Práctica 7

1.

a) (No interactuantes)

N partículas idénticas de spin 1/2 → son fermiones

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega^2 x_i^2}{2} \underset{\text{misma masa}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega x_i^2}{2}$$

Los autoestados del hamiltoniano para cada partícula serán $|n\rangle$, pero tenemos dos posibilidades de spin $+\uparrow$, $-\downarrow$ y entonces, como son fermiones, esperaremos

$$\left.\begin{array}{l} \#1 \text{ en } |0,+\rangle \\ \#2 \text{ en } |0,-\rangle \end{array}\right\} \longrightarrow E_0 = \hbar\omega \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \#3 \text{ en } |1,+\rangle \\ \#4 \text{ en } |1,-\rangle \end{array}\right\} \longrightarrow E_1 = \hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \#5 \text{ en } |2,+\rangle \\ \#6 \text{ en } |2,-\rangle \end{array}\right\} \longrightarrow E_2 = \hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right)$$

$$\#7 \text{ en } |3,+\rangle$$

impares: partícula # $2n+1 \equiv p$ se hallará en estado $|n,+\rangle$ con energía $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

pares: partícula # $2n+2 \equiv p$ se hallará en estado $|n,-\rangle$ con energía $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$$E_0 = \sum_{n=0}^{N} E_n \quad \text{energía de cada partícula}$$

$$E_0 = \sum_{\substack{\text{impares}\\ p=1}}^{N} \hbar\omega \underbrace{\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]}_{\frac{p}{2}} + \sum_{\substack{\text{pares}\\ p=2}}^{N} \hbar\omega \underbrace{\left[\frac{p-2}{2}+\frac{1}{2}\right]}_{\frac{p-1}{2}}$$

$$\boxed{E_0 = \sum_{\substack{\text{impar}\\ p=1}}^{N} \frac{\hbar\omega}{2}(p) + \sum_{\substack{\text{pares}\\ p=2}}^{N} \frac{\hbar\omega}{2}(p-1)}$$

b) $N=2$

$$\begin{array}{lll} \#1 & \text{en } |0,+\rangle, & |0,-\rangle \\ \#2 & \text{en } |0,-\rangle; & |0,+\rangle \end{array}$$

$$|k'k''\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k'\rangle_1 \otimes |k''\rangle_2 - |k''\rangle_1 \otimes |k'\rangle_2\right)$$

Necesito ket estado antisimétrico por ser fermiones

$$\boxed{|\psi_{sist}\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0+\rangle_1 |0-\rangle_2 - |0-\rangle_1 |0+\rangle_2\right)}$$

vector de estado del sistema corresp. al fundamental

El hamiltoniano es $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_2^2}{2}$ es simétrico ante el intercambio $1 \to 2$ → $HP_{12} = P_{12}H$

$$|\Psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0+\rangle|0-\rangle - |0-\rangle|0+\rangle\right)$$

$$|\Psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_2 - |0\rangle_1|-\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_2\right)$$

$$|\Psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1^{\otimes}|0\rangle_2^{\otimes}\left[|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right]\right)$$

$$|\Psi\rangle_A = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes \left(\frac{|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2}{\sqrt{2}}\right)$$

Este es el $|00\rangle$ de la suma de momentos angulares $s_1 = \pm 1/2$ $s_2 = \pm 1/2$

La parte de spin es nula $\Rightarrow$ El valor total del spin es nulo.

2.

Dos partículas de spin $\frac{3}{2}$ con $l=0$ $\rightarrow$ son partículas con spin semientero $\Rightarrow$ fermiones

$J_1 = \frac{3}{2}$, $J_2 = \frac{3}{2}$ $\qquad 0 \leq J \leq 3 \quad -J \leq m \leq J$

Si las partículas son idénticas.
Escribamos un estado general

$$|J_1, J_2; \underset{\substack{\downarrow \\ J \text{ total} \\ J_1+J_2}}{J}, \underset{\substack{\downarrow \\ J_z \text{ total}}}{m}\rangle = \sum_{m_1 m_2} |J_1 J_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle J_1 J_2; m_1, m_2 | J_1 J_2; J, m\rangle}_{\text{coef. de C-G}}$$

$$|J, m\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \langle m_1 m_2 | J\, m\rangle \underbrace{|m_1\, m_2\rangle}_{|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle}$$

Pero esta función debe ser antisimétrica $\rightarrow$

Importantísimo

$\boxed{P_{ij} \text{ opera sobre kets No sobre escalares}}$

$$P_{12}|J, m\rangle = -|J, m\rangle$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \langle m_1 m_2 | J\, m\rangle\, |m_2\rangle \otimes |m_1\rangle$$

switcheo los índices mudos de las Σ

$$-|J, m\rangle = \sum_{m_2}\sum_{m_1} \langle m_2 m_1 | J\, m\rangle\, |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$$

$$\sum\sum -\langle m_1 m_2 | J\, m\rangle |m_1\, m_2\rangle = \sum\sum \langle m_2 m_1 | J m\rangle |m_1\, m_2\rangle$$

$$-\langle m_1 m_2 | J\, m\rangle = \langle m_2\, m_1 | J m\rangle$$

pero, según formula Ej. 3-P7. es:

$$\langle m_1 m_2 | J m\rangle = (-1)^{J_1+J_2-J} \langle m_2 m_1 | J m\rangle$$

$$(-1)^{J_1+J_2-J} = -1 \quad \rightarrow \quad J_1+J_2-J = 2n+1 \qquad n \in \mathbb{N}_{0+}$$

$$3 - J = 2n+1$$

pero $J = 0, 1, 2, 3$ $\rightarrow$

	$0 = 2n+1$	$\rightarrow \nexists n$
$J=2$	$1 = 2n+1$	$\rightarrow n=0$
	$2 = 2n+1$	$\rightarrow \nexists n$
$J=0$	$3 = 2n+1$	$\rightarrow n=1$

$\boxed{\text{Como restricción se obtiene que si son partículas idénticas solo hay acople con } J=0 \text{ y con } J=2}$

3. Dos fermiones idénticos $\rightarrow$ $|\Psi\rangle_A$ es antisimétrica la función de onda

misma órbita j $\rightarrow$ $J_1 = J_2 = J'$ $\quad 0 \leq J \leq 2J'$

$$|\phi\rangle = |J'J', J, m\rangle = \sum_m \sum_{m'} \langle J'J'; m\,m' \,|\, J'J'; J\,m\rangle \; |J'J'; m\,m'\rangle$$

La función de onda y su ket deben ser antisimétricos

$$P_{12}\,|J'J', J\,m\rangle = \sum_{m'} \sum_{m} \langle \quad ; m\,m' | \qquad \rangle \, |J'J'; m'\,m\rangle$$

$$-|J'J'; J\,m\rangle = \sum_{m', m} (-1)^{J'+J'-J} \langle J'J'; m'm \,|\, J'J'; J\,m\rangle \, |J'J'; m'\,m\rangle$$

$$= (-1)^{2J'-J} \sum_{m', m} \langle J'J'; m'm \,|\, J'J'; J\,m\rangle \, |J'J', m'\,m\rangle$$

$$= (-1)^{2J'-J} \, |J'J'; J\,m\rangle$$

NOTAS

- En realidad $|J'J'; m\,m'\rangle$ habría que escribirla: $|J'\,m\rangle_1 \otimes |J'\,m'\rangle_2$
- fermion $\Rightarrow$ spin es semientero $s = \left(\frac{2n-1}{2}\right)$

requiere que $2J' - J = 2n - 1 \quad n \in \mathbb{N}$

$$2J' - 2n + 1 = J$$

Pero J' para fermiones es de la forma $\frac{(2m'-1)}{2}$ con $m' \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$2m' - 1 - 2n + 1 = J$$

$$\boxed{2(m' - n) = J}$$

Entonces el impulso angular total J deberá ser par para dos fermiones idénticos.

4.

Para dos bosones se tendrá:

$*$ spin entero $\longrightarrow$ $s = n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ [En este caso $s = \ell$]

$$|\phi\rangle = |\ell\,\ell; L\,M\rangle = \sum_{m, m'} \langle \ell\,\ell; m\,m' \,|\, \ell\,\ell; L\,M\rangle \, |\ell\,\ell; m\,m'\rangle$$

La función de onda (y su ket correspondiente) debe ser simétrica

$$P_{12}\,|\ell\,\ell; L\,M\rangle = \sum_{m, m'} \langle \ell\,\ell; m\,m' \,|\, \ell\,\ell; L\,M\rangle \, |\ell\,\ell, m'\,m\rangle$$

$$|\ell\,\ell; L\,M\rangle = (-1)^{\ell+\ell-L} \sum_{m, m'} \langle \ell\,\ell, m'm \,|\, \ell\,\ell; L\,M\rangle \, |\ell\,\ell\; m'\,m\rangle$$

$$= (-1)^{\ell+\ell-L} \, |\ell\,\ell; L\,M\rangle$$

$$\ell + \ell - L = 2m \quad , m \in \mathbb{N}$$

$$2(\ell - m) = L \quad \Rightarrow \quad \boxed{L \text{ es par}}$$

5.

a) 2 bosones de spin 1 → spin vale $-1, 0, 1$

Como son bosones su ket será simétrico respecto a P_{ij} →

$$P_{ij}\,|B'\,B''\rangle = +\,|B'\,B''\rangle$$

$\overset{\text{dim}}{\{Base\}} = (\text{Labels})^{\#\text{part}}$

$|1\rangle = |-\rangle|-\rangle$
$|2\rangle = |+\rangle|+\rangle$
$|3\rangle = |0\rangle|0\rangle$

La base estará conformada de 9 elementos

estados repetidos (3 labels) → (3) $\begin{cases} |++\rangle \\ |--\rangle \\ |00\rangle \end{cases}$ estados no repetidos → tendremos $C^2_3 = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2}$ 3 kets con labels diferentes

$|4\rangle = \dfrac{|-+\rangle + |+-\rangle}{\sqrt{2}}$

$|5\rangle = \dfrac{|+0\rangle + |0+\rangle}{\sqrt{2}}$

$|6\rangle = \dfrac{|-0\rangle + |0-\rangle}{\sqrt{2}}$

estados no repetidos $\begin{cases} |+-\rangle + |-+\rangle \,,\; |-0\rangle + |0-\rangle \\ |+0\rangle + |0+\rangle \end{cases}$

b)

La dimensión de la base será: $3^3 = 27$

Estados simétricos de 3 labels repetidas → (3) $\begin{cases} |---\rangle ,\; |000\rangle \\ |+++\rangle \end{cases}$

Estados simétricos de no repetidos $C^3_3 = 1$ →

$\{\, |+-0\rangle + |-0+\rangle + |0+-\rangle + |-+0\rangle + |+0-\rangle + |0-+\rangle$

Estados simétricos de labels repetidas (2) [Se ve que hay seis]

$|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle$

(idem por permutación cíclica los otros cinco)

; Entonces serán

$|1\rangle = |---\rangle$, $|2\rangle = |+++\rangle$, $|3\rangle = |000\rangle$

Los construyo con permutaciones cíclicas P_{12}, P_{13},

P_{12}, P_{23}, P_{13}

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle\right)$$
$$|5\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|00-\rangle + |0-0\rangle + |-00\rangle\right)$$
$$|6\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|00+\rangle + |0+0\rangle + |+00\rangle\right)$$
$$|7\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|--0\rangle + |-0-\rangle + |0--\rangle\right)$$
$$|8\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|--+\rangle + |-+-\rangle + |+--\rangle\right)$$
$$|9\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|++0\rangle + |+0+\rangle + |0++\rangle\right)$$

Se debe conservar la suma de cada lugar en toda la combinación

$|0 \ast\, -\rangle +$
$|\ast \ast \ast\rangle +$
$|0 \ast \ast\rangle +$
— — —

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|0+-\rangle + |+-0\rangle + |-0+\rangle + |0-+\rangle + |-+0\rangle + |+0-\rangle\right)$$

Tenemos 10 estados simétricos

c) fermiones, antisimétricos spin $7/2$

$-\frac{7}{2} \le spin \le \frac{7}{2}$

habrá 8 labels posibles $\nearrow -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

dim. base $8^2 = 64$

$$\{|s_1\ s_2\rangle\} = \begin{array}{ccc} |-7\ -7\rangle & |-5\ -7\rangle & |-3\ -7\rangle \\ |-7\ -5\rangle & |-5\ -5\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad -3\rangle & |\quad -3\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad -1\rangle & |\quad -1\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad 1\rangle & |\quad 1\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad 3\rangle & |\quad 3\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad 5\rangle & |\quad 5\rangle & |\quad\ \rangle \\ |\quad 7\rangle & |\quad 7\rangle & |\quad\ \rangle \end{array}$$

la base tiene dim. 64

Como los estados deben ser antisimétricos tendremos que tener los índices diferentes

$$\begin{aligned} |1\rangle &= 1/\sqrt{2}\left(|-7\ -5\rangle - |-5\ -7\rangle\right) \\ &= \text{"}\ \left(|-7\ -3\rangle - |-3\ -7\rangle\right) \\ &\quad\ \left(|-7\ -1\rangle\right. \\ &\quad\ \left(|-7\ 1\rangle\right. \\ &\quad\ \left(|-7\ 3\rangle\right. \\ &\quad\ \left(|-7\ 5\rangle - |5\ -7\rangle\right. \\ &\quad\ \left(|-7\ 7\rangle\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1/\sqrt{2}\left(|-5\ -3\rangle - |-3\ -5\rangle\right) \\ &= \quad\ \left(|-5\ -1\rangle\right. \\ &= \quad\ |-5\ 1\rangle \\ &\quad\quad\ |\quad 3\rangle \\ &\quad\quad\ |-5\ 5\rangle \\ &\quad\quad\ |-5\ 7\rangle \end{aligned}$$

Como se puede hacer lo mismo en cada columna hasta $|-1\ \#\rangle$ inclusive tendremos $4 \times 7 = 28$ estados

6. Dos partículas en N=2 de oscilador armónico 3D isótropo

$$E_N = \hbar\omega\left(N+\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad N = 2n+l$$

a) Sean fermiones de spin $1/2$

base $\quad l_1 l_2\ s_1 s_2\ m_{l_1}\ m_{l_2}\ m_{s_1}\ m_{s_2}$ $\qquad -l \leq m_l \leq l$, $\ -s \leq m_s \leq s$

$N=2 \Rightarrow$ 1 partícula

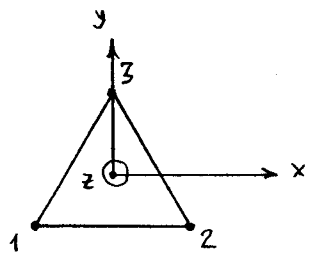
n ; 2n=k	l	ms	ml	estados
1	0	$\pm 1/2$	0	2
0	2	$\pm 1/2$	-2, -1, 0, 1, 2	10

$s_1 = s_2 = 1/2 \rightarrow$ no la escribo

$|0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ +\tfrac{1}{2}\ +\tfrac{1}{2}\rangle$
$|\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle$
$|\qquad\qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\ +\tfrac{1}{2}\rangle$
$|\qquad\qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle$
$|2\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ -2\ 0\ {}^{\pm 1/2}_{-1/2}\ {}^{\pm}_{-}1/2\rangle$
$|\qquad -1\qquad\rangle$
$|\qquad 0\qquad\rangle$
$|\qquad 1\qquad\rangle$
$|\qquad 2\qquad\rangle$
$|0\ 2\qquad 0\ -2\qquad\rangle$
$|\qquad\quad -1\qquad\rangle$
$|\qquad\quad 0\qquad\rangle$
$|\qquad\quad 1\qquad\rangle$
$|\qquad\quad 2\qquad\rangle$
$|2\ 2\qquad -2\ -2\qquad\rangle$
$|\qquad -1\ -1\qquad\rangle$
$|\qquad 0\ 0\qquad\rangle$
$|\qquad 1\ 1\qquad\rangle$
$|\qquad 2\ 2\qquad\rangle$

$$|1\rangle = |0\ 0\ 0\ 0\rangle \otimes \left(|+\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\ +\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$|2\rangle = |0\ 0\ 0\ 0\rangle \otimes \left(|-\tfrac{1}{2}\ +\tfrac{1}{2}\rangle - |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

7.



3 partículas idénticas de spin 0 $\Rightarrow$ bosones (spin entero)

El ket de estado para las tres partículas será:

$$|\alpha\rangle = |\,0\;0\;a\,\rangle$$

El operador permutación aquí será el que giro el triángulo

$$\underset{\substack{12\\23\\31}}{P} = \mathcal{D}_{(R)}\left(\hat{z}, \frac{2}{3}\pi\right) = e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\frac{\pi 2}{3}} \rightarrow$$

$$e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\frac{2\pi}{3}}|\alpha\rangle = +|\alpha\rangle$$, por ser bosones

si $|\alpha\rangle = |m'\rangle$ son autoestados de momento $\rightarrow$

$$\left(e^{-i\frac{m'}{\cancel{\hbar}}\frac{2\pi\cancel{\hbar}}{3}} - 1\right)|m'\rangle = 0 \rightarrow$$

$$e^{-im'\frac{2\pi}{3}} = 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}m'\right) = 1 \;\wedge\; \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}m'\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{2\pi}}{3}m' = \cancel{2}k\cancel{\pi} \;\wedge\; \frac{2\pi}{3}m' = k\pi \quad , k \in \mathbb{N} + \{0\}$$

$$m' = 3k$$

$$m' = 3k \;\wedge\; m' = k\frac{3}{2} \Rightarrow \text{la intersección da } 3k = m'$$

$$\boxed{J_z \text{ tendrá valores: } m\hbar \rightarrow \quad 3\hbar, 6\hbar, 3\hbar, \text{etc.}}$$

8. * Tres partículas de spin 1 (bosones) que interactúan débilmente.

* La ψ debe ser totalmente simétrica por ser bosones las partículas.

* El spin valdrá $-1, 0, +1$

$$\psi = \underbrace{\psi_{spa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)}_{\text{simétrico}} \cdot \psi_{spin} \quad ,$$

simétrico $\rightarrow$

$$P_{12}\psi_{spa} = +\psi_{spa}$$
$$P_{13}\psi_{spa} = +\psi_{spa}$$
$$P_{23}\psi_{spa} = +\psi_{spa}$$

La parte de spin debe ser simétrica

#1	+
#2	0
#3	+

$|+\rangle|0\rangle|+\rangle$

i) Las tres partículas en $|+\rangle$; sea $\psi_{spin} = \chi$

$$|\chi\rangle_s = |+\rangle|+\rangle|+\rangle$$ spin total $= 3$

ii) Dos de ellas en $|+\rangle$, la otra en $|0\rangle$

$$|\chi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle|+\rangle|0\rangle + |+\rangle|0\rangle|+\rangle + |0\rangle|+\rangle|+\rangle\right)$$

spin total $= 2$

iii) Las tres en diferentes estados

$$|\Psi\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|+\rangle|-\rangle|0\rangle + |-\rangle|0\rangle|+\rangle + |0\rangle|+\rangle|-\rangle$$
$$|-\rangle|+\rangle|0\rangle + |+\rangle|0\rangle|-\rangle + |0\rangle|-\rangle|+\rangle\Big)$$

spín total $= 0$

b) Sea que la parte espacial es antisimétrica →

$$\Psi = \underbrace{\Psi_{spa}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)}_{\text{Antisimétrica}} \cdot \Psi_{spin}$$

⇒ la $\Psi_{spin} = \chi$ será antisimétrica →

i) No hay estado con las tres partículas en $|+\rangle$ antisimétricos

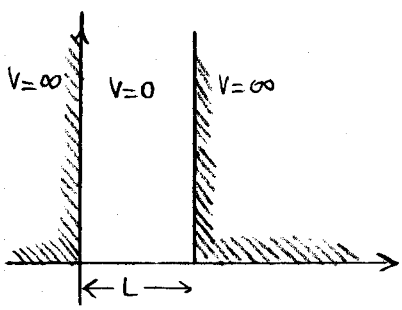
ii)
$$|++0\rangle \quad -|++0\rangle$$
No puedo formar un estado totalmente antisimétrico con dos repetidas

ii)
$$|\Psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|+\rangle|-\rangle|0\rangle + |-\rangle|0\rangle|+\rangle + |0\rangle|+\rangle|-\rangle$$
$$-|-\rangle|+\rangle|0\rangle - |0\rangle|-\rangle|+\rangle - |+\rangle|0\rangle|-\rangle\Big)$$

spín total $= 0$

9.

2 fermiones de spín $\frac{1}{2}$; pozo infinito en 1D



$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2 m L^2}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , n = 1, 2, 3$$

Como suponemos que no interactúan

→ $[H, \vec{S}] = 0$ → $\Psi(x) = \Psi_{spa}(x_1, x_2) \cdot \Psi_{spín}$

La parte de spín corresponde a sumar dos mom. angulares $J_1 = \frac{1}{2}$ $J_2 = \frac{1}{2}$

$0 \leq J \leq 1$ $\quad J = 0, 1$

$-J \leq m \leq J$ $\quad m = -1, 0, 1$ $\quad$ 2 bases

$\{|J, m\rangle\}$ $\quad \{|m_1, m_2\rangle\}$

	$\{\lvert J\ m\rangle\}$		$\{\lvert m_1, m_2\rangle\}$	
$J=0$	$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle$	$=$	$\frac{\lvert +-\rangle - \lvert -+\rangle}{\sqrt{2}}$	singlete
$J=1$	$\lvert 1\rangle\lvert -1\rangle$	$=$	$\lvert -\rangle\lvert -\rangle$	triplete
	$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$	$=$	$\frac{\lvert +-\rangle + \lvert -+\rangle}{\sqrt{2}}$	
	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$	$=$	$\lvert +\rangle\lvert +\rangle$	

EL triplete de spin es simétrico → $\Psi_{spa}(x_1, x_2)$ deberá ser antisimétrica →

$$\Psi_{spa}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2) \cdot \psi_2(x_1)\right].$$

$$\rightarrow \Psi_{\substack{TOT \\ A}} = \Psi_{spa}(x_1, x_2) \cdot \begin{cases} \chi_{--} \\ \chi_{++} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{+-} + \chi_{-+}) \end{cases}$$

La energía del estado fundamental será

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(n_1^2 + n_2^2 \right)$$

y el estado fundamental será $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ puesto que se diferencian por el spin

$$E_f = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot (1+1)$$

b) Si se hallan en el singlete $\rightarrow \psi_{spa}(x_1, x_2)$ deberá ser simétrica puesto que el singlete es antisimétrico $\Rightarrow$

$$\psi_{spa}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1(x_1) \cdot \psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\, \psi_2(x_1) \right)$$

$$\psi_{total}(x_1, x_2) = \psi_{spa} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+-\rangle - |-+\rangle \right] \right)$$

, donde ψ_{spa} también podría ser

$$\psi_{spa} = \psi_1(x_1) \cdot \psi_2(x_1)$$

$$\psi_{spa} = \psi_1(x_2) \cdot \psi_2(x_2)$$ si fuesen bosones las partículas

Ahora la energía del estado fundamental será $\begin{cases} n_1 = 1, & n_2 = 2 \\ n_1 = 2, & n_1 = 1 \end{cases}$ porque no las podemos diferenciar por el spin ahora

$$E_f = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left(1 + 2^2 \right)$$

- otra notación

$$|n_1\, n_2\rangle |\overset{\text{spin 1}}{m_1}\ \overset{\text{spin 2}}{m_2}\rangle \qquad \text{o la otra base} \qquad |n_1\, n_2\rangle |\, J\ \overset{\text{spin 1 + spin 2}}{m}\rangle$$

triplete (simétrico) $\Rightarrow$ espacial (antisimétrica)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_1 n_2\rangle - |n_2 n_1\rangle \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right)$$

$$\text{''} \qquad \cdot \left(|++\rangle \right)$$

$$\text{''} \qquad \cdot \left(|--\rangle \right)$$

singlete (antisimétrico) $\Rightarrow$ espacial (simétrico)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_1\, n_2\rangle + |n_2\, n_1\rangle \right) \underbrace{|0\ 0\rangle}_{\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}}$$