Física Teórica 3

Serie 2: Procesos estocásticos, cadenas de Markov. 2do cuatrimestre de 2005

Problema 1: Calcular la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $N = \sum_{i=1}^{M} X_i$, donde X_i son variables aleatorias estadísticamente independientes que toman el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1-p$. Dar ejemplos de variables aleatorias distribuidas de esta forma.

Problema 2: Calcular el límite $M \to \infty, p \to 0, Mp = \lambda$ de la distribución binomial

$$p_n = \begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{M-n}$$

Dar ejemplos de variables aleatorias distribuidas de esta forma.

Problema 3: Obtener el valor medio y la dispersión de las distribuciones binomial y de Poisson.

Problema 4: Para ilustrar la tendencia hacia el equilibrio, Ehrenfest propuso el siguiente modelo: en dos urnas se distribuyen N bolas numeradas de 1 a N. Cada segundo se elije al azar una de ellas y se la transfiere a la otra urna. El proceso así definido es una cadena de Markov, cuya matriz de transición es

$$T_{n,n'} = \frac{n'}{N}\delta_{n+1,n'} + (1 - \frac{n'}{N})\delta_{n-1,n'}$$

donde n es el número de bolas en una urna. Demostrar que la solución estacionaria es una binomial.

Problema 5: Una cadena de Markov posee un estado transitorio y uno absorbente. ¿ Qué forma tiene la matriz de transición asociada?

Problema 6: En una urna $\mathcal{A}$ se colocan dos bolas blancas, mientras que en una urna $\mathcal{B}$ se colocan cuatro bolas rojas. A cada paso del proceso se selecciona al azar una bola de cada urna y se intercambian.

a) Encuentre la matriz de transición, sus autovalores y autovectores.

b) ¿ Cual es la probabilidad de encontrar dos bolas rojas en la urna $\mathcal{A}$ luego de tres pasos? ¿Y luego de varios pasos?

c) Expresar el vector probabilidad $\mathbf{P}(s)$ en términos de los autovectores a izquierda y derecha para este problema.

Problema 7: Cada segundo una bacteria tiene probabilidad 2/3 de reproducirse dividiendose en dos. Si el número de bacterias n es mayor o igual a 4, la falta de alimento produce una gran mortalidad, sólo logra sobrevivir una bacteria y la población vuelve a $n = 1$. Analizando el proceso como una cadena de Markov:

a) Escribir la matriz de transición

b) Encontrar el estado estacionario

c) Si inicialmente tenemos 2 bacterias, ¿ cuál es el estado del sistema 2 segundos después?

d) Si modificamos el problema diciendo que cada segundo las bacterias tienen además cierta probabilidad p de morir ¿ cuál es el estado estacionario y qué características tiene? (en este caso no es necesario hacer cuentas)

Problema 8: Las ecuaciones maestras que dependen de variables estocásticas discretas generalmente son más fáciles de resolver utilizando la denominada función generatriz, la cual se define como:

$$F(z,t) = \sum_n P(n,t) z^n$$

donde $P(n,t)$ es la probabilidad regida por la ecuación maestra en cuestión.

a) Demostrar que

$$\begin{aligned} F(1,t) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} F(z,t)|_{z=1} &= \langle n \rangle_t \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z,t)|_{z=1} &= \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t \end{aligned}$$

b) La ecuación maestra

$$\dot{p}_n = p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n \quad ; \quad (-\infty < n < \infty)$$

representa la denominada caminata aleatoria simétrica. Hallar la ecuación diferencial que rige la evolución de la función generatriz correspondiente y resolver dicha ecuación. Expandiendo en potencias de z la $F(z,t)$ hallada, demostrar que

$$p_n(t) = e^{-2t} \sum_l \frac{t^{2l+n}}{(l+n)!\, l!}$$

Problema 9: En una caminata unidimensional al azar, la probabilidad de moverse hacia la derecha es α y hacia la izquierda es β. Escribir la ecuación maestra correspondiente y resolverla utilizando la transformación

$$p_n(t) = q_n(t) (\frac{\beta}{\alpha})^{n/2} \exp\{-(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta})t\}$$

Encontrar $<n>$. ¿A qué situación física corresponde este proceso?

Problema 10: Sea un proceso de Markov contínuo en el tiempo cuyo rango consiste de enteros n y cuya matriz de transición es tal que **sólo** permite transiciones entre sitios adyacentes. Si r_n es la probabilidad por unidad de tiempo de que estando en n ocurra una transición hacia $n-1$; y g_n la correspondiente para que ocurra hacia $n+1$,

a) Escriba la ecuación maestra correspondiente.

b) Encuentre una ecuación para la evolución temporal de $\langle n \rangle$ (tenga en cuenta que tanto r_n como g_n pueden depender de n).

c) Resuelva la ecuación anterior para el caso $r_n = \alpha n$ y $g_n = \beta$ y halle la solución estacionaria. Discuta el caso $\beta = 0$.

Problema 11: Una muestra radioactiva tiene a $t = 0$ n_o núcleos activos. Si la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo es α,

a) Encontrar la ecuación maestra asociada.

b) Encontrar la ecuación de evolución para la función generatriz $F(s,t)$.

c) Encontrar la condición inicial $F(s,0)$ y, proponiendo una solución del tipo $F(s,t) = \phi((1-s)e^{-\alpha t})$, obtener $F(s,t)$.

d) Calcular $<n>$ y σ.