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \quad (16)$$

donde ahora los coeficientes $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ no dependen del tiempo, pero aún son operadores, y los modos $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ son osciladores armónicos de frecuencia

$$\omega_{\mathbf{p}}^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2. \quad (17)$$

Introduciendo la solución (16) en la expresión (15) resulta que podemos expresar nuestro operador de campo como:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} \left[\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (18)$$

Ahora, dado que el campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ del que partimos es real ($\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^*(\mathbf{x}, t)$) se sigue que en forma correspondiente el operador debe ser hermítico, es decir

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$$

lo cual nos conduce a

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int d^3p N_{\mathbf{p}}^* \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (19)$$

Este vínculo permite expresar uno de los operadores en el miembro derecho de (18) en función del otro. Si intercambiamos algunas variables de integración en (19) ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$) de manera que podamos igualar término a término las expansiones (18) y (19) resulta⁸ que

$$\hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

⁸Notemos que el intercambio $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ no afecta a $\omega_{\mathbf{p}}$ que depende del módulo de \mathbf{p} . Para el factor normalizador ocurre, veremos luego, la misma situación; en realidad es $N_{\mathbf{p}}$.

Luego podemos expresar el campo como

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} \left[\hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right],$$

que puede ponerse de forma más simétrica volviendo a cambiar variables de integración

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (20)$$

Asimismo, derivando con respecto al tiempo la expresión (20) el operador de campo conjugado resulta ser:

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = i \int d^3p N_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (21)$$

Podemos poner las expansiones (20) y (21) en forma algo más abreviada con la notación covariante $\underline{p} \cdot \underline{x} = p_\mu x^\mu = \omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$

$$\hat{\phi}(\underline{x}) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} \right]$$

$$\hat{\pi}(\underline{x}) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} i\omega_{\mathbf{p}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\underline{p}\cdot\underline{x}} - \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\underline{p}\cdot\underline{x}} \right].$$

En posesión de la expresión del operador de campo y su conjugado podemos evaluar los conmutadores (10) para determinar el álgebra de los operadores $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$ y también ajustar el valor del factor de normalización $N_{\mathbf{p}}$. De esa manera las relaciones de conmutación entre campo y campo conjugado se trasladan a relaciones de conmutación entre los coeficientes de las expansiones, obteniéndose

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (22a)$$

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'} \right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] = 0. \quad (22b)$$

Para que valgan las expresiones (22) hemos definido al factor de normalización $N_{\mathbf{p}}$ como

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}},$$

habida cuenta de que utilizamos la expresión siguiente de la delta de Dirac

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}.$$

Podemos expresar el operador \hat{H} en función de los operadores $\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\mathbf{p}}$. Luego de un trabajo algebraico intenso arribamos a

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \left(\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \right), \quad (23)$$

el cual puede resumirse aún más utilizando las relaciones de conmutación (22) para llegar a

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \left(2\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} + \delta^3(\mathbf{0}) \right) \quad (24a)$$

$$\hat{H} = \int d^3p \omega_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p + \frac{1}{2} \int d^3p \omega_p \delta^3(\mathbf{0}) \quad (24b)$$

donde el último sumando de (24b) es, merced a la delta, infinito. Las relaciones de conmutación (22) junto con la expresión del hamiltoniano en (24b) (obviando por un momento el término infinito) permiten hacer la identificación de los coeficientes \hat{b}_p^\dagger y \hat{b}_p con los operadores de creación y aniquilación de la teoría del oscilador armónico cuántico (ver [9]). En la interpretación de campos los modos normales de la descomposición del campo se asocian con las partículas descritas por la teoría de forma que \hat{b}_p^\dagger (\hat{b}_p) crea (destruye) una partícula de momento \mathbf{p} y energía dada por (17), siendo

$$\hat{n}_p = \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p,$$

el número de partículas en el estado energético definido por la etiqueta \mathbf{p} .

3.3.2. Orden normal

El operador (24b) claramente tiene un problema; los valores de expectación del mismo con respecto a cualquier estado (incluido el vacío) no tienen un valor finito. Es uno de los primeros infinitos que surgen en la teoría cuántica de campos, pero es fácil de remover.

Dado que la energía siempre está definida a menos de una constante (lo que interesa siempre son las diferencias de energía) podemos redefinirla, reescalarla o *regularizarla*, mediante un corrimiento (que necesariamente será infinito en este caso). Esto no afectará los observables. Para llevar a cabo la regularización en forma consistente se define una operación de *orden normal*, denotada con $:$: la cual tiene como resultado que cada vez que aparece un producto de operadores de creación y aniquilación se sitúan los operadores de aniquilación a la derecha de los de creación. Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} : \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger : &= \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\ : \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i : &= \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \end{aligned}$$

Luego, la expresión (23) al aplicársele el orden normal resulta en un hamiltoniano regularizado

$$: \hat{H} : = \int d^3p \omega_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p = \int d^3p \omega_p \hat{n}_p$$

El procedimiento de orden normal no basta por sí sólo para tratar los infinitos que surgen en la teoría de campos interactuantes, que requiere de métodos más sofisticados de regularización. En esos contextos la regularización es un paso previo a la *renormalización*. Esto último es un procedimiento en el cual partes de las expresiones regularizadas son absorbidas en las definiciones de las constantes de acoplamiento para arribar a una teoría que se halle bien definida.

3.3.3. El espacio de Fock

El espacio de Fock de la teoría puede construirse en forma inmediata aplicando los operadores de creación \hat{b}_p^\dagger sobre el vacío $|\mathbf{0}\rangle$. Este último cumplirá

$$\hat{b}_i |\mathbf{0}\rangle = 0 \quad \forall i$$

de forma que un estado $|\Phi\rangle$ con números de ocupación $n_{\mathbf{p}}$ en cada modo de momento \mathbf{p} se puede obtener como

$$|\Phi\rangle \equiv |n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle = \left[\prod_{\mathbf{p}} \frac{(\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{p}}!}} \right] |0\rangle \quad (25)$$

El espacio de Hilbert de estados cuánticos será generado por los vectores $|n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle$ con todas las posibles combinaciones de los números $n_{\mathbf{p}}$.

Las excitaciones del operador de campo $\hat{\phi}$ en un punto del espaciotiempo (\mathbf{x}, t) entonces pueden interpretarse en términos de cuantos de excitación (partículas) $n_{\mathbf{p}}$ de los modos $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ en el punto en consideración.

3.4. Enfoque de interacción semiclásico

Un enfoque muy sencillo de interacción (independiente del tiempo) entre las partículas descritas por un campo escalar real cuántico ϕ con, por ejemplo, nucleones (considerados en forma clásica) puede ser llevado a cabo incorporando una densidad hamiltoniana de interacción

$$\mathcal{H}_I(\mathbf{x}) = g\rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \quad (26)$$

la cual se añade a la densidad hamiltoniana (9) del campo libre ϕ (que podría estar representando mesones-pi neutros). Aquí $\phi(\mathbf{x})$ es nuestro campo escalar real (que será objeto de cuantización) y $\rho(\mathbf{x})$ la densidad de nucleones en el punto \mathbf{x} . La constante de acoplamiento g mide la fuerza de la interacción. Si los nucleones son tratados como partículas puntuales de masa infinita podemos considerarlos fijos en el espacio de manera que su densidad es

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n). \quad (27)$$

La presencia de la delta en (27) lleva a una integración inmediata de las coordenadas espaciales en $H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I$ de modo que si consideramos una expansión de los campos con condiciones periódicas de contorno, es decir pasamos de (20) a

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right],$$

resulta que nos queda

$$\hat{H}_I = \int d^3x g\rho(\mathbf{x})\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_n} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_n} \right]$$

y podemos evaluar luego los elementos de matriz $\langle \Phi_a | \hat{H}_I | \Phi_b \rangle$ que nos darán información sobre las posibles transiciones entre los estados $|\Phi_a\rangle$ y $|\Phi_b\rangle$ en el formalismo de los números de ocupación (los detalles de este ejemplo pueden verse en [8]).

Este esquema es muy elemental y poco realista pero ilustra lo que sería un enfoque *semiclásico*: el operador de campo cuántico $\hat{\phi}$ propagándose en un *background* clásico de nucleones dado por (27). Un término de la forma (26) en la \mathcal{L} nos brindará un enfoque de interacción semiclásico.

3.5. Cuantización canónica. Conclusión

Hemos digerido entonces el núcleo básico de la cuantización canónica de un campo escalar libre en un espaciotiempo de Minkowski. Los resultados principales son la ecuación de Klein Gordon (13) que satisfacen campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ y operador $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$, las relaciones de conmutación y finalmente la expresión (20) en términos de operadores de creación y destrucción que nos permiten hacer la identificación de un estado de vacío $|\mathbf{0}\rangle$ para la teoría y la consiguiente construcción del espacio de Fock a partir del mismo.

El transporte de este núcleo básico de teoría hacia los espaciotiempos curvos comenzará justamente con una descripción del espaciotiempo que consideraremos.

4. Cuantización en un espaciotiempo curvo

4.1. Espaciotiempo curvo

Las observaciones realizadas hasta el momento sugieren que el universo es aproximadamente homogéneo e isótropo para distancias espaciales del orden de cientos de megaparsecs ([10]). Los modelos cosmológicos enfatizan esas simetrías del espacio como primera aproximación. Esas asunciones simplificadoras justamente definen la familia de modelos cosmológicos de Friedman-Robertson-Walker (FRW).

Un espaciotiempo homogéneo e isótropo es uno para el cual la geometría es, por un lado, esféricamente simétrica en torno a cualquier punto en el espacio (isotropía) y, por otro lado, la misma para un punto que para cualquier otro (homogeneidad). Entonces la isotropía y la homogeneidad son simetrías del espacio y no del espaciotiempo.

En un espaciotiempo tetradimensional podemos considerar superficies tridimensionales (llamadas *3-superficies*) que se especifican dando una de las coordenadas en función de las otras tres, así por ejemplo

$$x^0 = f(x^1, x^2, x^3)$$

significa que la función f nos da la coordenada x^0 del punto en la 3-superficie localizado en (x^1, x^2, x^3) . En cada punto de la 3-superficie tendremos direcciones que se hallan en la superficie (tangentes a ella) y una dirección normal. Esta última se halla a lo largo de un vector η_μ que es ortogonal a cada vector tangente τ_μ de modo que

$$\eta_\mu \tau^\mu = 0.$$

En este trabajo nos limitaremos a 3-superficies de *tipo espacial*, que son aquellas para las cuales todo vector tangente τ_μ es de tipo espacial y toda normal η_μ de tipo temporal. Para el espaciotiempo plano de Minkowski, cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

podemos considerar un ejemplo elemental tomando la familia de superficies especificadas por $t = cte$. Dentro de cada superficie (que podemos etiquetar según el valor correspondiente de t) un punto se localiza mediante sus coordenadas x, y, z y la geometría se describe simplemente por

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (28)$$

que es un espacio tridimensional plano (euclídeo). Esta es sólo una manera de dividir el espacio y el tiempo para un espaciotiempo plano, pero existen muchas otras (menos triviales).

Dentro de los modelos cosmológicos homogéneos e isótropos espacialmente el más sencillo se describe por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (29)$$

donde $a(t)$ es el llamado *factor de escala*. El espaciotiempo definido por esta métrica se divide en una parte temporal y una parte espacial que es isótropa y homogénea. La geometría de las superficies espaciales a $t = cte$ estarán descritas por el elemento de línea

$$dS^2 = -a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (30)$$

En cualquier instante de tiempo t podemos definir nuevas coordenadas $X = a(t)x$, $Y = a(t)y$, $Z = a(t)z$ de forma que (30) tenga la forma del espacio plano (28). Luego, la geometría de cada superficie espacial de $t = cte$ es plana, isótropa y homogénea, aunque el factor de escala $a(t)$ implica que para diferentes valores de t las distancias entre puntos de la superficie sufren una variación. Si $a(t)$ se incrementa con el tiempo el elemento de línea (29) describe un universo en expansión (ver figura 1).

La (29) es entonces la métrica de Robertson-Walker plana⁹. Enfatizamos una vez más que lo que resulta plano son las superficies espaciales tridimensionales; el espaciotiempo como un todo es curvo.

Existen otras dos variantes de geometría isótropa y homogénea cuyas superficies espaciales no resultan planas sino curvas. Son las métricas de Robertson-Walker *cerrada* y *abierta* que originan los correspondientes modelos cosmológicos espacialmente curvos. Sin embargo nuestra discusión se limitará al caso plano que, además de ser más sencillo matemáticamente, parece ser el que representa en forma más aproximada al universo observado. El modelo más sencillo es también el más realista ([10]).

4.2. Cuantización canónica con inclusión de la gravedad

Según hemos adelantado en la introducción, el método más sencillo de considerar la acción de la gravedad en una teoría cuántica de campos consiste en realizar un enfoque semiclásico donde un campo cuántico interactúa con la métrica $g^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ del espaciotiempo que actúa como un background clásico (no se cuantiza). En un tal enfoque, los campos se siguen denominando libres porque no interactúan con otros campos cuánticos.

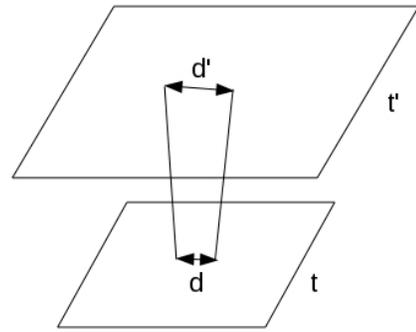


Figura 1: Dos superficies espaciales etiquetadas por el valor de la coordenada t . Un factor de escala que se incrementa hace que la distancia entre dos puntos de la superficie también se incremente, definiendo así un universo en expansión.

⁹Se dice que es un modelo de Friedman-Robertson-Walker cuando el factor de escala obedece la ecuación de Einstein.

Para llevar nuestra teoría de campos a un espacio curvo el requerimiento mínimo es hacer que la acción satisfaga covarianza general, es decir que tiene que ser formulada de una manera que resulte independiente de cualquier transformación arbitraria de coordenadas (cambiamos el requerimiento ③ por el ④ en la sección 3.1). Este objetivo puede lograrse ajustando la acción válida para el espaciotiempo de Minkowski,

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \frac{1}{2} [\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) - m^2 (\phi(\mathbf{x}, t))^2],$$

del siguiente modo:

- Reemplazamos la métrica $\eta_{\mu\nu}$ de un espacio plano de Minkowski por la métrica general dependiente de la posición $g_{\mu\nu}$ de un espacio curvo.
- Hacemos el cambio de derivadas ordinarias ∂_μ por las covariantes ∇_μ
- Reemplazamos el elemento de volumen 4D $d^3x dt$ de Minkowski por el de un espacio curvo covariante $d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \equiv d^4x \sqrt{-g}$

Con estas tres modificaciones se logra imponer a la acción la covarianza general. En efecto

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2]$$

es covariante general.

Debe notarse que para el caso de un campo escalar ϕ la derivada ordinaria y la covariante coinciden ($\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$). Así transformada, nuestra nueva acción depende explícitamente de $g_{\mu\nu}$ y por ello describe un campo acoplado a la gravedad. Esta forma de acoplamiento es la llamada *acoplamiento mínimo* dado que es la mínima interacción de un campo con la gravedad que cumple los requisitos de compatibilidad con la relatividad general.

Existen otras formas de acoplamiento a la gravedad por medio de términos adicionales en la \mathcal{L} . Estos términos suelen acoplar los campos al tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ o a sus contracciones. El modelo más sencillo de acoplamiento no mínimo consiste en añadir a la densidad lagrangiana un término proporcional a $R\phi^2$, donde $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci y ξ es un parámetro adimensional de la teoría. De esta manera la acción lucirá:

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2]. \quad (31)$$

Este término adicional describe una “masa” que depende de la curvatura del espaciotiempo. La inclusión del parámetro ξ permite considerar una serie de casos particulares interesantes. Siendo D es la dimensión del espaciotiempo, la siguiente tabla nos muestra los tres principales casos

$\xi = 0$	$m \neq 0$	Acoplamiento mínimo
$\xi = 0$	$m = 0$	Acoplamiento mínimo y sin masa
$\xi = \frac{(D-2)}{4(D-1)}$	$m = 0$	Acoplamiento conforme

Para dimensión $D=4$ si se da $\xi=1/6$ nos hallamos en la situación de *acoplamiento conforme*. En este caso la acción y la ecuación de movimiento que de ella se desprende exhiben invarianza bajo una transformación conforme; es decir que si la métrica cambia de acuerdo a

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x),$$

donde $\Omega^2(x)$ es una función continua no-nula del espaciotiempo (llamada el *factor conforme*), la ecuación de movimiento resulta transformada de igual modo que la métrica: multiplicada por el mencionado factor (ver [11]). Dicho de otra manera, una solución en el espaciotiempo con la métrica $g_{\mu\nu}$ es también, luego de un reescaleo, una solución en la métrica $\Omega^2(x, t)g_{\mu\nu}$.

Por otro lado resulta conveniente la inclusión de ξ como parámetro para el caso de campos interactuantes, como cuando se incluyen términos proporcionales a $\sqrt{-g}\lambda\phi^4$ en la \mathcal{L} , porque entonces es necesario un término de la forma $\sqrt{-g}\xi R\phi^2$ para ajustar la renormalización por sustracción de contratérminos (ver [17]).

A partir de la acción (31) obtenemos

$$\partial_\alpha[\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi] + \sqrt{-g}(m^2 + \xi R)\phi = 0, \quad (32)$$

pero utilizando, ver [13], la equivalencia

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha[\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi] = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi$$

y la generalización covariante del d'Alembertiano

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \equiv \square_c\phi$$

puede ser escrita la ecuación (32) de una forma más amigable como

$$(\square_c + [m^2 + \xi R])\phi = 0 \quad (33)$$

Esta forma de escribir la ecuación de campo resulta similar a (8) pero no debemos olvidar que en (33) “entra” el espacio curvo, es decir la gravedad, a través de R y de \square_c .

4.3. Cuantización de un campo escalar real libre en un universo de FRW

Según anticipáramos en la sección 4.1 aplicaremos el formalismo de cuantización canónica en un espaciotiempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) homogéneo e isótropo con secciones espaciales planas (FRW plano). Este espaciotiempo está caracterizado completamente por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2, \quad (34)$$

donde $d\mathbf{x}^2$ es el elemento de línea usual 3D euclídeo y $a(t)$ es el factor de escala. Es decir que las secciones tridimensionales espaciales son planas pero el espaciotiempo como un todo es curvo.

Un espaciotiempo de FRW plano es *conforme* a un espaciotiempo plano. Para visualizar explícitamente esta equivalencia reemplazamos la coordenada t por una nueva coordenada η que llamaremos *tiempo conforme* y que se define a través de

$$\eta(t) \equiv \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (35)$$

donde t_0 es una constante arbitraria. Introduciendo (35) en (34) el elemento de línea adquiere su forma conforme

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\mathbf{x}^2]$$

de manera que la métrica resulta ser

$$g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu} \quad g^{\mu\nu} = a^{-2} \eta^{\mu\nu}$$

y por ende tendremos $\sqrt{-g} = a^4$. La ecuación del campo (33) en las nuevas coordenadas (η, \mathbf{x}) resulta en

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' - \nabla^2\phi + (m^2 + \xi R)a^2\phi = 0 \quad (36)$$

donde la ' denota derivación con respecto al tiempo conforme η . Si introducimos el campo auxiliar $\chi = a(\eta)\phi$ podemos reescribir la ecuación anterior en la forma más conveniente

$$\chi'' - \nabla^2\chi + \left([m^2 + \xi R]a^2 - \frac{a''}{a} \right) \chi = 0, \quad (37)$$

donde si utilizamos la relación entre R y a del modelo de Friedmann en un espaciotiempo espacialmente plano,

$$R = \frac{6}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2),$$

junto con la relación entre las derivadas respecto de t y η , esto es $a\dot{a} = a'$, podemos escribir (37) de una forma donde se exhibe explícitamente la condición conforme,

$$\chi'' - \nabla^2\chi + \left(\left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] a^2 \right) \chi = 0, \quad (38)$$

para la cual si, una vez más, consideramos el d'Alembertiano $\square \equiv \partial_\eta^2 - \nabla^2$ y definimos una masa efectiva dependiente del tiempo a través de η así:

$$m_{\text{eff}}^2(\eta) \equiv \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] a^2, \quad (39)$$

resulta que el campo χ obedece la ecuación de Klein-Gordon clásica (8), salvo por la dependencia temporal de m_{eff}^2 ; es decir que se cumple

$$[\square + m_{\text{eff}}^2(\eta)]\chi = 0. \quad (40)$$

En conclusión podemos ver que la dinámica de un campo escalar libre ϕ en un espacio de FRW plano es matemáticamente equivalente a la dinámica del campo χ en un espaciotiempo plano de Minkowski donde la influencia de la gravedad sobre el campo se halla contenida en la masa efectiva dependiente del tiempo $m_{\text{eff}}^2(\eta)$. Si reescribimos la acción (31) para el campo χ resulta en

$$S[\chi, \partial_\mu] = \int d^3x d\eta \mathcal{L}(\chi, \partial_\mu\chi, \eta) = \int d^3x d\eta \frac{1}{2} [(\chi')^2 - |\nabla\chi|^2 - m_{\text{eff}}^2(\eta)\chi^2]. \quad (41)$$

donde comprobamos que ahora la densidad lagrangiana \mathcal{L} depende explícitamente del tiempo η lo que significa que la energía del campo χ no va a conservarse. En teoría cuántica de campos esto lleva a la posibilidad de la creación de partículas; la energía necesaria para las nuevas partículas será suplida por el campo gravitatorio.

4.3.1. Cuantización canónica de χ

Estamos listos para realizar la cuantización de nuestro campo libre en el universo expansionario a partir de la acción (41). Definimos el momento canónico conjugado

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi'} = \frac{d\chi}{d\eta} = \chi',$$

pasamos los campos χ, χ' a operadores de campo $\hat{\chi}, \hat{\chi}'$ e introducimos las relaciones de conmutación a tiempos (η) iguales

$$[\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\chi}'(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (42a)$$

$$[\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}')] = [\hat{\chi}'(\eta, \mathbf{x}), \hat{\chi}'(\eta, \mathbf{x}')] = 0 \quad (42b)$$

El operador hamiltoniano resulta ser

$$\hat{H}(\eta) = \int d^3x \frac{1}{2} [\hat{\chi}'^2(\eta, \mathbf{x}) + |\nabla \hat{\chi}(\eta, \mathbf{x})|^2 + m_{\text{eff}}^2(\eta) \hat{\chi}^2(\eta, \mathbf{x})], \quad (43)$$

y la evolución de los operadores de campo se puede extraer desde las ecuaciones de Heisenberg. Dada la equivalencia de forma entre el hamiltoniano (43) y el del campo libre en el espacio plano, (11), podemos trasladar directamente algunos resultados de ese caso al que estamos analizando aquí; en particular la ecuación que cumple el operador $\hat{\chi}$ resulta ser también la del campo χ , es decir

$$[\square + m_{\text{eff}}^2(\eta)]\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}) = 0.$$

4.3.2. Expansión de los operadores de campo

Si realizamos una expansión de Fourier del campo,

$$\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3p N_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \hat{\chi}_{\mathbf{p}}(\eta) \quad (44)$$

y la introducimos en (37) seremos conducidos a las ecuaciones de movimiento (desacopladas) de los modos $\hat{\chi}_{\mathbf{p}}(\eta)$,

$$\hat{\chi}_{\mathbf{p}}'' + \omega_{\mathbf{p}}^2(\eta) \hat{\chi}_{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{donde} \quad \omega_{\mathbf{p}}^2(\eta) = |\mathbf{p}|^2 + m_{\text{eff}}^2(\eta). \quad (45)$$

Es decir que cada modo es un oscilador armónico de frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}(\eta)$, es decir dependiente del tiempo, en contraste a los modos del operador de campo en el espacio de Minkowski donde las frecuencias eran constantes. La ecuación (45) tiene soluciones formales del tipo WKB¹⁰

$$\chi_p = (2S_p)^{1/2} e^{[-i \int_{\eta_0}^{\eta} S_p(\eta') d\eta']}$$

donde los S_p satisfacen la ecuación no lineal

$$S_p^2(\eta) = \omega_p^2(\eta) - \frac{1}{2} \left(\frac{S_p''}{S_p} - \frac{3S_p'^2}{2S_p^2} \right).$$

¹⁰Obtenidas por el método de Wentzel-Kramers-Brillouin para hallar soluciones aproximadas de PDE's. En particular para esta ecuación (45) puede verse un enfoque iterativo en [11].

No obstante, no nos interesará dicha solución sino que consideraremos una solución general de (45), que puede escribirse del siguiente modo

$$\hat{\chi}_{\mathbf{p}} = \hat{A}_{\mathbf{p}} X_{\mathbf{p}}(\eta) + \hat{B}_{\mathbf{p}} Y_{\mathbf{p}}(\eta) \quad (46)$$

donde $X_{\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}}$ son dos soluciones cualquiera de (45) que sean linealmente independientes entre sí y $\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{B}_{\mathbf{p}}$ son los coeficientes constantes. El Wronskiano W de estas soluciones cumplirá¹¹

$$W[X_{\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}}] \equiv X'_{\mathbf{p}} Y_{\mathbf{p}} - X_{\mathbf{p}} Y'_{\mathbf{p}} \neq 0.$$

Notemos que todos los modos $\hat{\chi}_{\mathbf{p}}(\eta)$ con igual $|\mathbf{p}| = p$ son soluciones complejas de la misma ecuación (45) puesto que la frecuencia $\omega_{\mathbf{p}}$ depende solamente de p (podemos escribir entonces ω_p). Por ello en la expansión de un modo $\hat{\chi}_{\mathbf{p}}$ según (46) las funciones $\{X_{\mathbf{p}}\}$ en términos de las cuales expandiremos no necesitan tener un índice vectorial \mathbf{p} sino que basta con uno escalar p . El carácter vectorial del índice permanece en los operadores \hat{A}, \hat{B} . Los modos $\{X_p\}$ son isótropos.

Si $\{X_p(\eta), Y_p(\eta)\}$ forman una base de soluciones es conveniente definir la función compleja

$$v_p(\eta) \equiv X_p(\eta) + iY_p(\eta) \quad (47)$$

que también es solución de (45). Asimismo v_p^* resulta solución y además como $\{v_p, v_p^*\}$ son linealmente independientes constituyen una base de soluciones complejas de la ecuación (45). Eligiendo una cierta función $v_p(\eta)$ la solución general $\hat{\chi}_{\mathbf{p}}$ puede expresarse como combinación lineal de la base

$$\hat{\chi}_{\mathbf{p}}(\eta) = \hat{A}_{\mathbf{p}} v_p^*(\eta) + \hat{B}_{\mathbf{p}} v_p(\eta) \quad (48)$$

donde $\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{B}_{\mathbf{p}}$ son los coeficientes que dependen del valor de \mathbf{p} pero no de η . Dado que el campo $\hat{\chi}$ debe ser hermítico obtenemos que $\hat{B}_{\mathbf{p}} = \hat{A}_{-\mathbf{p}}^\dagger$. Con esta información podemos entrar en (44) para obtener

$$\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3p N_p [\hat{A}_{\mathbf{p}} v_p^*(\eta) + \hat{A}_{-\mathbf{p}}^\dagger v_p(\eta)] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

y tras un cambio de variable de integración

$$\hat{\chi}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3p N_p [\hat{A}_{\mathbf{p}} v_p^*(\eta) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{A}_{\mathbf{p}}^\dagger v_p(\eta) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (49)$$

Hemos expresado el operador de campos $\hat{\chi}$ en función de los modos v_p, v_p^* que también obedecen las ecuaciones (45), es decir que verifican

$$v_p'' + \omega_p^2(\eta) v_p = 0 \quad \text{donde} \quad \omega_p^2(\eta) = |\mathbf{p}|^2 + m_{\text{eff}}^2(\eta).$$

Si introducimos la expresión (49) y su derivada $\hat{\chi}'$ en las relaciones de conmutación (42) podemos obtener las relaciones de conmutación para los operadores $\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{A}_{\mathbf{p}}^\dagger$ que resultan ser las usuales para operadores de creación y destrucción, esto es,

$$[\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{A}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad [\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{A}_{\mathbf{p}'}] = [\hat{A}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{A}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0$$

¹¹La idea es que una ecuación de segundo orden como lo es (45) tiene un espacio de soluciones de dimensión dos. Luego cualquier par de soluciones linealmente independientes entre sí será base de dicho espacio. El requerimiento sobre el wronskiano W asegura dicha condición.

si es que tuvimos la precaución de normalizar los modos v_p de acuerdo a

$$\Im(v'_p v_p^*) = \frac{1}{2i} W[v_p, v_p^*] = 1$$

donde \Im denota la operación de tomar parte imaginaria. Esta normalización siempre puede ser hecha (ver [6]).

Los coeficientes \hat{A}_p pueden expresarse en función de $v_p, \hat{\chi}_p$ de manera inmediata.

$$\hat{A}_p = \sqrt{2} \frac{v'_p \hat{\chi}_p - v_p \hat{\chi}'_p}{v'_p v_p^* - v_p v_p'^*} = \sqrt{2} \frac{W[v_p, \hat{\chi}_p]}{W[v_p, v_p^*]}, \quad \hat{A}_p^\dagger = (\hat{A}_p)^\dagger \quad (50)$$

Digamos, de paso, que el wronskiano de dos soluciones de la misma ecuación es independiente del tiempo, lo que asegura que estos coeficientes \hat{A}_p no dependan de η ¹².

4.3.3. Interpretación de las partículas

Una vez que hemos determinado e identificado los operadores $\hat{A}_p, \hat{A}_p^\dagger$ como los operadores de aniquilación y creación de esta teoría, el estado de vacío $|\mathbf{0}_A\rangle$ de la misma es definido como el autoestado de todos los operadores de aniquilación con autovalor 0, es decir cumpliendo

$$\hat{A}_p |\mathbf{0}_A\rangle = 0 \quad \forall p$$

De manera correspondiente un estado excitado $|m_{p_1}, m_{p_2}, \dots\rangle$ será construido mediante la aplicación de sucesivos operadores de creación sobre el vacío,

$$|m_{p_1}, m_{p_2}, \dots\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{m_{p_1}! m_{p_2}! \dots}} \left[(\hat{A}_{p_1}^\dagger)^{m_{p_1}} (\hat{A}_{p_2}^\dagger)^{m_{p_2}} \dots \right] |\mathbf{0}_A\rangle$$

definiendo el espacio de Fock de nuestra teoría en un espacio curvo de tal forma que un estado arbitrario $|\Psi\rangle$ será una combinación lineal de estos estados

$$|\Psi\rangle = \sum_{m_{p_1}, m_{p_2}, \dots} C_{m_{p_1} m_{p_2} \dots} |m_{p_1}, m_{p_2}, \dots\rangle.$$

Hasta aquí todo parecería en completo acuerdo con lo que fue realizado para la cuantización del campo escalar en el espaciotiempo de Minkowski, solamente que en este caso las funciones $v_p(\eta)$ no tienen una expresión sencilla como lo eran las exponenciales complejas $e^{\pm i\omega t}$. No obstante el haber tenido que considerar *diferentes* conjuntos de funciones para la solución de la ecuación (45) llevó a mostrar explícitamente, (50), que la expresión de los operadores \hat{A}_p depende justamente de qué conjunto de funciones v_p utilicemos.

Como la definición del vacío, y por ende toda la construcción del espacio de Fock depende de quiénes sean los operadores \hat{A}_p claramente interesaría ver que todos los posibles conjuntos $\{v_p, v_p^*\}$ llevan al mismo $|\mathbf{0}\rangle$ o bien que si esto no sucede al menos existe un vacío con status especial que podamos identificar con el vacío físico (la ausencia de partículas). Para ello sin embargo necesitamos analizar ciertos aspectos de la ecuación de Klein-Gordon, que serán objeto de la próxima sección.

¹²Pese a que en (50) estamos considerando un wronskiano de una función con un operador ($W[v_p, \hat{\chi}_p]$) ambos satisfacen la misma ecuación diferencial (45).

4.4. La ecuación de Klein-Gordon

4.4.1. Expansión de una solución en una base

Siendo f y g dos soluciones complejas de la ecuación de Klein-Gordon (33) es posible definir un producto escalar¹³ del siguiente modo

$$\langle f, g \rangle \equiv -i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} f^{*}(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} g(\mathbf{x}, t) \quad (51)$$

donde $d\Sigma^{\mu} = d\Sigma n^{\mu}$, con $d\Sigma$ siendo el elemento de volumen en una dada 3-superficie Σ tipo espacial y n^{μ} un versor normal a $d\Sigma$ tipo tiempo. El producto escalar (51) cumple las siguientes relaciones

$$(\langle f, g \rangle)^{*} = -\langle f^{*}, g^{*} \rangle = \langle g, f \rangle \quad \langle f, f^{*} \rangle = 0,$$

de las cuales vemos que no está definido positivamente. El valor de este producto escalar es independiente de la 3-superficie considerada, es decir que

$$\langle f, g \rangle_{\Sigma_1} = \langle f, g \rangle_{\Sigma_2},$$

y además, ver [5], se conserva

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle = 0.$$

En el espaciotiempo de Minkowski este producto escalar (51) se reduce a

$$\langle f, g \rangle = -i \int d^3x \left[f^{*}(\mathbf{x}, t) \partial_0 [g(\mathbf{x}, t)] - \partial_0 [f^{*}(\mathbf{x}, t)] g(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (52)$$

Si una solución f tiene norma positiva, es decir si $\langle f, f \rangle > 0$, se tendrá que f^{*} es una solución con norma negativa, pues deducimos inmediatamente en ese caso que $\langle f^{*}, f^{*} \rangle < 0$.

Sea ahora un conjunto completo $\{f_i\}$ de soluciones de norma positiva de (33), ortonormales respecto del producto escalar (51): es decir que satisfacen

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta(i, j) \quad \langle f_i^{*}, f_j^{*} \rangle = -\delta(i, j) \quad \langle f_i, f_j^{*} \rangle = 0. \quad (53)$$

Los índices i, j representan en forma esquemática el conjunto de cantidades necesarias para etiquetar los modos. Ahora podemos expandir¹⁴ un operador de campo ϕ que verifique (33) en términos de esa base

$$\widehat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^{\dagger} f_i^{*})$$

y ver que el operador de aniquilación asociado a f_i resulta

$$\hat{a}_i = \langle f_i, \widehat{\phi} \rangle. \quad (54)$$

Utilizando la completitud de las funciones $\{f_i\}$ y las relaciones canónicas de conmutación entre los campos, podemos ver que los operadores $\{\hat{a}_j, \hat{a}_j^{\dagger}\}$ satisfacen las relaciones usuales de conmutación para operadores de aniquilación y destrucción,

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}] = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta(i, j).$$

¹³Se suele llamar el producto escalar de Klein-Gordon.

¹⁴Consideramos una discretización de los modos de manera que la expansión resulta una suma.

Podemos entonces definir el espacio de Hilbert \mathcal{H} de la teoría como el espacio de Fock construido desde el estado de vacío $|\mathbf{0}\rangle$ que verifica

$$\hat{a}_j |\mathbf{0}\rangle = 0 \quad \forall j, \quad \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 1$$

Los vectores $|\mathbf{0}\rangle, \hat{a}_j^\dagger |\mathbf{0}\rangle, \dots$ forman una base del espacio \mathcal{H} .

4.4.2. Transformaciones de Bogolyubov

Supongamos ahora que $\{g_i\}$ conforma un segundo conjunto completo ortonormal de soluciones. De manera análoga podemos también expandir los operadores de campo en términos de esta base

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*)$$

Esta descomposición define entonces un nuevo estado de vacío dado por $\hat{b}_j |\mathbf{0}\rangle = 0 \quad \forall j$, y por ende otro espacio de Fock.

Expandiendo un conjunto en términos del otro, ambos son base, resultan

$$g_j = \sum_i \alpha_{ji} f_i + \beta_{ji} f_i^* \quad f_i = \sum_j \gamma_{ij} g_j + \delta_{ij} g_j^*,$$

expresiones que pueden relacionarse introduciendo una en la otra, para extraer que

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ji}^* \quad \delta_{ij} = -\beta_{ji},$$

lo cual lleva a

$$g_j = \sum_i \alpha_{ji} f_i + \beta_{ji} f_i^* \quad f_i = \sum_j \alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*. \quad (55)$$

Estas ecuaciones, (55), son las llamadas *transformaciones de Bogolyubov*. Las matrices α, β son los coeficientes de Bogolyubov y se pueden evaluar con las propiedades de ortonormalidad de las funciones $\{f_i\}, \{g_i\}$ y las (55) para obtener

$$\alpha_{ij} = \langle g_i, f_j \rangle$$

$$\beta_{ij} = -\langle g_i, f_j^* \rangle$$

Los operadores de aniquilación asociados a un conjunto de funciones se pueden expresar en términos de los operadores de aniquilación y creación asociados al otro conjunto

$$\hat{a}_i = \sum_j \alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger \quad (56)$$

$$\hat{b}_j = \sum_i \alpha_{ji}^* \hat{a}_i - \beta_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger$$

y puede constatarse que los coeficientes de Bogolyubov satisfacen la siguiente relación matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & -\beta^t \\ -\beta^\dagger & \alpha^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la t denota trasposición.

Claramente vemos, desde (56), que el espacio de Fock construido según la elección del conjunto $\{f_i\}$ y sus operadores \hat{a}_i es diferente del que construiríamos a partir del conjunto $\{g_i\}$ (con operadores \hat{b}_i) siempre que $\beta_{ji} \neq 0$. Así, por ejemplo, si consideramos el vacío $|\mathbf{0}_b\rangle$ (definido como el $\hat{b}_j |\mathbf{0}\rangle = 0 \forall j$), entonces

$$\begin{aligned}\hat{a}_i |\mathbf{0}_b\rangle &= \sum_j \alpha_{ji} \hat{b}_j |\mathbf{0}_b\rangle + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger |\mathbf{0}_b\rangle \\ \hat{a}_i |\mathbf{0}_b\rangle &= \sum_j \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger |\mathbf{0}_b\rangle \\ \hat{a}_i |\mathbf{0}_b\rangle &= \sum_j \beta_{ji}^* |\dots, 1_j, \dots\rangle \neq 0\end{aligned}$$

y asimismo, el valor de expectación de $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ respecto del estado $|\mathbf{0}_b\rangle$ es

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{0}_b | \hat{n}_i | \mathbf{0}_b \rangle &= \langle \mathbf{0}_b | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \mathbf{0}_b \rangle \\ &= \langle \mathbf{0}_b | \hat{a}_i^\dagger \sum_j \beta_{ji}^* |1_j\rangle \\ &= \langle 1_k | \left(\sum_k \beta_{ki} \right) \left(\sum_j \beta_{ji}^* |1_j\rangle \right) \\ &= \sum_{kj} \beta_{ki} \beta_{ji}^* \delta_{kj} \\ \langle \mathbf{0}_b | \hat{n}_i | \mathbf{0}_b \rangle &= \sum_j |\beta_{ji}|^2,\end{aligned}$$

lo cual viene a significar que el vacío de los modos $\{g_l\}$ contiene $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas en el modo i -ésimo del conjunto $\{f_i\}$. A menos que los coeficientes β_{ij} sean nulos esto significa que los vacíos no coinciden lo cual es una característica indeseable de la teoría. Dado que los estados de partículas son generados a partir de los operadores de creación actuando sobre el vacío, la dependencia de éste último sobre la elección de los modos haría que la interpretación en términos de partículas dependa a su vez de qué conjunto de modos tomemos. Si la noción de partículas tiene sentido físico debe existir, esperamos, un estado de vacío preferencial para la teoría que pueda considerarse el vacío correcto.

4.4.3. Soluciones de frecuencia positiva y negativa

No obstante esta ambigüedad, en la sección 3 hemos cuantizado la teoría de un campo escalar ϕ que verifica la ecuación de Klein-Gordon y llegamos hasta la descomposición del mismo en operadores de creación y destrucción que asociamos, de manera ligera, con las partículas de la teoría. En ese caso los modos del campo (el conjunto de funciones $\{f_i\}$) resultaron ser las ondas planas de la forma

$$u_p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (57)$$

las cuales forman un conjunto completo ortonormal respecto del producto escalar (52). ¿Qué es lo que convierte a las u_p de (57) en el conjunto de modos correcto? La respuesta está relacionada con la naturaleza del espaciotiempo de Minkowski en el cual realizamos la cuantización.

En la expansión de un operador de campo escalar real cuántico

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*)$$

hemos remarcado que asociamos la función f_i , solución de la ecuación de Klein-Gordon con norma positiva, al operador de aniquilación \hat{a}_i y, consecuentemente la solución de norma negativa f_i^* al operador de creación \hat{a}_i^\dagger . Dado que el producto escalar de Klein-Gordon se conserva, si consideramos un conjunto de norma positiva podemos comprobar desde las propiedades (53) que su ortogonalidad con otro de norma negativa también se conserva.

Por otro lado, utilizando la definición del campo conjugado π junto con las relaciones canónicas de conmutación entre los operadores de campo y campo conjugado se deduce que

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \langle f_i, f_j \rangle, \quad (58)$$

valiendo también la deducción inversa (es decir que si valen (58) tendremos las relaciones de conmutación usuales entre los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$). Usando la hermiticidad de $\hat{\phi}$ y la definición del operador de aniquilación (54) podemos expresar el operador de creación como

$$\hat{a}^\dagger = -\langle f_i^*, \hat{\phi} \rangle$$

y de esa manera arribar a las otras relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = -\langle f_i, f_j^* \rangle \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = -\langle f_i^*, f_j \rangle.$$

La construcción de un espacio de Hilbert para la teoría puede hacerse, ver detalles en [13] y [14], hallando una descomposición del espacio de soluciones de Klein-Gordon en una suma directa de un subespacio \mathcal{S}_p de funciones de norma positiva y su complejo conjugado \mathcal{S}_p^* , con funciones de norma negativa, de manera que todos los productos escalares entre funciones de uno y otro espacio sean nulos. Es decir hallar una descomposición

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_p \oplus \mathcal{S}_p^*$$

que verifique

$$\langle h_i, h_i \rangle > 0 \quad \forall h_i \in \mathcal{S}_p \quad \text{y} \quad \langle h_i, h_j^* \rangle = 0 \quad \forall h_i, h_j \in \mathcal{S}_p$$

Esto nos permitirá construir de manera consistente el estado de vacío de la teoría y los consiguientes estados excitados. Con esto último queremos decir que si utilizamos, para expandir los operadores de campo, dos conjuntos base $\{f_i\}$ y $\{g_i\}$ que verifican este tipo de descomposición los vacíos que obtendremos serán equivalentes.

Volviendo a los coeficientes de Bogolyubov notemos que si f_i son modos de norma positiva y g_i es una combinación lineal de f_i solamente (no de f_i^*), de manera que sólo contiene modos de norma positiva, los estados de vacío en función de los operadores \hat{a} y \hat{b} coinciden. El coeficiente β_{ij} será nulo cada vez que pueda lograrse entre los dos conjuntos de modos

una descomposición del tipo suma directa, donde las normas positivas son ortonormales a las negativas.

Con esto podemos aceptar que una construcción correcta de la teoría requiere una descomposición del espacio de soluciones del tipo mencionado. No obstante aún debemos establecer porqué nos quedamos con la construcción basada en (57) en la cuantización canónica realizada en la sección 3.

En el espaciotiempo de Minkowski podemos hallar una tal descomposición en términos de las soluciones de *frecuencia positiva* y *frecuencia negativa* respecto de la simetría de traslación temporal del mismo. Esta terminología tiene su origen [6] en la antigua interpretación de la QFT como una teoría de funciones de onda cuantizadas (la “segunda cuantización”) bajo cuyo enfoque se pensaba al campo clásico ϕ como una función de onda y la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = E \phi$$

se interpretaba como teniendo soluciones de frecuencia (energía) positiva si $E > 0$ y de frecuencia (energía) negativa en caso contrario. Desde ahí vemos que $e^{-i\omega t}$ representa una solución de frecuencia positiva.

Las ondas planas (57) forman una base de soluciones de (13) con norma y frecuencia positiva. Además estas funciones $\{u_p\}$ son invariantes relativistas, lo cual queda explícito cuando escribimos (57) en forma covariante como

$$f_p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} e^{-i[\eta^{\mu\nu} k_\nu x_\mu]},$$

donde el argumento de la exponencial es un escalar de Lorentz. Es decir que en el espaciotiempo de Minkowski el concepto de frecuencia positiva tiene un significado que es el mismo para todos los observadores inerciales. Esta es la característica que convierte al vacío definido por el conjunto $\{u_p\}$ en el *preferencial*.

Digamos entonces que la característica especial del espaciotiempo de Minkowski no es que exista un único vacío, sino que el vacío definido en términos de los modos $\{u_p\}$ es el estado de vacío de todos los dispositivos de detección inerciales. Esto se debe a que el vacío definido a través de los operadores de aniquilación \hat{a}_p asociados a las funciones u_p es invariante bajo el grupo de transformaciones del espaciotiempo de Minkowski, el grupo de Poincaré.

En contraste, para un espaciotiempo curvo no se puede, en general, lograr una descomposición de este tipo en modos de frecuencia positiva y negativa sencillamente porque las nociones de frecuencia positiva y negativa no tienen un significado invariante (ver [18], [19]). Para que estas nociones tengan sentido la geometría debe ser estacionaria¹⁵, o dicho de un modo más técnico el espaciotiempo debe admitir un vector de Killing¹⁶ global tipo tiempo ([12]).

Este esquema de selección de funciones $\{u_p\}$ con frecuencia positiva lleva a que el vacío del espacio de Fock $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ para todo i sea también el *ground state* del hamiltoniano de la teoría¹⁷.

¹⁵Un espaciotiempo *estacionario* es aquel para el que existe un sistema de coordenadas tal que la métrica $g^{\mu\nu}$ resulta ser independiente del tiempo.

¹⁶Los vectores de Killing permiten describir, de un modo independiente de las coordenadas, las simetrías geométricas del espaciotiempo.

¹⁷Una demostración por analogía de este hecho puede visualizarse en [14], donde la analogía se construye con

4.5. Creación de partículas por un campo gravitacional

Hemos dicho con anterioridad que la cuantización del campo escalar en este espaciotiempo curvo permitía la creación de partículas ya que la \mathcal{L} dependía explícitamente del tiempo η (ver (41)). No obstante no se ha mostrado cómo se manifiesta esta creación.

Consideraremos ahora, en el marco de la teoría desarrollada para el modelo de FRW, un ejemplo muy sencillo de creación de partículas por expansión cosmológica. Sea un espaciotiempo que es asintóticamente plano en el pasado y en el futuro, pero que es curvo en la región intermedia. Es decir que tenemos

$$a = \begin{cases} a_0 & \text{si } \eta < -T \\ a(\eta) & \text{si } -T < \eta < +T \\ a_1 & \text{si } \eta > +T \end{cases}$$

donde en la región intermedia $(-T, T)$ el factor conforme $a(\eta)$ se incrementa de manera

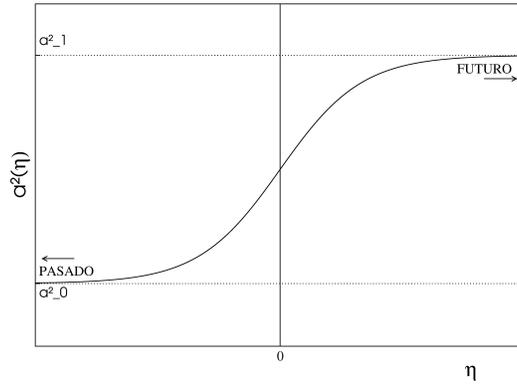


Figura 2: Gráfica cualitativa de la evolución temporal del factor de escala $a(\eta)^2$ representando un universo asintóticamente estático que experimenta un período de suave expansión.

suave (ver figura 2). El universo es estático en el pasado y en el futuro asintóticos de manera que en esas regiones podemos definir un vacío preferido que es el del espaciotiempo de Minkowski. Si nuestro conjunto de modos base es $\{v_p\}$ deben valer en los extremos de nuestra evolución

$$v_p(\eta) \longrightarrow v_p^{pas}(\eta) = \frac{\exp(-i\omega_p^{pas}\eta)}{\sqrt{2\omega_p^{pas}}} \quad \eta \lll -T \quad (59)$$

$$v_p(\eta) \longrightarrow v_p^{fut}(\eta) = \frac{\exp(-i\omega_p^{fut}\eta)}{\sqrt{2\omega_p^{fut}}} \quad \eta \ggg +T \quad (60)$$

el oscilador armónico cuántico unidimensional. En tal caso, si queremos resolver $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ expresando la solución en términos de $f(t)$, es decir $x(t) = af(t) + a^\dagger f^*(t)$, cuando llegamos a la expresión del hamiltoniano en términos de f queriendo establecer una condición para que $H|0\rangle = 0$ (que el vacío sea el ground state) surge la necesidad de que $\dot{f} = \pm i\omega f$, teniendo que seleccionar el signo $-$ para verificar las relaciones de conmutación.

donde las frecuencias resultan ser

$$\omega_p^{pas} = \sqrt{p^2 + [m^2 + (\xi - 1/6)R]a_0^2} \quad \omega_p^{fut} = \sqrt{p^2 + [m^2 + (\xi - 1/6)R]a_1^2}$$

Claramente los modos v_p^{pas} y v_p^{fut} no son iguales y tendremos una transformación de Bogolyubov que los vinculará

$$v_p^{fut} = \sum_{p'} \alpha_{pp'} v_{p'}^{pas} + \beta_{pp'} v_{p'}^{*pas}.$$

Dada la homogeneidad espacial en nuestro ejemplo ambos conjuntos de modos permanecen como ondas planas espaciales, es decir $\propto \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$, a través de toda la evolución pero con modificación en su dependencia temporal. Los productos escalares $\langle v_p^{pas}, v_{p'}^{fut} \rangle$ y $\langle v_p^{pas}, v_{p'}^{*fut} \rangle$ serán proporcionales a funciones delta de Dirac $\delta_{pp'}$ (ver detalles en [11]). De esta forma la transformación de Bogolyubov será diagonal¹⁸,

$$v_p^{fut} = \alpha_p v_p^{pas} + \beta_p v_p^{*pas}.$$

Sabemos de la sección 4.4.2 que los conjuntos $\{v_p^{pas}\}$, $\{v_p^{fut}\}$ definirán vacíos no equivalentes si alguno de los coeficientes β_p es no nulo. Suponiendo que el campo estaba en un estado de vacío $|\mathbf{0}^{pas}\rangle$ con respecto a los modos v_p^{pas} en el pasado remoto ($\eta \ll -T$), en el futuro lejano ($\eta \gg +T$) también se hallará en el estado de vacío $|\mathbf{0}^{pas}\rangle$ (si trabajamos con la picture de Heisenberg) pero en este caso los observadores inerciales no podrán considerar que este vacío sea el vacío “físico”, ya que esta propiedad le está reservada matemáticamente al estado $|\mathbf{0}^{fut}\rangle$ definido en términos del conjunto v_p^{fut} . Dichos observadores registrarán la presencia de $|\beta_p|^2$ cuantos en el modo p -ésimo.

Interpretamos entonces $|\beta_p|^2$ como el número de cuantos creados en el modo p por la expansión cosmológica. Por supuesto estas cantidades sólo pueden evaluarse cuando la misma ha cesado y por ende también ha cesado la producción de partículas que realiza el campo. En la región intermedia ($-T, +T$) no tenemos manera de seleccionar un vacío preferido y por ende el concepto de número de partículas no tiene sentido allí.

4.6. El vacío

4.6.1. Elección del estado de vacío. Vacíos instantáneos y adiabáticos

Varios subsecuentes refinamientos en la selección del estado de vacío y la definición de un concepto de partículas para espaciotiempos curvos han sido propuestos. Algunos de ellos se expresan en términos de la diagonalización de un operador hamiltoniano instantáneo.

Dado que en general el hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, como en nuestro ejemplo de expansión cosmológica (43), una posible prescripción para el estado de vacío es seleccionar un momento de tiempo particular, digamos η_0 y definir un vacío $|\mathbf{0}_{\eta_0}\rangle$ como el autoestado de energía más baja del hamiltoniano *instantáneo* $\hat{H}(\eta_0)$. Para obtener las funciones que corresponden a nuestro vacío $|\mathbf{0}_{\eta_0}\rangle$ calculamos primeramente el valor de expectación $\langle \mathbf{0}_v | \hat{H}(\eta_0) | \mathbf{0}_v \rangle$ en un estado de vacío $|\mathbf{0}_v\rangle$ determinado por un conjunto de funciones $v_i(\eta)$ arbitrarias. Luego minimizamos el valor de expectación con respecto a todas las elecciones

¹⁸Una transformación diagonal operará en cada modo independientemente mezclando su operador de creación con el de aniquilación pero no vinculando diferentes modos v_p y $v_{p'}$.

posibles de $v_i(\eta)$. Esto resulta equivalente a buscar el autovector de \hat{H} con el autovalor más bajo.

Este procedimiento determina las condiciones iniciales

$$v_i(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_i(\eta_0)}} \quad v_i'(\eta_0) = i\omega_i v_i(\eta_0) \quad (61)$$

que cumplirán los modos seleccionados definiendo también un cierto conjunto de operadores \hat{a}_i y el correspondiente estado de vacío $|\mathbf{0}_v\rangle$. Este estado se llama el *vacío de diagonalización instantánea*. Para un campo escalar en el espaciotiempo de Minkowski las condiciones (61) conducen directamente a las funciones $v_i(\eta) = \omega_i^{-1/2} \exp(i\omega_i\eta)$ que llevan a un mismo estado de vacío para todo tiempo porque las frecuencias ω_i no dependen de η . Sin embargo, sabemos que en el caso de nuestra métrica de FRW las frecuencias ω_i no son constantes y dependen del tiempo η de manera que las funciones seleccionadas por las condiciones (61) impuestas en un η_0 dado diferirán en general de las que seleccionaríamos en otro η_1 . De hecho, para el hamiltoniano (43) no hay estados que permanezcan autoestados instantáneos del hamiltoniano para todo tiempo (ver [6]). En otras palabras para un espaciotiempo de FRW general el estado de vacío $|\mathbf{0}_{\eta_0}\rangle$ es normalmente un estado excitado en otro instante de tiempo η_1 (esto es, un estado con partículas respecto del vacío a η_0).

Esto no parece problemático porque en una métrica dependiente del tiempo como la de nuestro modelo cosmológico en expansión esperaríamos producción de partículas. No obstante en algunos espaciotiempos anisótropos la densidad total de esas partículas creadas es infinita incluso cuando la geometría cambia lentamente y el intervalo (η_0, η_1) es pequeño (ver [21]). De esta forma estados de partícula definidos a través del vacío $|\mathbf{0}_\eta\rangle$ pueden no ser una descripción adecuada de las partículas físicas al tiempo η . Esto motiva otra prescripción para el vacío que no exhibe este problema de la infinitud en el número de partículas.

Esta otra prescripción es la llamada *vacío adiabático* la cual requiere que $\omega_i(\eta)$ sea una función que varíe de forma muy lenta en algún intervalo de η (este será el régimen adiabático de ω_i). Asumiendo que $\omega_i^2(\eta) > 0$ dentro de este régimen, la aproximación WKB para los modos tiene soluciones aproximadas v_i^{APP} y podemos establecer un vacío adiabático $|\mathbf{0}_{\eta_0}^{AD}\rangle$ requiriendo que la función $v_i(\eta)$ y su derivada $v_i'(\eta)$ sean iguales a los valores de v_i^{APP} y de su derivada $v_i'^{APP}$ en η_0 . No proseguiremos en esta dirección aquí pero diremos que pueden consultarse implementaciones de este esquema en [11], [13] y [20].

4.6.2. No unicidad del vacío

Una primera conclusión de todo este asunto es que no existe una prescripción preferida para el estado de vacío en un espaciotiempo curvo general. Aún de existir un estado de vacío definido no es posible postular que ese estado es el “correcto” (en el sentido de corresponder a una experiencia en la cual no se registran partículas). Es necesario también especificar los detalles del proceso de medición utilizado para detectar la presencia de los cuantos del campo. En particular, el estado de movimiento de dicho dispositivo puede afectar el registro de partículas.

En el espacio tiempo de Minkowski un observador acelerado detectaría partículas generadas por un campo que se halle en un estado de vacío de acuerdo a un observador inercial. Esto es el llamado *efecto Unruh*. En [22] se muestra que un observador uniformemente acelerado

“siente” un espectro térmico de partículas a temperatura $T = a/2\pi$ donde a es la aceleración del observador en cuestión. La consecuencia de este trabajo es que el concepto de partículas (en un sentido operacional de “estados del campo que hacen a un detector registrar”) no es un concepto fundamental ni mucho menos unívocamente definido en la teoría de campos cuántica. En la sección 5.1 veremos esquemáticamente cómo surge esta identificación del espectro de partículas a dicha temperatura.

Por otro lado podemos llegar también a mostrar explícitamente la no unicidad del vacío para el espaciotiempo de Minkowski considerando un sistema coordinado no cartesiano. En dos dimensiones podemos realizar una transformación de coordenadas que lleva el plano (x, t) a un único cuadrante tal que $x > |t|$. Estas son las coordenadas de Rindler (ver [23]). Puede verse, [18], que las partículas que surgen de la cuantización canónica de un campo escalar real libre en este espacio de Rindler no pueden identificarse con las partículas descritas por la métrica usual de Minkowski 2D; es decir que los estados de vacío son inequivalentes.

La no unicidad en la definición de un estado de vacío no es, entonces, patrimonio exclusivo de los espaciotiempos curvos. El problema central no es en realidad tener una multitud de estados de vacío inequivalentes sino que no podemos determinar uno de ellos que sea claramente, en base a alguna propiedad distintiva, el “preferido”. Sólo en casos particulares (como en el espaciotiempo de Minkowski bajo las coordenadas cartesianas) logramos una tal definición.

Como anticipáramos en la introducción a comienzos de la década del 80 fue entendido que los objetos fundamentales de la teoría no son las partículas sino los campos (parafraseando a R. Wald, [3], diríamos que como su nombre lo sugiere QFT es *la* teoría cuántica de campos, no de partículas) de manera que una teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo debería formularse de un modo que no requiriese las expansiones en términos de operadores de creación y destrucción asociados a modos con determinadas frecuencias.

Un tal enfoque es el *algebraico*. El punto de partida de esta construcción es la especificación de un algebra de observables de campo sujetos a relaciones de conmutación

$$[\phi(f), \phi(g)] = -i\Delta(f, g)I,$$

donde $\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$ denota la resta entre las funciones de Green avanzada y retardada, I un elemento unitario y f, g son funciones de prueba en el espaciotiempo en cuestión. La idea es que no tiene sentido, matemáticamente, el valor del campo en un único punto sino el valor del campo promediado de acuerdo a una función de prueba f sobre un cierto volumen, i.e.

$$\phi(f) = \int d^4x \sqrt{-g} \phi(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t).$$

Podemos encontrar un resumen del enfoque algebraico en [24] y en [25].

5. Efecto Unruh, radiación de Hawking y principio de equivalencia

En esta sección consideraremos esquemática y cualitativamente dos efectos muy importantes en el desarrollo de la teoría cuántica de campos en los espacios curvos. Estos fenómenos están asociados a la creación de partículas; uno refiere a la detección de partículas por parte

de un observador acelerado en un espaciotiempo plano (efecto Unruh, ver [22]) y el otro a la creación de partículas debida a la propagación del campo cuántico a través de un objeto colapsado que curva el espaciotiempo. Para reducir las complejidades matemáticas al mínimo y concentrarnos en la fenomenología consideraremos los casos más sencillos.

5.1. El efecto Unruh

Supongamos un observador moviéndose con aceleración constante en su propio sistema de referencia (aceleración propia) dentro de un espaciotiempo de Minkowski 2-dimensional (t, x) ¹⁹. La línea de mundo de un tal observador resulta ser una hipérbola

$$x^2 - t^2 = \alpha^2, \quad (62)$$

donde la aceleración propia sería $1/\alpha$. Además del sistema inercial de Minkowski (t, x) nos interesará definir el sistema de referencia acelerado que se mueve con el observador y desde el cual éste hace sus mediciones. Podemos llegar de uno a otro haciendo una transformación de las coordenadas cartesianas (t, x) a unas nuevas coordenadas (η, ξ) de acuerdo a

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad (63)$$

de manera que el elemento de línea de Minkowski se escribe ahora

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2). \quad (64)$$

El pasaje de coordenadas entre los dos sistemas restringe el espacio accesible a un cuadrante del espacio de Minkowski dado por la condición $x > |t|$ (ver figura 3). Líneas de η constante son rectas pues $t \propto x$ y líneas de ξ constante son hipérbolas, pues se tiene

$$x^2 - t^2 = a^{-2} e^{2a\xi} = cte,$$

y podemos ver, comparando con (62) que corresponden a líneas de mundo de observadores uniformemente acelerados con aceleración propia $ae^{-a\xi}$. A medida que la línea de ξ se aproxima al origen $x = t = 0$ la aceleración es mayor y todas las hipérbolas son asintóticas a los rayos nulos $x = |t|$ lo que significa que los observadores acelerados se acercan a la velocidad de la luz cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$. El tiempo propio τ de uno de esos observadores está relacionado con (η, ξ) de acuerdo a

$$\tau = e^{a\xi} \eta.$$

Digamos también que ξ es la distancia propia conforme. Estas coordenadas (η, ξ) se conocen como el sistema de coordenadas de Rindler (ver [11]). Enfatizamos que la geometría del espaciotiempo sigue siendo la de Minkowski (es decir que no es curvo) pero nos hemos situado en un sistema acelerado. Según vemos en (64) la métrica es conforme a Minkowski.

En el caso de un campo escalar real libre sin masa en 1+1 dimensiones para estas coordenadas de Rindler la acción resulta

$$S[\phi, \partial_\rho \phi] = \frac{1}{2} \int d\eta d\xi \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (65)$$

¹⁹Un espaciotiempo 2D suele indicarse como 1+1 que hace referencia al hecho de que utilizamos una coordenada temporal más una espacial. El caso usual 4D en esta simbología es 3+1.

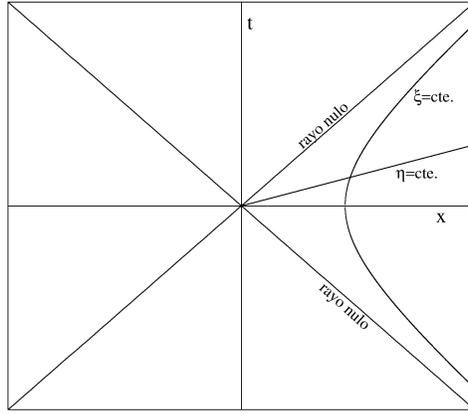


Figura 3: Sistema coordenado de Rindler dentro del espaciotiempo de Minkowski. Las coordenadas $\eta=\text{cte}$ son líneas rectas a través del origen, mientras que $\xi=\text{cte}$ son hipérbolas que corresponden a líneas de mundo de observadores uniformemente acelerados. Los rayos nulos indicados actúan como horizontes de eventos, que son las rectas a las cuales tienden asintóticamente las hipérbolas.

donde aparece explícitamente la métrica $g^{\mu\nu}$ y su determinante porque si bien el espaciotiempo continúa siendo plano las coordenadas no son las cartesianas usuales donde teníamos $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

No obstante, en este caso particular nos hallamos ante una acción con *acoplamiento conforme*. Volviendo a la tabla de la página 18 vemos que para $D = 2$ dimensiones, con $m = 0$ tenemos $\xi = 0$ ²⁰ de manera que se verifican las condiciones para el acoplamiento conforme; la acción (31), con $D=2$ en lugar de $D=4$, se reduce a la (65). En este caso, según ya dijéramos, la acción y la ecuación de movimiento que de ella se desprende son invariantes ante una transformación conforme de la métrica. Para nuestro ejemplo el factor conforme es $\Omega^2 = e^{2a\xi}$ y la métrica de Rindler resulta ser conforme a la métrica de Minkowski, pues

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{2a\xi} \eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Es fácil ver que con esta propiedad la acción (65) es idéntica a la acción correspondiente al campo en un sistema de coordenadas cartesianas (t, x) . Las ecuaciones de movimiento a resolver serán entonces:

$$\square\phi(\eta, \xi) = 0 \quad \square\phi(t, x) = 0,$$

donde cada operador d'Alembertiano se escribe en las coordenadas correspondientes y el campo, si bien es el mismo ente, resulta una función diferente de uno y otro juego de coordenadas. La resolución de estas ecuaciones es inmediata, pues ya la hemos hecho; son ondas planas del tipo

$$\exp(ik\xi - i\omega\eta) \quad \exp(ikx - i\omega t), \quad (66)$$

donde $\omega = |k| > 0$. Los modos (66) nos brindan, una vez normalizados, dos bases para descomponer al operador de campo $\hat{\phi}$ de manera que existirá una transformación de Bogolyubov que las conecte. Podemos definir entonces dos estados de vacío $|\mathbf{0}_M\rangle$ y $|\mathbf{0}_R\rangle$ correspondientes

²⁰No confundir con la coordenada de Rindler ξ .

al estado del campo ϕ de acuerdo a un observador inercial y de acuerdo a un observador acelerado, respectivamente.

El número de partículas en el modo k -ésimo para el vacío $|\mathbf{0}_M\rangle$ según un observador acelerado será

$$\langle \mathbf{0}_M | \hat{n}_k | \mathbf{0}_M \rangle = \langle \mathbf{0}_M | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | \mathbf{0}_M \rangle = \sum_j |\beta_{jk}|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \quad (67)$$

Pero como una partícula sin masa con momento k tendrá energía $E = |k| = \omega$, la expresión en el lado derecho de (67) es equivalente a una distribución de Bose-Einstein

$$\langle n_E \rangle = \frac{1}{e^{E/T_u} - 1},$$

donde T_u es la temperatura de Unruh definida como

$$T_u = \frac{a}{2\pi k_B}. \quad (68)$$

En conclusión, nuestro observador acelerado aún en el estado que un observador inercial define como vacío detectará un baño térmico de partículas a temperatura T_u ²¹.

Una interpretación física del efecto Unruh como es visto en un laboratorio acelerado sería pensar que el detector utilizado para registrar las partículas perturba el estado de los campos cuánticos por los efectos de su movimiento no uniforme; esas perturbaciones hacen que el detector registre. Las partículas detectadas son reales y la energía para las mismas es provista por el agente que acelera el detector.

5.2. Radiación de Hawking y principio de equivalencia

En 1974 S.W. Hawking anunció que los agujeros negros podrían emitir radiación con un espectro térmico debido a efectos cuánticos (ver [26]). Como mencionáramos en la sinopsis histórica de la introducción este descubrimiento teórico insufló nuevos aires al estudio de los campos cuánticos en espaciotiempos curvos.

Para mostrar las líneas principales del razonamiento de Hawking esbozaremos el comportamiento de un campo escalar real libre en presencia de un objeto no rotante esféricamente simétrico de masa M (podemos seguir una versión simplificada de los cálculos con detalle en [27]). En el exterior de dicho objeto la métrica que describe este espaciotiempo curvo es la de Schwarzschild, cuyo elemento de línea en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (69)$$

el cual tiende al de Minkowski²² para $r \rightarrow \infty$ (muy lejos del objeto que está colapsando). Esta métrica es singular en los valores $r = 0$ y $r = 2M$ siendo la primera una singularidad en la geometría del espaciotiempo y la segunda sólo una singularidad de las coordenadas que

²¹Para tener una idea de la magnitud de esta temperatura es útil considerar la expresión en unidades convencionales, que sería $T_u = \hbar a / c 2\pi k_B$.

²²En coordenadas esféricas el elemento de línea de un espaciotiempo plano de Minkowski es $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$.

no se presenta cuando transformamos hacia otros sistemas. En efecto $r = 2M$ es el horizonte de eventos del agujero negro que formará el objeto colapsado, lo cual significa que cuando la superficie del objeto alcance dicho radio ya no será posible que establezca comunicación de ningún tipo con el exterior (al menos clásicamente).

Asumimos que en el pasado remoto el objeto que colapsará está lo suficientemente distendido como para que el espaciotiempo sea aproximadamente plano. En ese momento podemos definir un vacío $|0_M\rangle$ que será el vacío de Minkowski. En algún momento del pasado se produce el colapso gravitatorio que tiene como resultado final la creación del agujero negro. Luego de esto el espacio ya tiene la geometría de Schwarzschild de modo que el vacío en esta región ya no se corresponderá con el inicial. No obstante, muy lejos de la ubicación del agujero negro (con $r \rightarrow \infty$) el espaciotiempo no se diferencia del de Minkowski de manera que podemos definirnos un vacío allí también. El cálculo de la producción de partículas se hace evaluando la transformación de Bogolyubov entre estos dos vacíos.

Las soluciones de la ecuación $\square\phi = 0$ en la geometría de Schwarzschild tienen la forma general

$$r^{-1}R_{\omega l}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)e^{-i\omega t}, \quad (70)$$

donde Y_{lm} es un armónico esférico y R es una función radial satisfaciendo una ecuación no trivial.

La derivación original de Hawking emplea un conjunto de modos del campo $f_{\omega lm}$ “de entrada” que son soluciones entrantes a la zona del colapso y un conjunto de modos $F_{\omega lm}$ “de salida” que son las soluciones salientes; ambas son (en las regiones asintóticamente lejanas del objeto colapsante) soluciones (ondas esféricas) de frecuencia positiva. No obstante durante el tiempo en el cual las ondas entrantes atraviesan el cuerpo esférico el mismo continúa colapsándose, reduciendo su radio y aumentando de esta forma su gravedad. Las ondas emergentes tendrán un corrimiento al rojo. En las zonas asintóticas se puede calcular explícitamente la forma de los modos $f_{\omega lm}$, $F_{\omega lm}$ y de esta manera hallar la transformación de Bogolyubov que conecta las expansiones.

La figura 4 ilustra cualitativamente la situación del cuerpo colapsante antes de que se vuelva un agujero negro.

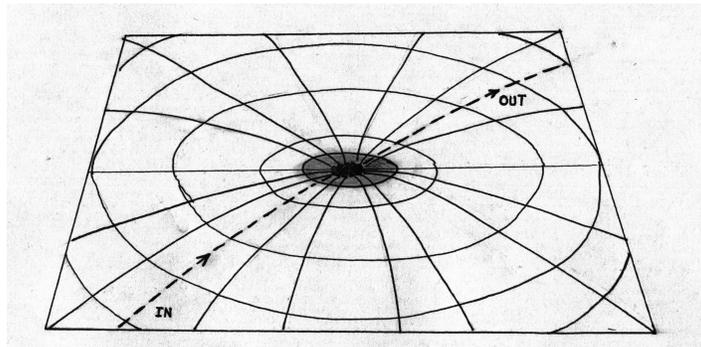


Figura 4: Visualización cualitativa de la perturbación que sufre el campo cuántico al propagarse a través de un objeto que sufre colapso gravitatorio. Una onda entrante (IN) atraviesa la superficie del objeto que en ese momento tiene un diámetro dado por el círculo externo en gris. Dicha onda escapa (OUT) del objeto cuando su diámetro se corresponde con el círculo interno en negro; es decir que se ha colapsado en el intervalo de tiempo en que la onda pasó a su través.

Las propiedades de las partículas creadas por el campo gravitatorio del agujero negro estarán gobernadas en el futuro remoto por las ondas que comenzando en un pasado remoto muy lejos del cuerpo, atravesaron y escaparon del mismo justo antes de que se reduzca más allá de su horizonte de eventos. Esas ondas alcanzarán el futuro remoto en tiempos de llegada arbitrarios (ver [5] por una explicación detallada).

Evaluando el flujo de partículas salientes en el modo ωlm que llegan a la zona asintótica (el futuro remoto), es decir el valor de expectación del operador número según los modos salientes respecto del estado de vacío de los modos de entrada, se obtiene

$$\langle N_{\omega lm} \rangle = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1}, \quad (71)$$

lo cual representa una distribución de Planck con una temperatura de Hawking T_h dada por

$$T_h = \frac{1}{8\pi M k_B}. \quad (72)$$

Esta T_h se define también como la temperatura del agujero negro lo cual nos permite realizar la conexión con la termodinámica.

Comparando (68) con (72) vemos que para un valor de $a = 1/4M$ en el sistema de un observador acelerado, ambas temperaturas coinciden lo cual nos dice que podemos reproducir el espectro térmico de partículas generado por un objeto colapsante que curva el espacio-tiempo mediante una aceleración uniforme en un espaciotiempo plano. Es una manifestación del principio de equivalencia de Einstein, que nos dice que “todos los efectos locales de la gravedad son equivalentes a un cierto sistema coordinado acelerado en un espaciotiempo plano”.

6. Conclusiones

Hemos mostrado la generalización de la cuantización de un campo escalar real libre en un espaciotiempo de Minkowski (que es donde se desarrolla la teoría cuántica de campos usual) hacia un espaciotiempo curvo particular (modelo de FRW). Considerando las modificaciones necesarias en la acción S , para hacerla compatible con la relatividad general, la teoría se traslada de un modo casi inmediato pero surgen ciertas ambigüedades en la interpretación de la expansión de los operadores de campo en términos de operadores de creación y destrucción cuando pensamos en su aplicación para generar los estados de partícula. Esas ambigüedades se pueden localizar en la no-unicidad de la definición del estado de vacío de la teoría.

Las dificultades en la transición de un espaciotiempo plano a uno curvo se asocian a la ausencia, en general, de simetrías como las transformaciones del grupo de Poincaré que permiten, en el caso de Minkowski, la elección de un estado de vacío natural: el que registrarán todos los observadores inerciales. Este estado es el que resulta de la descomposición de los campos en términos de la base de ondas planas (57), que son solución de la ecuación de Klein Gordon (13).

Dicha descomposición parece tan natural e inmediata que pasa desapercibida la consideración de otra descomposición del campo. Para un espaciotiempo curvo en general no tenemos soluciones analíticas para los modos de manera que no podemos expandir de forma inmediata los operadores de campo. Precisamente el hecho de tener que trabajar en forma general deja

al descubierto la dependencia que posee la interpretación en términos de partículas respecto del conjunto en el cual se expanden los campos. Como no es factible seleccionar un conjunto de modos que sean *especiales* el concepto mismo de vacío y partículas pasa a ser ambiguo o dicho de otra manera a no tener sentido en un espaciotiempo curvo general.

Esto no significa que la teoría está equivocada sino que esos entes no son fundamentales a la misma y que si queremos seguir desarrollándola debemos considerar algún otro enfoque que se base en observables referidos a los campos mismos y que no requiera de una dada representación para hacer predicciones.

Apéndice

A. Nomenclatura y convenciones

Salvo indicación explícita en contrario hemos utilizado durante todo el trabajo unidades naturales

$$G = \hbar = c = 1.$$

La métrica tiene signatura $(+ - - -)$.

Los vectores tridimensionales usuales serán expresados en negrita (ejemplo: \mathbf{x}) mientras que los cuadvectores en cursiva subrayada (ejemplo: \underline{x}) o bien con un índice griego (ejemplo: x^μ). Los índices latinos (i, j, k) irán de 1 a 3 salvo indicación en contrario y los griegos (μ, ν, α) de 0 a 3.

El operador d'Alembertiano en un espacio de Minkowski se define como

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \partial_t^2 - \nabla^2.$$

Referencias

- [1] L.E. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes. I*, (Phys. Rev. D 183, 1057-1068, 1969).
- [2] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, New York, 1949).
- [3] R. M. Wald, *The History and Present Status of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, (arXiv:gr-qc/0608018v1, 2006).
- [4] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, (Reverté, S.A., Barcelona, 1998).
- [5] L.E. Parker y D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [6] V.F. Mukhanov y S. Winitzki, *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, (Draft version, 2004).
- [7] J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [8] F. Mandl, *Introduction to Quantum Field Theory*, (Interscience Publishers Inc., London, 1959).

- [9] W. Greiner y J. Reinhardt, *Field Quantization*, (Springer-Verlag, Berlín, 1996).
- [10] J.B. Hartle, *Gravity. An Introduction to Einstein's General Relativity*, (Addison Wesley, San Francisco, 2003).
- [11] N.D. Birrell & P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [12] B.S. DeWitt, *Quantum field theory in curved spacetime*, (Phys. Rep. **19** 6, 295-357, 1975).
- [13] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [14] T. Jacobson, *Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect*, (arXiv:gr-qc/0308048v3, 2004).
- [15] A. Wipf, *Quantum Fields near Black Holes*, (arXiv:hep-th/9801025v1, 1998).
- [16] C. J. Isham, *Quantum Field Theory In Curved Spacetime: An Overview*, (Annals of the New York Academy of Sciences **302**, 114-157, 1977).
- [17] T. S. Bunch, P. Panangaden y L.E. Parker, *On renormalization of $\lambda\phi^4$ in curved space-time I*, (J. Phys. A Math. Gen. **13**, 901-918, 1980).
- [18] S.A. Fulling, *Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time*, (Phys.Rev. D **7** **10**, 1973).
- [19] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, (Commun. math. Phys. **43**, 199—220, 1975).
- [20] S. Winitzki, *Cosmological particle production and the precision of the WKB approximation*, (arXiv:gr-qc/0510001v2, 2005).
- [21] S.A. Fulling, *Remarks on positive frequency and Hamiltonians in expanding universes*, (Gen. Rel. Grav. **10** 807, (1979)).
- [22] W.G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, (Phys. Rev. **D** **14**, 870-892, 1976).
- [23] W. Rindler, *Kruskal space and the uniformly accelerated frame*, (Am. J. Phys. **34**, 1174-1178, 1966).
- [24] R.M. Wald, *The formulation of quantum field theory in curved spacetime*, (arXiv:gr-qc/0907.0416v1, 2009).
- [25] B.S. Kay, *Quantum field theory in curved spacetime*, (arXiv:gr-qc/0601008v2, 2007).
- [26] S.W. Hawking, *Black hole explosions?*, (Nature, 248 **30**, 1974).
- [27] L.H. Ford, *Quantum field theory in curved spacetime*, (arXiv:gr-qc/9707062v1, 1997).