Física Teórica 3

Serie 5: Conjuntos estadísticos - 2do cuatrimestre de 2005

Problema 1: Un oscilador armónico unidimensional tiene niveles de energía dados por $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ donde ω es la frecuencia característica del oscilador y $n = 0, 1, 2, \ldots$. Supongamos que este oscilador está en contacto con un reservorio térmico a temperatura T, tal que $kT/\hbar\omega \ll 1$.
a) Encontrar la razón entre la probabilidad del oscilador de estar en el primer estado excitado y la correspondiente al fundamental.
b) Suponiendo que unicamente el fundamental y el primer excitado están apreciablemente ocupados, hallar la energía media del oscilador en función de T.

Problema 2: Se tienen N osciladores armónicos distinguibles de frecuencia ν, con niveles de energía $(n+1/2)h\nu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. La energía media del sistema vale

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}Nh\nu + M_0 h\nu$$

a) Encontrar la función de partición del sistema.
b) Hallar el valor de $\beta = 1/kT$.
c) Hallar una expresión para la entropía S.
d) Demostrar que el número de configuraciones está dado por

$$\Omega(M_0) = \frac{(N+M_0-1)!}{M_0!(N-1)!}$$

esto es, el número de combinaciones con repetición de N elementos tomados de a M_0.
e) Comparar $\ln\Omega$ con la entropía S calculada en el punto c).
f) Obtener una expresión de $\langle E\rangle$ en términos de β y calcular el calor específico a volumen constante.

Problema 3: Se tienen dos espines, uno de momento magnético μ_1 y otro de momento magnético μ_2. Cada uno puede estar en los estados + ó −. Hay un campo magnético H de modo que las energías de los estados de cada espin son:

$$E(1,+) = -\mu_1 H \qquad E(1,-) = \mu_1 H$$

$$E(2,+) = -\mu_2 H \qquad E(2,-) = \mu_2 H$$

Se sabe que la energía total promedio del sistema de los dos espines es $-E_0$, siendo $E_0 << H\,(\mu_1^2+\mu_2^2)^{1/2}$.
a) Halle la distribución de probabilidades correspondiente al equilibrio.
b) Sabiendo que las contribuciones a la magnetización son $m_i(\pm) = \pm\mu_i$, halle el valor total promedio de la magnetización.

Nota: tenga en cuenta que la temperatura no es dato del problema, no obstante si necesita hallarla se sugiere suponer a priori que ésta es alta y finalmente verificar que dicha suposición era correcta de acuerdo con los datos del problema.

Problema 4: Se tiene un gas ideal diatómico consistente de N moléculas de momento dipolar eléctrico μ. Muestre que la polarización eléctrica P está dada por:

$$P = \frac{N}{V}\left(\coth(\frac{\mu\mathcal{E}}{k_B T}) - \frac{k_B T}{\mu\mathcal{E}}\right)\mu$$

siendo V el volumen del gas y $\mathcal{E}$ el campo eléctrico externo. Pruebe que si $|\mu\mathcal{E}| \ll k_B T$, entonces la constante dieléctrica del gas vale:

$$\epsilon = 1 + 4\pi\frac{N}{V}\frac{\mu^2}{3k_B T}$$

Despreciar la polarización inducida de las moléculas, y asumir que el campo eléctrico actuante sobre cada molécula es simplemente $\mathcal{E}$. Recordar que $D = \mathcal{E} + 4\pi P = \epsilon\mathcal{E}$.

Problema 5: Modelo cuántico para una sustancia paramagnética

Suponga que un momento magnético puede tomar cualquiera de los valores discretos $g\mu_B m$ para su proyección sobre la dirección del campo magnético H, siendo m = número cuántico magnético $= j, j-1, ..., -j+1, -j$, g = factor de Landé, μ_B = Magnetón de Bohr. Calcule la magnetización M de un cuerpo que contiene n de tales momentos magnéticos por unidad de volumen. Evalúe la susceptibilidad magnética para un campo débil a alta temperatura ($g\mu_B jH << k_B T$) y compare este resultado con la ley de Curie. Suponga que la interacción entre momentos magnéticos es despreciable.

Problema 6: Modelo clásico de Langevin para una sustancia paramagnética

Antes del surgimiento de la mecánica cuántica Langevin explicó el paramagnetismo suponiendo que cada ión paramagnético posee un momento magnético permanente $\vec{\mu}$ libre de orientarse en todas direcciones (de módulo fijo) y que sometido a un campo $\vec{H}$ posee una energía $E = -\vec{\mu}\cdot\vec{H}$. Calcule la magnetización y la susceptibilidad en este modelo y verifique que se obtienen los resultados del problema anterior en el límite $j \to \infty$ identificando $|\vec{\mu}| = \mu_B g\, j$. Sugerencia: si se ha resuelto el prob. 4, no se necesita hacer muchas cuentas para resolver este problema.

Problema 7: Ausencia de magnetismo en mecánica clásica

Muestre que la susceptibilidad magnética de un sistema que obedece a la mecánica y a la estadística clásica es estrictamente nula (*Teorema de Bohr-Van Leeuwen*).

Ayuda: el Hamiltoniano para un sistema de partículas cargadas en un campo magnético es

$$H = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2m_j}\{p_j + \frac{e_j}{c}A(\bar{r}_j)\}^2 + U(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_N)$$

siendo A el potencial vectorial del cual se deriva el campo magnético. ¿Existe alguna contradicción entre este problema y el anterior?.

Problema 8: Sea un sistema de partículas distinguibles y no interactuantes cada una de las cuales puede tener dos posibles valores de energía, $-\epsilon$ y $+\epsilon$.
a) Suponiendo que dicho sistema está aislado y consiste de N_0 partículas con una energía total E_0, calcule su entropía suponiendo $N_0 \pm E_0/\epsilon >> 1$.
b) Suponga ahora que el sistema de N_0 partículas es cerrado y su energía *media* vale E_0.
i) Calcule su temperatura y el rango de E_0 en la que ésta es positiva.
ii) Calcule la entropía y compare con la calculada en a). Discuta.
c) Finalmente suponga que el sistema es abierto con N_0 y E_0 como su número medio de partículas y su energía media respectivamente.
i) Calcule la temperatura y el potencial químico.
ii) Calcule la entropía, compare con las calculadas anteriormente y discuta.

Problema 9: Se tiene una cadena lineal de N unidades, formando una molécula elástica. Cada unidad puede estar en dos estados, α o β. La longitud del estado α es a y la del β es b, y las energías son respectivamente E_α y E_β. Halle los valores de $\langle E\rangle$ y $\langle L\rangle$ conociendo la temperatura y la tensión F sobre la molécula.

Problema 10: Se tiene una cadena unidimensional formada por N segmentos ($N \gg 1$) de longitud a. Las uniones pueden girar libremente de modo tal que la energía de la cadena no depende de cómo está doblada, o sea del valor de su longitud x.
a) Suponga que la longitud se fija en un valor determinado.¿Cómo debe calcular la entropía? (Utilice la aproximación de Stirling)
b)¿ A que valor de x corresponde la entropía máxima? Calcularla.
c) Suponga que la cadena se halla en contacto con un foco térmico a temperatura T. Sobre ella se aplica una fuerza F de magnitud constante que tiende a estirarla, de modo tal que la longitud de equilibrio es x_o. El equilibrio implica que la entropía total (cadena+foco térmico) es un máximo. Recordando que si se varía la longitud en dx alrededor de x_o, la fuerza entrega a la cadena un trabajo, y que este trabajo se entrega en forma de calor (ya que la energía interna de la cadena no depende de su longitud), muestre que

$$F = -k_B T \left(\frac{dS}{dx}\right)_{x=x_o}$$

y halle la expresión para $F(x_o)$.
d) Suponga ahora $\langle x\rangle$ conocido. Si calcula la función de partición como:

$$Z = \sum_{x=-Na}^{Na} \Omega(x) e^{-\lambda x} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} e^{-\lambda(2n-N)a}$$

calcule $\langle x \rangle$ en función de λ, despeje λ en función de $\langle x \rangle$ y muestre que si $\langle x \rangle = x_o$ entonces $\lambda = -F/k_B T$.

Problema 11: Se tienen N átomos iguales formando una red cristalina perfecta. Si se extraen n átomos ($1 \ll n \ll N$) de sus lugares en la red y se los coloca en posiciones intersticiales, se obtienen n defectos de tipo Frenkel. El número N' de posiciones intersticiales en la red es del orden de magnitud de N. Sea W la energía necesaria para producir un defecto Frenkel. La temperatura es un dato del problema. Halle el valor de $\langle E \rangle = W \langle n \rangle$ y de allí muestre que

$$\langle n \rangle \propto \sqrt{NN'} e^{-\beta W/2}$$

Grafique cualitativamente $\Omega(n) e^{-\beta n W}$ en función de n.

Problema 12: Se tienen N átomos iguales formando una red cristalina perfecta. Si se extraen n átomos ($1 \ll n \ll N$) de sus lugares en la red, se obtienen n defectos de tipo Schottky. Dada la energía por defecto Schottky ω y la temperatura, muestre que

$$\langle n \rangle \propto N e^{-\beta \omega}$$

Problema 13: Considere una superficie adsorbente que tiene N lugares, cada uno de los cuales puede adsorber una molécula del gas. La superficie se halla en contacto con un gas ideal monoatómico. La energía de la molécula adsorbida vale $-E_o$ respecto al mismo origen que se toma para para las energías del gas.

a) Halle el valor de $\langle n \rangle$ (el número medio de moléculas adsorbidas) conociendo la temperatura y el potencial químico del gas.

b) Recordando que el potencial químico del gas se escribe $\mu = k_B T \ln(\beta p) + \frac{3}{2} k_B T \ln(h^2 \beta / 2\pi m)$, muestre que:

$$\Theta = \frac{\langle n \rangle}{N} = \frac{p}{p + p_o(T)}$$

donde p es la presión del gas y

$$p_o(T) = (\frac{2\pi m}{\beta h^2})^{3/2} k_B T e^{-\beta E_o}$$

c) Si el número total de moléculas del gas (incluyendo a las adsorbidas) es N_0, calcule la entropía total del sistema.