Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2006

Práctica 4: Suma de momentos angulares y teorema de Wigner-Eckart

1. Considere una partícula de espín $1/2$ en un estado con $l = 1$.

   a) Encuentre el estado con j_{max} y m_{jmax} en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

   b) Use $J_- = L_- + S_-$para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

   c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

   d) Use J_-para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

   e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

2. Se intenta sumar impulsos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$ para formar estados con $j = 2, 1,$ y 0. Usando las relaciones de recurrencia, exprese todos los autoestados $\{j, m\}$ (nueve) en términos de los $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$. Escriba su respuesta en la forma

$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, +\rangle, ...$$

   donde $+$ y 0 representan $m_{1,2} = 1, 0$ respectivamente.

3. Considere dos partículas con espín $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsh-Gordan por dos caminos diferentes:

   a) Escriba los kets correspondientes a los posibles estados de espín en la base de autoestados de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$|s = 1, m = 1\rangle, |s = 1, m = -1\rangle, |s = 1, m = 0\rangle, |s = 0, m = 0\rangle,$$

   en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

   b) Escriba la matriz de 4×4 que corresponde a la representación del operador

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

   en la base $\{m_1, m_2\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza esta matriz. ¿Puede identificar sus elementos?

4. Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{\hbar^2},$$

donde $H_0 = p^2/2m - e^2/r$, y $\mathbf{S}$ representa el espín del electrón.

   a) Evalúe los conmutadores

   $$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

   donde $\mathbf{J} = \mathbf{L}+\mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

   b) Ahora se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que se agrega al hamiltoniano el término

   $$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}B(L_z + 2S_z),$$

   Para este caso, repita el punto (a).

5. Considere dos partículas de igual masa, que se mueven sobre una recta con abscisas x_1 y x_2 y que se encuentran bajo la acción de un potencial

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x_2 + a)^2$$

   a) Escriba las ecuaciones de Newton correspondientes y analize el comportamiento del sistema tanto en el caso clásico como en el cuántico.

   b) Suponga ahora que se agrega un término al potencial de la forma

   $$V(x_1, x_2) = \lambda m\omega^2(x_1 - x_2)^2$$

   Muestre que las ecuaciones de Newton del sistema se desacoplan introduciendo las variables

   $$x_{CM} \equiv \frac{1}{2}[x_1 + x_2] \quad x_R \equiv x_1 - x_2$$

   y escriba el Hamiltoniano del sistema usando tambien

   $$p_{CM} \equiv p_1 + p_2 \quad p_R \equiv \frac{1}{2}[p_1 - p_2]$$

   c) Calcule los conmutadores $[x_i, x_j]$, $[x_i, p_j]$ y $[p_i, p_j]$ para $\{i, j\} = \{CM, R\}$ y resuelva el problema cuántico representando los estados del sistema como productos de autoestados de oscilador armónico

   $$|\phi\rangle = |n_{CM}\rangle|m_R\rangle$$

d) Volviendo al caso de los osciladores desacoplados, muestre que

$$J_{1(2)} \equiv \hbar a^{\dagger}_{1(2)} a_{2(1)} \quad J_z \equiv \frac{\hbar}{2}\left(a^{\dagger}_1 a_1 - a^{\dagger}_2 a_2\right) \quad N \equiv a^{\dagger}_1 a_1 + a^{\dagger}_2 a_2$$

satisfacen

$$\left[J_z, J_{1(2)}\right] = \pm\hbar J_{1(2)} \quad \left[J^2, J_z\right] = 0 \quad J^2 = \frac{\hbar^2}{2} N\left(\frac{N}{2}+1\right)$$

Interprete estos resultados.

6. Considere un sistema formado por dos partículas de espín 1/2. Un observador A se especializa en medir las componentes de espín de una de las partículas (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}), mientras que el observador B mide las componentes de espín de la otra partícula. Suponga que se sabe que el sistema está en un estado singlete de espín, es decir que $S_{total} = 0$.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el observador A obtenga $S_{1z} = \hbar/2$ cuando el observador B no efectúa mediciones? Repita el cálculo para $S_{1x} = \hbar/2$.

   b) El observador B determina con certeza que la partícula 2 se encuentra en un estado $S_{2z} = \hbar/2$. ¿Qué puede decir sobre el resultado de la medición de A si: (i) A mide S_{1z}, (ii) A mide S_{1x}? Justifique su respuesta.

7. *a*) Evalúe

$$\sum_{m=-j}^{j} |d^{(j)}_{m,m'}(\beta)|^2 m$$

   para cualquier j (entero o semi-entero). Verifique su respuesta para $j = 1/2$.

   b) Pruebe para cualquier j

$$\sum_{m=-j}^{j} m^2 |d^{(j)}_{m,m'}(\beta)|^2 = \frac{1}{2} j(j+1)\sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1)$$

   [Ayuda: Esto puede ser probado de muchas maneras. Por ejemplo, puede estudiar las propiedades ante rotaciones de J_z^2 usando el lenguaje de los tensores esféricos irreducibles.]

8. *a*) Construya un tensor esférico de rango 1 a partir de dos vectores diferentes $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ y $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Dé la función explícita de $T^{(1)}_{\pm1,0}$ en términos de $U_{x,y,z}$ y $V_{x,y,z}$.

   b) Construya el tensor esférico de rango 2 a partir de dos vectores distintos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. Dé la expresión de sus cinco componentes $T^{(2)}_{\pm2,\pm1,0}$ en función de las componentes de los vectores.

9. Considere un tensor esférico de rango 1 (es decir, un vector)

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm i V_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0^{(1)} = V_z$$

Usando la expresión para $d^{(j=1)}$ dada en la guía anterior, evalúe

$$\sum_{q'} d_{qq'}^{(1)}(\beta) V_{q'}^{(1)}$$

y muestre que sus resultados son los que esperaría de las propiedades de transformación de $V_{x,y,z}$ ante rotaciones respecto del eje y.

10. *a*) Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Relacione lo máximo posible los elementos de matriz,

$$\langle n', l', m' | \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) | n, l, m \rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. Esté seguro de establecer correctamente qué elementos de matriz son no nulos.

b) Repita el punto (a) usando funciones de onda $\Phi(x) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$.

11. *a*) Escriba xy, xz y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.

b) El valor de expectación

$$Q = e \langle \alpha, j, m = j \left| \left(3z^2 - r^2 \right) \right| \alpha, j, m = j \rangle$$

es conocido como el momento cuadrupolar. Evalúe

$$e \langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j \rangle$$

(donde $m' = j, j-1, j-2, \ldots$) en función de Q y los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados.