Ejercicios de combinatoria y probabilidades

1.

a) Es el caso de permutaciones:

$$5! = 5.4.3.2.1 = \boxed{120 \text{ formas}}$$

b) Si dos personas quieren salir juntos será como tener cuatro personas ⇒ tengo $4! = 4.3.2.1 = 24$ formas de acomodarse pero como ellos (J & A) pueden switchear debo tener en cuenta permutaciones entre dos

$$(4!)(2) = \boxed{48 \text{ formas}}$$

c) De los $5!$ ordenamientos hay $4!2$ que los tienen juntos a J & A ⇒

$$Pr = \frac{4!2}{5!} = \frac{\cancel{4!}2}{5.\cancel{4!}} \Rightarrow \boxed{P_r = 2/5}$$

2. Palabras con a,b,c,d,e,f (seis letras) de 3 letras. Corresponde a tomar grupos de 3 elementos con seis elementos para elegir

$$\# = N.(N-1)(N-2)$$

En el 1er lugar puedo poner N elementos, en el 2do (N-1) y sucesivamente así.

$$\# = 6.5.4 = \boxed{120 \text{ palabras}}$$

3. M A N Z A N A

Si fuesen letras todas diferentes tengo $7!$ ordenamientos (anagramas). Pero debo descontar las permutaciones entre letras repetidas (que no alteran la palabra) →

$$\frac{7!}{2!\,3!} = \frac{7.6.5.\overset{2}{\cancel{4}}.\cancel{3!}}{\cancel{2}\,\cancel{3!}}$$

$$\rightarrow \boxed{420 \text{ anagramas}}$$

4. 3 3 1 1 1 0 0 9

En total tendremos $\frac{8!}{2!\,3!\,2!} = \frac{8.7.\overset{3}{\cancel{6}}.5.\overset{2}{\cancel{4}}.\cancel{3!}}{\cancel{2}\,\cancel{2}\,\cancel{3!}} = 1680$ posibles # de tel. →

$$\boxed{Prob. = \frac{1}{1680}}$$

5. Como todos tienen que jugar entre sí, y no me interesa el orden (no hay local/visitante) será:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}.5.\cancel{4!}}{\cancel{2}\,\cancel{4!}} \Rightarrow \boxed{\# \text{ partidos} = 15}$$

6. La prob. de obtener tres seis exactamente en los 3 primeros dados será:

$$Pr = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Pero como no se requiere que aparezcan en algún lugar específico hay que tener en cuenta las permutaciones → sin embargo hay prob. repetidas: 7 con 5/6 y 3 con 1/6 ⇒ descuento esas permutaciones

$$Pr = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 \underbrace{\frac{10!}{3!\,7!}}$$

$$\frac{\overset{5}{\cancel{10}}.\overset{3}{\cancel{9}}.8}{\cancel{3}.\cancel{2}} \rightarrow \boxed{Prob. = 120\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7} \approx 0{,}15$$

7. bacteria → prob. "p" de reproducirse; → prob "1-p" de no reproducirse

Solo dos se reproducirán.

$$Pr = p.p.(1-p).(1-p)(1-p)$$

Probabilidad de que se reproduzcan las dos primeras y no las 3 siguientes

Ahora metemos las permutaciones para tener en cuenta que cualesquiera dos se reproducirán

$$Pr = p^2 (1-p)^3 \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = \boxed{p^2 \cdot (1-p)^3 \cdot 10}$$

9.

7b
3n

5b
5n

A:: bola negra extraída de A
B:: bola negra extraída de B

$P(A) = 3/10$ prob de que ocurra A

$P(A|B) = 6/11$ Prob. de que ocurra B si ocurrió A

$$P(A) \cdot P(A|B) = P(B \cap A)$$

$$3/10 \cdot 6/11 = 18/110 = P(B \cap A) \approx 0{,}163$$

8.

Truco: 1 mano = 3 cartas x jugador. 40 cartas útiles
4 jugadores

a) Manos a formar con 40 cartas (casos totales)

$$C_{40}^{3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \cancel{37!}}{3!\,\cancel{37!}} = \frac{20 \cdot 39 \cdot 38}{3}$$

Manos con el uno de espadas (casos favorables)

$$C_{39}^{2} = \frac{39 \cdot 38 \cdot \cancel{37!}}{2!\,\cancel{37!}} = \frac{39 \cdot 19}{1}$$

Prob de tener una mano con el 1 de espadas $\rightarrow = \frac{\cancel{39} \cdot 19}{1} \cdot \frac{3}{20 \cdot \cancel{39} \cdot \cancel{38}_{2}} = \boxed{\frac{3}{40}}$

$$P(1 \text{ espada}) + P(\text{No } 1 \text{ espada}) = 1$$

$$P(\text{NO } 1 \text{ espada}) = 1 - 3/40$$

Prob. de que a un jugador NO LE toque el 1 en el partido $\boxed{P = \left(\frac{37}{40}\right)^{15} \cong 0{,}31} \Leftarrow \boxed{P(\text{NO SALGA } 1 \text{ espada}) = \frac{37}{40}}$

b) La prob. de tener el uno de espadas para los 4 jugadores será considerando 1 mano de 12 cartas.

$$C_{40}^{12} = \frac{40!}{12!\,28!} \qquad C_{39}^{11} = \frac{39!}{11!\,28!} \rightarrow$$

Prob. de tener el uno de espadas entre los cuatro jugadores $P = \frac{\cancel{39!}}{\cancel{11!\,28!}} \cdot \frac{\cancel{12!}\,\cancel{28!}}{\cancel{40!}} = \frac{3}{10}$

$P = 3/10$

$$P(\text{Ancho}) + P(\text{No Ancho}) = 1 \rightarrow P(\text{No SALGA } 1 \text{ espada}) = 7/10$$

Prob de que el ancho no salga en todo el partido $\boxed{P = \left(\frac{7}{10}\right)^{15} \cong 0{,}0047}$