

Física Teórica 3

Serie 6: Gas de Fermi - 2do cuatrimestre de 2005

Problema 1: Considere un sistema formado por dos partículas que pueden estar en cualquiera de tres estados cuánticos de energías 0 , ε y 2ε . El sistema está en contacto con un foco térmico a temperatura T .

- a) Escriba una expresión para la función de partición Z si:
 - i) las partículas obedecen a la estadística de Maxwell-Boltzmann y son consideradas distinguibles.
 - ii) las partículas obedecen a la estadística de Bose-Einstein.
 - iii) las partículas obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.
- b) Suponiendo que $\exp(-\beta\varepsilon) = \frac{1}{2}$, calcule en unidades de ε la energía media en cada uno de los tres casos y compare.

Problema 2: Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio a una temperatura del orden de 10^7 K y a una densidad elevada del orden de 10^{10} kg/m³. Muestre que los átomos de helio deben encontrarse totalmente ionizados y que el gas de electrones resultante puede considerarse como si estuviese a temperatura nula. Dato: tenga en cuenta que la energía de ionización del helio es del orden de 10 eV y que $k_B = 8.6 \times 10^{-5}$ eV/K.

Problema 3: Para un gas ideal de N electrones en un volumen V :

- a) Calcular la energía de Fermi.
- b) Calcular la energía total E a $T = 0$.
- c) Muestre que para cualquier temperatura se cumple $E = 3pV/2$. Usando esta relación y lo hallado en b), encuentre una expresión para la presión p a $T = 0$.

Problema 4: Sea un gas de electrones que pueden moverse en dos dimensiones sobre un área A .

- a) Halle una expresión para $pV/k_B T$ en función de la temperatura y el potencial químico.
- b) Halle la energía de Fermi en términos del número medio de partículas a temperatura cero.
- c) Muestre que el potencial químico viene dado, como función de la temperatura, por:

$$\mu(T) = \epsilon_F \left\{ 1 + \frac{1}{\beta\epsilon_F} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_F}) \right\}$$

- d) Calcule el calor específico cuando el sistema está altamente degenerado y muestre que es proporcional a la temperatura.

Problema 5: Un electrón en un campo magnético H tiene una energía $\pm\mu_B H$ dependiendo de que el spin sea paralelo o antiparalelo al campo. Suponiendo un gas de electrones a temperatura cero sujeto a dicho campo,

- a) Halle el valor máximo de la densidad N/V tal que todos los spines sean paralelos entre sí; ¿cuánto vale la energía del gas en ese caso?
- b) Ahora suponga como dato una energía de Fermi mayor que $\mu_B H$. Halle la magnetización y a partir de ella la susceptibilidad.

Problema 6: Considere un gas de electrones en el límite ultrarrelativista; en ese caso la energía de una partícula está relacionada con su impulso mediante $\epsilon = cp$.

- a) Obtenga la relación entre E y N para $T=0$.
- b) Obtenga $\mu(T)$ al menor orden no nulo en la temperatura.
- c) Idem a) y b) pero para el caso bidimensional.