Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2006

Práctica 1: Estados cuanticos, operadores y espectros.

1. *a*) ¿Por qué se dice que el espacio vectorial de estados necesario para describir los estados de espin de un átomo de plata que atraviesa un dispositivo tipo Stern Gerlach es de dimensión dos?

   b) ¿Por qué se trata de un espacio vectorial?

   c) ¿A qué responde el caracter complejo del mismo?

2. Usando la ortonormalidad de los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ (*i.e.* $\langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0$ y $\langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1$), verifique la acción de los operadores S_x, S_y y S_z sobre dichos estados, donde

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right] \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right] \end{aligned}$$

   y pruebe que

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \qquad \{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$$

3. En un espacio vectorial complejo de dimensión 2 considere los operadores σ_x, σ_y y σ_z, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

   a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= \mathbb{I} \\ \sigma_j \sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + \mathbb{I}\delta_{jk} \end{aligned}$$

donde $\mathbb{I}$ representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

c) ¿Cuál es la relación de las matrices de Pauli con los operadores S_i del ejercicio anterior?

4. a) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$, ... y $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$, ... son todos conocidos, donde $|a'\rangle$, $|a''\rangle, \ldots$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

   b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explícitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

5. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

6. Considere un espacio de kets generado por los autoestados $\{|a'\rangle\}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.

   a) Pruebe que

$$\prod_{a'}(A - a')$$

   es el operador nulo.

   b) ¿Cuál es el significado del operador

$$\prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}?$$

   c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín 1/2.

7. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde a es un número con dimensiones de energía. Encuentre los autovalores de energía y los correspondientes autoestados como una combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

8. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ forma un ángulo β con el eje z y su proyección sobre el plano xy forma un ángulo α con el eje x. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$. **Nota:** la respuesta es

$$\cos(\beta/2)|+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha}|-\rangle.$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.

9. Un sistema de espín 1/2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

   a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

   b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x\rangle)^2 \right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0$, $\pi/2$ y π.

10. Un haz de átomos de espín 1/2 es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

11. Un cierto observable en mecánica cuántica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

12. Sean A y B dos observables. Suponga que los autokets simultáneos de A y B $\{|a', b'\rangle\}$, forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[A,\, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela; si es no, de un contraejemplo.

13. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

14. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explícitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

15. *a*) La manera mas fácil de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle \left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A, B]\rangle\right|^2$$

donde $\Delta A = A - \langle A\rangle$.

c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

$$\Delta A|\alpha\rangle = \lambda \Delta B|\alpha\rangle$$

donde λ es un imaginario puro.

d) Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i\,\langle p\rangle\, x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2}.$$

Muestre también que la condición

$$\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = c\,\langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$$

donde c es un número imaginario, efectivamente se cumple para dicho paquete en acuerdo con (b).

16. *a*) Calcule

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \equiv \left\langle S_x^2 \right\rangle - \langle S_x \rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado $|S_z;+\rangle$. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2$$

con $A \to S_x$ y $B \to S_y$.

b) Verifique la relación de incerteza con $A \to S_x$, $B \to S_y$ para el estado $|S_x;+\rangle$.

17. Encuentre la combinacion lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta S_y)^2 \right\rangle.$$

Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para S_x y S_y no se viola.

18. Algunos libros definen que un operador es real cuando todos sus elementos de matriz $\langle b'|A|b''\rangle$ son reales en alguna representación ($\{|b'\rangle\}$ en este caso). ¿Es este concepto independiente de la representación, es decir, los elementos de matriz permanecen reales aín cuando se use otra base? Verifique su respuesta usando operadores familiares como S_y y S_z, ó x y p_x.

19. Construya la matriz de transformación que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre que su resultado es consistente con la relación general

$$U = \sum_r |b^{(r)}\rangle\langle a^{(r)}|.$$

20. *a*) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A con la propiedad $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$. Evalúe $\langle b''|f(A)|b'\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base a' y la base b'.

b) Usando el análogo continuo del resultado obtenido en (a), evalúe

$$\langle \mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle$$

Simplifique su expresión tanto como le sea posible. Note que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde x, y, z son operadores.

21. *a*) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}}$$

b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$[x, \, \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})]$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp(\frac{ip_x a}{\hbar})|x'\rangle \text{ con } x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

22. *a*) Verifique que las igualdades

$$[x_i, \, G(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad [p_i, \, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

b) Evalúe $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$.

23. El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso.

a) Evalue $[x_i, \, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.

b) Usando (a) (o de alguna otra forma), demuestre como el valor de expectación $\langle\mathbf{x}\rangle$ cambia frente a traslaciones.

24. *a*) Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle \\ \langle\beta|x|\alpha\rangle &= \int dp'\psi^*_\beta(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p')\end{aligned}$$

donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.

b) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ix\Xi/\hbar)$, donde x es el operador posición y Ξ es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.