Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2006

Práctica 2: Dinámica Cuántica.

1. Considere el hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético externo uniforme B en la dirección z

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = \omega S_z.$$

   a) Verifique que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcule los correspondientes autovalores.

   b) Suponga que en $t = 0$ el sistema está descripto por $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$, que corresponde al estado S_x+. Calcule el ket de estado $|\alpha, t\rangle$ en un instante posterior t.

   c) Calcule la probabilidad de hallar al sistema en los estados S_x+ y S_x- en un instante posterior.

   d) Calcule el valor de expectación $\langle S_x\rangle$ en función del tiempo (*precesión del espín*).

   e) Encuentre en función de t el versor $\hat{\mathbf{n}}$ tal que $|\alpha(t)\rangle$ es autoestado del operador $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}(t)$.

2. Considere la siguiente variante del hamiltoniano de un sistema de dos niveles:

$$H = H_{11}|1\rangle\langle 1| + H_{22}|2\rangle\langle 2| + H_{12}|1\rangle\langle 2|$$

   a) ¿Qué principio viola dicho Hamiltoniano?

   b) Intente resolver el problema depdendiente del tiempo con este hamiltoniano. (Suponga $H_{11} = H_{22} = 0$ por simplicidad).

3. Sea $x(t)$ el operador coordenada para una partícula libre en una dimensión en el esquema de Heisenberg. Evalúe

$$[x(t), x(0)]$$

4. Considere una partícula en tres dimensiones cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$$

a) Calculando $[\mathbf{x}\cdot\mathbf{p},\, H]$ obtenga

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\rangle = \left\langle\frac{\mathbf{p}^2}{m}\right\rangle - \langle\mathbf{x}\cdot\nabla V\rangle$$

Para identificar la relación anterior con el análogo en mecánica cuántica del teorema del virial, resulta esencial que el miembro izquierdo sea nulo. ¿Bajo qué condición ocurre ésto?

b) Para este caso en particular, considere un potencial homogéneo de grado α, es decir $V(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha V(\mathbf{x})$. Analice los casos particulares $\alpha = -1$ (potencial de Coulomb) y $\alpha = 2$ (oscilador armónico).

c) ¿Es el operador $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}$ hermítico? Repita el cálculo realizado en (a) para $[\mathbf{p}\cdot\mathbf{x},\, H]$. ¿Puede construir un análogo cuántico del producto clásico $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}$ que sea hermítico?

5. Considere un paquete de ondas correspondiente a la partícula libre unidimensional. A t_0 este satisface la relación de incerteza mínima

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (t = t_0),$$

y además $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ $(t = t_0)$.
Calcule $\langle(\Delta x)^2\rangle$ en función del tiempo. Puede utilizar la condición de incerteza mínima para un paquete de ondas (Problema 15, Práctica 1).

6. Sean $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ autoestados de un operador hermítico A con autovalores a' y a'' respectivamente $(a' \neq a'')$. El operador hamiltoniano está dado por

$$H = \delta\left(|a'\rangle\langle a''| + |a''\rangle\langle a'|\right)$$

donde δ es un número real.

a) Claramente, $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ no son autoestados del hamiltoniano. Escriba los autoestados del hamiltoniano. ¿Cuáles son sus autovalores de energía?

b) Suponga que se sabe que el sistema está en el estado $|a'\rangle$ a $t = 0$. Escriba el vector de estado en el esquema de Schrödinger para $t > 0$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en $|a'\rangle$ para $t > 0$ si se sabe que está en el estado $|a'\rangle$ a $t = 0$?

7. Una caja conteniendo una partícula es dividida en dos compartimientos (izquierdo y derecho) a través de un separador fino. Si se sabe que la partícula está del lado derecho

(izquierdo) con certeza, el estado se representa por el autoestado de posición $|R\rangle$ ($|L\rangle$), donde se han despreciado variaciones espaciales dentro de cada mitad de la caja. El vector de estado más general puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle\langle R|\alpha\rangle + |L\rangle\langle L|\alpha\rangle$$

donde $\langle R|\alpha\rangle$ y $\langle L|\alpha\rangle$ pueden ser consideradas como funciones de onda. La partícula puede *tunelear* a través del separador; este efecto túnel es caracterizado por el hamiltoniano

$$H = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right)$$

donde Δ es un número real con dimensiones de energía.

a) Encuentre los autoestados de energía normalizados. ¿Cuáles son los autovalores de energía correspondientes?

b) En el esquema de Schrödinger los kets base $|R\rangle$ y $|L\rangle$ están fijos y el vector de estado varía con el tiempo. Suponga que el sistema está dado por el $|\alpha\rangle$ dado anteriormente a $t = 0$. Encuentre el vector de estado $|\alpha, t\rangle$ para un tiempo $t > 0$ aplicando a $|\alpha\rangle$ el operador de evolución temporal apropiado.

c) Suponga que a $t = 0$ la partícula está del lado derecho con certeza. ¿Cuál es la probabilidad de observar a la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo?

d) Escriba las ecuaciones de Schrödinger acopladas para las funciones de onda $\langle R|\alpha, t\rangle$ y $\langle L|\alpha, t\rangle$. Muestre que las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger acopladas son lo que esperaría del punto (b).

e) Suponga que por error se escribió H como

$$H = \Delta|L\rangle\langle R|$$

Resolviendo el problema de evolución temporal más general con este hamiltoniano, muestre que se viola la conservación de la probabilidad.

8. Considere un oscilador armónico en una dimensión.

a) Usando

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

b) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

9. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

10. Usando el oscilador armónico unidimensional como ejemplo, ilustre la diferencia entre los esquemas de Heisenberg y Schrödinger. Discuta en particular cómo evolucionan en el tiempo en ambos esquemas:

   a) las variables dinámicas x y p,

   b) el vector de estado más general.

11. Usando que $a|0\rangle = 0$ y $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, obtenga las funciones de onda para el estado fundamental $\langle x|0\rangle$ y el primer estado excitado $\langle x|1\rangle$ del oscilador armónico unidimensional.

12. *a*) Usando

$$\langle x'|p'\rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right)$$

   pruebe que

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p'|\alpha\rangle$$

   b) Considere un oscilador armónico en una dimensión. Partiendo de la ecuación de Schrödinger para el vector de estado, deduzca la ecuación de Schrödinger para la función de onda en el espacio de momentos (tenga cuidado en distinguir bien al operador p de su autovalor). ¿Puede dar las autofunciones de la energía en el espacio de momentos?

13. Considere la función, conocida como función de correlación, definida como

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle$$

donde $x(t)$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explícitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

14. Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

    a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

    b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger? Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando:

        i) la representación de Schrödinger, y

        ii) la representación de Heisenberg.

    c) Evalue $\langle(\Delta x)^2\rangle$ como función del tiempo en ambas representaciones.

15. Demuestre que para un oscilador armónico en una dimensión se verifica

$$\left\langle 0\left|e^{ikx}\right|0\right\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left\langle 0\left|x^2\right|0\right\rangle\right)$$

donde x es el operador de posición.

16. Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dirección. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud. Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de destrucción a y calcule su autovalor. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

17. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-ipl/\hbar)$ (siendo p el operador de momento y l la distancia desplazada) al estado fundamental.

18. Escriba la función de onda (en el espacio de coordenadas) para el estado especificado en el problema 16 a $t = 0$. Puede usar

$$\langle x'|0\rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right] \quad \text{donde} \quad x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Obtenga luego una expresión simple para la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado fundamental a $t = 0$.
¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

19. Considere un autoestado del operador de destrucción a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}$$

a) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle x\rangle$ en un estado $|\alpha\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de α?

b) Halle la evolución temporal de $|\alpha\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle p\rangle$ en el tiempo.

c) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisenberg para los operadores a y $a^\dagger$.

d) Si se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

20. Un electrón se mueve en la presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\mathbf{B} = B\hat{z}$).

a) Evalúe $[\Pi_x, \Pi_y]$, donde

$$\Pi_x = p_x - \frac{eA_x}{c} \qquad \Pi_y = p_y - \frac{eA_y}{c}$$

b) Comparando el hamiltoniano del problema y las relaciones de conmutación obtenidas en (a) con las expresiones correspondientes al problema del oscilador armónico unidimensional, muestre que los autovalores de energía de este problema son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\hbar k$ es el autovalor contínuo del operador p_z.