Física Teórica 3

Serie 3: Teoría cinética - Ecuación de Boltzmann - 2do cuatrimestre de 2005

Problema 1: Estime $\frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}}\left(\frac{N}{V}\right)$ para un gas de H_2 en condiciones normales (300^oK y una atmósfera). Le resultarán útiles $\hbar c \approx 2000\ eV$ Å , $m_H c^2 \approx 2000 MeV$, $k \approx 8.3 * 10^{-5} eV/^oK$, $N_{Avogadro} = 6.023 * 10^{23}$ y $V_{mol} = 22.4$ lt.
Idem para el O_2.

Problema 2: Describa un método experimental para verificar la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Problema 3: Suponga un gas clásico formado por N partículas. Sea $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ la función de distribución de una partícula ($\int\int\ d^3x\, d^3v\, f(\vec{x}, \vec{v}, t) = N$) y $\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)$ una cierta magnitud asociada a una partícula del gas. Escriba las expresiones correspondientes a:

a) Densidad de partículas en el punto $\vec{x}$ y al tiempo t.

b) Valor medio de α en el punto $\vec{x}$ y al tiempo t.

c) Flujo de α a través de un elemento de área de normal $\hat{\jmath}$ que se mueve con velocidad $\vec{u_0}$ (usualmente se toma $\vec{u_0} = 0$ ó $\vec{u_0}$ =velocidad media del gas).

Como casos particulares de flujo considere:

i) La densidad de corriente (flujo de carga, $\vec{u_0} = 0$)

ii) El flujo térmico (flujo de energía cinética, $\vec{u_0} = 0$).

iii) El llamado *tensor de presión*, el cual se define como el tensor simétrico cuya componente i, j viene dada por el flujo de componente $\hat{\imath}$ de impulso lineal referido a la velocidad media del gas ($\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = m(v_i - \langle v_i \rangle)$), a través de un elemento de área de normal $\hat{\jmath}$ que se mueve con la velocidad media del gas ($\vec{u_0} = \langle \vec{v} \rangle$).

d) Función de distribución de equilibrio suponiendo que actúa sobre las partículas un potencial externo $V(\vec{x})$.

Problema 4: Sea n_0 la densidad del aire en la superficie terrestre. Determine la densidad n_z a una altura z suponiendo equilibrio.

Problema 5: Calcular la viscosidad y la conductividad térmica de un gas monoatómico diluído. Para ello siga los siguientes pasos:

a) Considere que el fluído se halla encerrado entre dos placas paralelas separadas por una distancia L. La placa en $z = 0$ está quieta, mientras que la placa en $z = L$ se mueve en la dirección x con velocidad u_x. Las capas de fluído que se hallan debajo del plano $z =$ cte. ejercen un esfuerzo tangencial P_{zx} (componente zx del tensor de presión) sobre el fluído que se halla por encima de ella. Si $\partial u_x/\partial z$ es pequeño se cumple que $P_{zx} = -\eta \partial u_x/\partial z$ donde η es el coeficiente de viscosidad. Encuentre una expresión para dicho coeficiente y observe que el mismo es proporcional al tiempo de relajación τ.

b) Considere ahora que el gas está en reposo pero existe un pequeño gradiente de temperatura en la dirección z. Calcule el flujo térmico en la situación estacionaria y demuestre que es proporcional a $-\partial T/\partial z$. Calcule el coeficiente de proporcionalidad (conductividad térmica κ).

Ayuda: considere que f^o es una distribución Maxwelliana con $n = n(z)$ y $\beta = \beta(z)$. Relacione $\partial n/\partial z$ con $\partial \beta/\partial z$ pidiendo que $< v_z >= 0$, esto es, que no hay convección.

c) Halle el cociente κ/η y vea que es independiente de T y de τ.

Problema 6: Calcule, utilizando la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación, la conductividad eléctrica de un gas Maxwelliano de electrones con un fondo iónico neutralizado (esta es una buena aproximación para un plasma: suponer los iones fijos y que la corriente es debida sólo a los electrones).

Problema 7: Considere un gas Maxwelliano en estado estacionario sometido a un pequeño gradiente de temperatura unidimensional. La densidad de partículas es homogénea.

a) Proponga como solución de la ecuación de Boltzmann una Maxwelliana local (con $T = T(z)$) más una pequeña corrección.

b) Calcule la velocidad media e interprete el resultado.

c) Escriba la ecuación de continuidad para ese gas.

d) A partir de lo obtenido en b) y c) deduzca la dependencia de T con z y también la de la presión con z.

e) Calcule el flujo térmico y compare con lo obtenido en el problema 5 b).

Problema 8: Sea $H = \int d^3v f(v,t) \log f(v,t)$ donde $f(v,t)$ es arbitraria excepto por las condiciones $\int d^3v f(v,t) = n$; $\int d^3v f(v,t) \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = E$

Muestre que H es mínimo cuando f es la distribución de Maxwell-Boltzmann.