Física Teórica 3

Serie 9: Modelo de Ising. Fenómenos críticos - 2do cuatrimestre de 2005

Problema 1: El modelo de Ising se utiliza para estudiar transiciones de fase en sistemas magnéticos. Consiste de N spines en una red que, en presencia de un campo magnético B, interactúan en la forma

$$H = -\sum_{i=1}^{N} B\mu s_i - J \sum_{<i,j>}^{N} s_i s_j \qquad (s_i = \pm 1) \tag{1}$$

donde la última suma es sobre los primeros vecinos.

El modelo del gas de red ("Lattice Gas") se utiliza para estudiar transiciones de fase líquido-gas. Consiste en N sitios cada uno de los cuales puede estar ocupado a lo sumo por una partícula. Las partículas interactúan entre sitios vecinos, siendo ϵ la energía de interacción.

Muestre que ambos modelos son isomorfos. Para ello derive las relaciones que ligan los parámetros del modelo de Ising con los del gas de red, de modo que la función de partición canónica del primero sea idéntica (a menos de una constante de proporcionalidad) a la función de partición gran canónica del segundo.

Problema 2: En una dimensión el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta.

a) Considere a los N spines colocados en un círculo con condiciones periódicas de contorno (es decir $s_1 = s_{N+1}$). Muestre que la función de partición canónica Q_N es

$$Q_N(b, K) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_N \\ =\pm 1}} \exp\ (\sum_{i=1}^{N} (b s_i + K s_i s_{i+1})) \tag{2}$$

donde $b = \beta\mu B$ y $K = \beta J$.

b) Muestre que $Q_N = Traza\ (q^N)$ donde q es la matriz 2×2 de elementos

$$\exp[b(s + s')/2 + K\, s\, s'] \quad (s, s' = \pm 1) \tag{3}$$

Ayuda: El sumando del argumento de la exponencial en Q_N puede ser reescrito en la forma $b(s_i + s_{i+1})/2 + K s_i s_{i+1}$.

c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma

$$Q_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \tag{4}$$

siendo

$$\lambda_\pm = e^K \{\cosh b \pm (\sinh^2 b + e^{-4K})^{1/2}\} \tag{5}$$

los autovalores de la matriz q.
d) Muestre que en el límite termodinámico, $\lim_{N\to\infty} \frac{\ln Q_N}{N} = \ln \lambda_+$
e) Calcule la magnetización media $M = M(T, B)$ y muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B \to 0^+$. Ayuda: la magnetización media de cada spin es

$$< s_i >= \frac{1}{N} \frac{\partial \ln Q_N}{\partial b}\bigg|_K \tag{6}$$

Problema 3: Considere el modelo de Ising unidimensional a campo nulo. Un método aproximado para calcular la función de partición canónica consiste en hacer el cambio de variables $b_i = s_i s_{i+1}$. Muestre que en el límite de gran número de spines, la función de partición vale $Q_N = [2\cosh(\beta J)]^N$.

Problema 4: En la aproximación de campo medio para un sistema de Ising, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:
a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^\beta$ para $T \lesssim T_c$.
b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.
c) La susceptibilidad magnética $\chi_T(T, B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)^{-\gamma}$ para $T \lesssim T_c$.

Problema 5: Considere una red cuadrada bidimensional formada por dos tipos de sitios A y B con momentos magnéticos μ_A y μ_B respectivamente. El Hamiltoniano es del tipo Ising, pero con interacción a primeros y segundos vecinos. Las constantes de acoplamiento son:

$$\begin{aligned} J_1 > 0 &\quad \text{entre sitios vecinos de la red A} \\ J_1 > 0 &\quad \text{entre sitios vecinos de la red B} \\ J_2 < 0 &\quad \text{entre sitios vecinos A y B} \end{aligned}$$

a) Escriba el hamiltoniano en términos de s_i^A y s_i^B.
b) Calcule el campo magnético efectivo (en la aproximación de campo medio) que ven los spines de la red A. Idem para la red B.
c) Halle las ecuaciones para $< s_i^A >$ y $< s_i^B >$.
d) Muestre que la susceptibilidad magnética a campo nulo obedece la ley de Curie

$$\chi(T, B \to 0) \sim \frac{1}{T - T_{curie}}$$

Problema 6: Partiendo de la ecuación de estado de Van der Waals

$$(V - b)(P + \frac{a}{V^2}) = RT$$

a) Deduzca las expresiones que vinculan las magnitudes críticas P_c, T_c y V_c de un mol de gas con las constantes a y b del mismo.

b) Demuestre que la ecuación de estado de Van der Waals puede escribirse en forma adimensional como

$$(\mathcal{P} + \frac{3}{\mathcal{V}})(3\mathcal{V} - 1) = 8\mathcal{T}$$

donde $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{T}$ representan la presión, volumen y temperatura en unidades de las correspondientes cantidades críticas.

Problema 7: Considere la ecuación de Van der Waals adimensional del problema anterior

a) Expanda dicha ecuación alrededor del punto crítico en término de las variables $p = \mathcal{P} - 1$, $v = \mathcal{V} - 1$ y $t = \mathcal{T} - 1$ y muestre que

$$p = 4t - 6tv - \frac{3}{2}v^3 + 9tv^2$$

b) Muestre que la compresibilidad isotérmica satisface:

$$\kappa_T(t, V = V_c) \propto t^{-1}$$

c) Considere la región de coexistencia líquido-vapor para $T < T_c$. Muestre que cerca del punto crítico, el parámetro de orden es $v \propto (-t)^{1/2}$.

Problema 8: La hipótesis de scaling de Widom supone que la energía libre es una función homogénea generalizada,

$$F(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda F(t, B)$$

donde t es la temperatura reducida $t = (T - T_c)/T_c$ y B es el campo magnético.

a) Calcular los exponentes críticos α, β, γ y δ en función de a y b.

b)Verificar que se satisfacen las igualdades

$$\alpha = 2 - \beta(1 + \delta) \qquad \alpha + 2\beta + \gamma = 2$$