Una integral para la playa

E.F.LAVIA

25 de mayo de 2013

Todo lo que me detiene para recuadrar el resultado de un ejercicio académico de cálculo de campo eléctrico es

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz. \tag{1}$$

La última fase, el alivio, de cerrar una cuenta (el recuadro) no puede suceder; no puede tener lugar mientras exista algo oculto. Al menos para mí. Es algo insatisfactorio que el resultado, amasijo de constantes con sus respectivas unidades, resulte verse multiplicado por un número, porque (1) es al fin y al cabo un número, un número cuyo valor desconozco. Es decir, es insatisfactorio tener:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz.$$

Por otro lado, (1) es una integral que uno vio, resolvió y consecuentemente olvidó cuando finalizaron los cursos donde uno integraba *en seco*[1]. Para eso sirven las tablas, las calculadoras, las netbooks y (en algún momento) los celulares. Un CAS (Computer Algebra System) sabe bien de hacer estas cuentas.

En la playa, sin ninguno de estos ayudantes y sólo contando con la infraestructura mínima del teórico (lápiz y papel más un lugar a la sombra) parece un trabajo moderado. La intuición y el sentido común dicen que si (1) surge en un problema académico debe de tener solución elemental, de esas que uno puede hallar y embeberse de un fatuo, y efímero, engreimiento[2].

Pero estamos en la playa, tenemos dónde escribir, tiempo y garantías de sol. El escenario está montado, pero el actor no ha sido agraciado por la providencia con una gran memoria. Esperamos poder, con principios básicos, llegar a destino (o al menos fracasar estoicamente, lo cual es igual de válido). Sentadas las bases entonces no queda otra opción que comenzar la mascarada.

Recordamos con orgullo, y podemos escribirlo incluso, que: resolver un problema como (1) es buscar una primitiva, una función f tal que su derivada sea nuestro integrando $F(z)$, es decir que si

$$\frac{d}{dz}f(z) = F(z)$$

entonces se da que:

$$\int_a^b F(z)dz = \int_a^b \frac{d}{dz}\left[f(z)\right]dz = f(b) - f(a). \tag{2}$$

y la evaluación de la integral es la resta de la función en los límites. Gloria... cuando la hay, porque no toda $F(z)$ tiene primitiva. Pero un ejemplo académico tiene que tener. Veamos.

Las sustituciones elementales (proceso que recuerdo bien, el de sustituir) fracasan de manera inmediata. *Partes* (luego de que hube de deducirla una vez más) no parece simplificar el asunto. El método de *sustitución trigonométrica* está más allá de un recuerdo y su deducción de primeros principios plantea desafíos posiblemente de igual calibre que la integral original.

No obstante existe un recuerdo nublado de que esas integrales, con $1+z^2$ en el denominador elevado a alguna potencia, tenían un *gusto* a primitivas de funciones trigonométricas inversas. Esas cuya derivada uno no memoriza (*arcosen*, *arcocos*, *arcotan*) porque lo consideramos tortuoso y lo suficientemente desdeñable.

[1] Sin otro propósito útil más que aprender a integrar.

[2] Que finaliza abruptamente, siempre, la siguiente vez que uno se ve en la situación de ser un perfecto imbécil.

De la misma manera en que la integral *deshace* lo que hace la derivada, es lo que vemos en (2), también las funciones $arcofuntrig(z)$ son *deshechas* aplicándole la respectiva $funtrig$; es decir que

$$funtrig(arcofuntrig(z)) = z$$

Esto es básico. Esto lo sabemos. Construyamos un pequeño listado con lo que sabemos.

$$sen(u)' = cos(u)$$

$$cos(u)' = sen(u)$$

$$cos(u)^2 + sen(u)^2 = 1$$

$$tan(u) = \frac{sen(u)}{cos(u)}$$

No parece mucho, pero veamos si nos lleva lejos.

Empecemos con el $asen(u)$. El seno de u da algo, digamos z,

$$sen(u) = z \qquad \Rightarrow \qquad u = asen(z)$$

y quisieramos ver cómo se deriva el arcoseno para comprobar si no es acaso la primitiva que buscamos. Derivando implícitamente el seno,

$$cos(u)du = dz \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{cos(u)} = \frac{1}{cos(asen(z))}$$

pero el cos no *deshace* el $asen$; necesito un sen. Pero tenemos la relación pitagórica para pasar de senos a cosenos. Lo usaremos,

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{cos(asen(z))} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen(asen(z))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

y llegamos a:

$$\frac{d}{dz} asen(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \tag{3}$$

Muy noble el esfuerzo pero

$$\frac{1}{(1 + z^2)^{3/2}} \neq \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

y entonces no es la primitiva que necesitamos. La primitiva hallada dista de la buscada en: 1) un signo y 2) un exponente.

Podemos analizar el primer inconveniente, no por empezar por el primero sino porque parece el que está al alcance. El signo provino de la relación $c^2 + s^2 = 1$ que nos condujo a $\sqrt{1 - z^2}$. Una relación del tipo $a^2 - b^2 = 1$ tal vez nos lleve a $\sqrt{1 + z^2}$. No se pierde más que tiempo intentándolo.

Es aquí cuando nos viene a la mente, entre brumas, una reminiscencia de que la solución puede hallarse en el campo de las funciones hiperbólicas ($cosh$, $senh$ y $tanh$), las cuales verifican propiedades similares a las verificadas por las funciones trigonométricas. Los lazos entre esos dos grupos de especímenes matemáticos se pueden vislumbrar surcando la barrera de los números reales para alcanzar a los complejos. El panorama tiene un punto álgido maravilloso, entre explosiones musicales de colores, que es la contemplación de la identidad de Euler. Pero esa ruta no nos espera ahora. Veamos qué recordamos sobre las funciones hiperbólicas.

El equivalente de la identidad pitagórica era algo como

$$senh(u)^2 - cosh(u)^2 = \pm 1, \tag{4}$$

la memoria patina con algunos signos y no es una excepción este caso. Recordamos la definición del $senh$ y esto nos permite construir una segunda tabla; esto es, partiendo de:

$$senh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

y sabiendo que la derivada del seno es el coseno,

$$senh(u)' = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

Ya estamos en condiciones de comprobar la ecuación (4). Lo hacemos y arribamos a:

$$cosh(u)^2 - senh(u)^2 = 1. \tag{5}$$

Podemos escribir otra tabla de ecuaciones básicas,

$$senh(u)' = cosh(u)$$

$$cosh(u)' = senh(u)$$

$$cosh(u)^2 - senh(u)^2 = 1$$

$$tanh(u) = \frac{senh(u)}{cosh(u)}$$

Mimificaremos ahora el camino que nos dejó en la primera frustración. Pero ahora tomamos el $asenh(u)$. El seno hiperbólico de u da algo, digamos x,

$$senh(u) = x \qquad \Rightarrow \qquad u = asenh(x),$$

procediendo de igual modo que antes buscamos ver cómo se deriva el *asenh*,

$$cosh(u)du = dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{cosh(u)} = \frac{1}{cosh(asenh(x))}$$

pero el *cosh* no *deshace* el *asenh*; necesito un *senh*. Lo obtengo desde

$$cosh(u)^2 - senh(u)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad cosh(u) = \sqrt{1 + senh(u)^2}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{cosh(asenh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + senh(asenh(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

y llegamos a:

$$\frac{d}{dz} asenh(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \tag{6}$$

que no significa otra que:

$$asenh(z) = \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz, \tag{7}$$

el típico gusto de perder por poco. Hemos resuelto el inconveniente 1) pero subsiste el 2) porque el exponente buscado es 3/2 y obtuvimos 1/2. Un intento de *partes* en (7) para ver si mágicamente aparece lo deseado conduce a desazones que evitaremos en aras de la síntesis.

Por otro lado, luego de salir a caminar un poco por la arena caliente, y pensar sobre (1), notamos que:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz = \int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}(1+z^2)}\, dz, \tag{8}$$

y uno de los factores es nuestra integral, la que nos costó tanto trabajo. Tal vez podamos usarla, después de todo, como está. Probamos la sustitución:

$$v = asenh(z)$$

$$dv = \frac{1}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}$$

y para cambiar el resto del integrando empezamos por despejar z,

$$senh(v) = z,$$

elevar al cuadrado y usar la identidad hiperbólica para hacer aparecer un uno,

$$senh(v)^2 = z^2 = cosh(v)^2 - 1$$

de modo que:

$$(1 + z^2) = cosh(v)^2.$$

La integral (8) transforma a

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz = \int_0^\infty \frac{1}{cosh(v)^2}\, dv, \tag{9}$$

quedando los límites sin cambios[3]. Hemos transformado la integral y también nuestro problema. El sol empieza a caer sobre el horizonte y nos preguntamos si podremos resolver antes de que se haga de noche. Tener cosas en el denominador nunca me pareció una buena estrategia así que tratamos de que en el integrando aparezcan *cosas arriba*. Usamos la identidad una vez más,

$$\frac{1}{cosh(v)^2} = \frac{cosh(v)^2 - senh(v)^2}{cosh(v)^2} = 1 - tanh(v)^2$$

Un coseno abajo se transmuta en una tangente arriba y un uno. Bien. Derivemos implícitamente ambos miembros aunque más no sea porque es lo que sabemos hacer,

$$-2tanh(v)\frac{d}{dv}[tanh(v)] = -2cosh(v)^{-3}senh(v)$$

$$\frac{d}{dv}[tanh(v)] = \frac{1}{cosh(v)^2}. \tag{10}$$

El esfuerzo ha rendido fruto. Podemos tomar (10) y con lentitud, por el goce, introducirlo en (9). Lo vamos a escribir con todo detalle:

$$\int_0^\infty \frac{1}{cosh(v)^2}\, dv = \int_0^\infty \frac{d}{dv}[tanh(v)]\, dv = tanh(v)]_0^\infty\,, \tag{11}$$

y haremos la evaluación usando la definición de tangente, y sacando factor común e^v arriba y abajo,

$$tanh(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}}$$

$$\lim_{v\to\infty} tanh(v) = \lim_{v\to\infty} \frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}} = 1$$

$$tanh(0) = \left.\frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}}\right|_{v=0} = 0$$

Entonces:

$$\int_0^\infty \frac{1}{cosh(v)^2}\, dv = 1$$

o bien,

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz = 1.$$

Un ejercicio académico con un resultado académico: uno. Mientras cargo la lona y levantamos sombrilla y reposeras, recuadro y doblo el papel.

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz = 1} \tag{12}$$

[3]Usamos la definición de *senh* para saber qué valores toma v cuando u es cero y ∞