Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2006

Práctica 3: Impulso angular y rotaciones

1. Considere la matriz de 2×2
$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}}$$
donde a_0 es un número real, y $\mathbf{a}$ es un vector de 3 componentes reales.

   a) Pruebe que U es unitaria y unimodular.

   b) En general, una matriz unitaria unimodular de 2×2 representa una rotación en tres dimensiones. Encuentre el eje y el ángulo de rotación para U en términos de a_0 y las componentes del vector $\mathbf{a}$.

2. El hamiltoniano dependiente del espín de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme $B\hat{z}$, puede escribirse como
$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)} \cdot \mathbf{S}^{(e^+)} + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)})$$
Suponga que la función de espín del sistema está dada por $|+\rangle_{e-} \otimes |-\rangle_{e+}$.

   a) ¿Es ésta una autofunción de H en el límite $A \to 0$, $eB/mc \neq 0$? Si lo es, ¿cuál es el autovalor de energía? Si no lo es, ¿cuál es el valor de expectación de H?

   b) Repita el problema cuando $eB/mc \to 0$, $A \neq 0$.

3. Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de $S_z(S_z+\hbar)(S_z-\hbar)$ y de $S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar)$ sin usar la representación matricial de S_x.

4. Considere el hamiltoniano de un cuerpo rígido
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3}\right)$$
donde $\mathbf{K}$ es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para $\mathbf{K}$, y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

5. ¿Cuál es el significado de la ecuación $U^{-1}A_kU = \sum R_{kl}A_l$, donde las tres componentes de A son matrices? A partir de esta ecuación, muestre que los elementos de matriz $\langle m|A_k|n\rangle$ se transforman como vectores.

6. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín $1/2$, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

   a) Calcule $\langle S_x\rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en el sistema original.

   b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle$$

   Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Let.* **35**, 1053 (1975) o *Phys. Today* Dic. 1980, pag. 24.

7. *a*) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

   donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores complejos en tres dimensiones.

   b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín $1/2$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I}\cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\sin\frac{\phi}{2}$$

   donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

   c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$.

   d) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares. Aplíque al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$, que representa un espín orientado según $\hat{\mathbf{n}}$.

8. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín $1/2$ representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}},\beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\gamma)$$

   a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

9. a) Considere un estado puro de sistemas de espín 1/2 preparados en forma idéntica. Suponga que los valores de expectación $\langle S_x \rangle$, $\langle S_z \rangle$ y el signo de $\langle S_y \rangle$ son conocidos. Indique cómo determinaría el vector de estado. ¿Por qué no es necesario conocer la magnitud de $\langle S_y \rangle$?

   b) Considere un estado mixto de sistemas de espín 1/2. Suponga que los promedios $[S_x]$, $[S_y]$ y $[S_z]$ son conocidos. Indique cómo construir matrices densidad de 2×2 que caractericen el estado.

10. a) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)$$

   donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.

   b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

   c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está prescripta por la ecuación de Schrödinger.

11. Considere un estado de sistemas de espín 1. La matriz densidad ahora es de 3×3. ¿Cuántos parámetros reales independientes se necesitan ahora para caracterizar la matriz densidad? ¿Qué es necesario conocer además de $[S_x]$, $[S_y]$ y $[S_z]$ para caracterizar al estado completamente?

12. Sea $\mathbf{J}$ un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

   a) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$. Demostrar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, \quad [J_z, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \\
J_+J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\
J_\pm|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle \\
J_\pm|j, \pm j\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

b) Mostrar que cualquier estado de J_z satisface $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, y que si en cierto estado $|\psi\rangle$ se satisface $J_z|\psi\rangle = \hbar m|\psi\rangle$, entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular $\mathbf{J}$ sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje z es $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \hbar m \cos\theta$. Interprete el resultado.

13. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2, L_x, L_y, y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

    a) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.

    b) Sea un estado descripto por el vector

    $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$$

    Si se mide L_x, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y.

    c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide L_y. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

14. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y. Sin usar explícitamente la forma de la función $d^{(j)}_{m'm}$, obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2.

15. Muestre que las matrices de 3×3 G_i $(i = 1, 2, 3)$ cuyos elementos están dados por $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$, donde j y k son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a G_i con las representaciones de 3×3 más usuales del operador de momento angular J_i, con J_z diagonal? Relacione su resultado con la transformación

    $$\mathbf{V} \to \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}}\,\delta\phi \times \mathbf{V}$$

    bajo rotaciones infinitesimales. **Nota:** este problema puede resultar útil para entender el espín del fotón.

16. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

    $$\Psi(x) = (x + y + 3\,z)\, f(r)$$

a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?

b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

17. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l, por ejemplo 1/2, para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$

Intente construir entonces $Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes:

a) aplicando L_- a $Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi)$,

b) usando que $L_- Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = 0$.
Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

18. *a*) Considere un sistema con $j = 1$. Escriba explícitamente

$$\langle j = 1, m'|J_y|j = 1, m\rangle$$

como matriz de 3×3.

b) Muestre que en el caso particular $j = 1$, es legítimo reemplazar $e^{iJ_y\beta/\hbar}$ por

$$1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)$$

c) Usando (b) obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) \quad = \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

19. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje y. Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0, \pm1, \pm2$. (Los armónicos esféricos pueden serle útiles).

20. La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano $H = \mathbf{L}^2/2I$ esta dada por

$$\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi \tag{1}$$

   a) Halle $\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(t) \rangle$. *Sugerencia*: exprese la función de onda en términos de los $Y_{l,m}$.

   b) Si se mide L_z. ¿Qué valores pueden obtenerse y con que probabilidad?

   c) ¿Cuál es el valor de $\langle L_x \rangle$?

   d) Si ahora se mide L_x. ¿Qué resultados pueden obtenerse y con que probabilidad?

21. *a*) Sea $\mathbf{J}$ el momento angular. Puede representar al momento angular orbital L, al espín S o a J_{total}. Usando el hecho que J_x, J_y, J_z ($J_\pm = J_x \pm iJ_y$) satisfacen las relaciones usuales de conmutación para momento angular, pruebe que

$$J^2 = J_z^2 + J_+ J_- - \hbar J_z \tag{2}$$

   b) Usando a) (o como usted quiera!) derive la "famosa" expresión para el coeficiente c_- que aparece en $J_- \psi_{jm} = c_- \psi_{j,m-1}$.

22. Un núcleo de espín $3/2$ situado en el origen es sometido a un campo eléctrico inhomogéneo. La interacción eléctrica cuadrupolar básica se puede tomar como:

$$H_{int} = \frac{eQ}{2s(s-1)\hbar^2}[(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2})_0 S_x^2 + (\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})_0 S_y^2 + (\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2})_0 S_z^2] \tag{3}$$

siendo ϕ el potencial electrostático que satisface la ecuación de Laplace, y los ejes de coordenadas se eligen de manera que

$$(\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y})_0 = (\frac{\partial^2\phi}{\partial z \partial y})_0 = (\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial z})_0 = 0. \tag{4}$$

Muestre que la energía de interacción puede ser escrita como

$$A(3S_z^2 - S^2) + B(S_+^2 + S_-^2), \tag{5}$$

Y exprese A y B en función de $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ y demas derivadas parciales. Determine los autoestados de la energía (en términos de $|m\rangle$, donde $m = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2$) y los correspondientes autovalores. ¿Hay alguna degeneración?