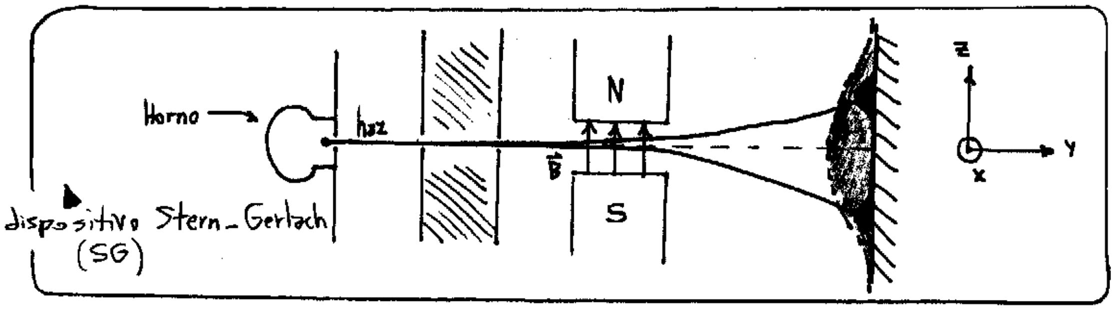
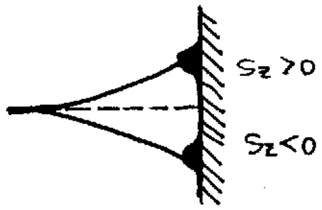
El Experimento de Stern-Gerlach

Un horno emite átomos de Ag neutros con $1e^-$ en la última órbita que le da el spín al átomo como un todo. AL salir del horno los átomos tienen su spín orientado en cualquier dirección



$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{e}{m_e \cdot c}\vec{S}}$$ momento magnético del átomo que sale del horno

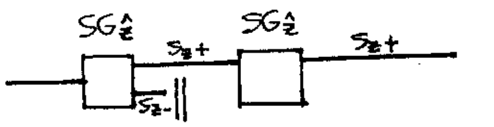
La $f_{\hat{z}}$ que le ejerce el campo $\vec{B}$ a estos átomos es $f_{\hat{z}} \propto -\mu_z$. Entonces el dispositivo SG mide y filtra por $S_z(\mu_z)$. Si el spín es un ente clásico es de esperar un patrón como el sombreado en azul, pero se obtienen dos manchas; con la correspondencia

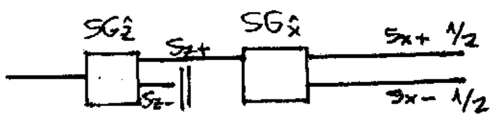


El spín no es un ente "continuo": está cuantizado y sólo puede tomar dos valores. Llamamos a estos estados

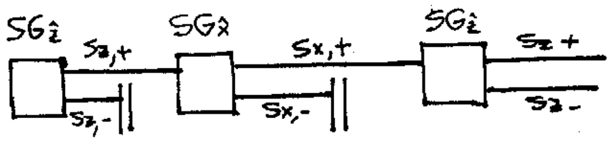
$(S_z,+)$ $(S_z,-)$

Un aparato de SG entonces filtra o selecciona ciertos átomos





Con el dispositivo 2^{do} orientado en $\hat{x}$ obtenemos mitad de átomos en $(S_x,+)$ y mitad en $(S_x,-)$
La única es que en realidad
$(S_z,+)$ se compone de $(S_x,+)$ y $(S_x,-)$



Sale $(S_z,-)$ pero para ello ser posible ⇒
$(S_x,+)$ tiene $(S_z,+)$ y $(S_z,-)$.
Pero esto no es posible porque al 2^{do} aparato no entró jamás $(S_z,-)$
SE FILTRÓ ANTES

Los spines en S_x, S_z son incompatibles. AL seleccionar $(S_x,+)$ en el 2^{do} SG se destruye la información previa sobre S_z. No podemos ya garantizar que S_z sea nula

EL 3^{er} experimento da al traste con la idea de que podamos pensar en spín como un ente vectorial en 3D. Mediante una analogía con polarización de luz vemos que es necesario meter al spín en un espacio vectorial de dimensión 2 pero con coeficientes complejos.

KETS

EL ket contiene toda la información cuántica del estado. Da el Estado físico del sistema.

- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$ (la suma de kets es un ket)
- $c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle . c$ $\quad c \in \mathbb{C}$
- $c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle = |\gamma\rangle$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
- $c|\alpha\rangle, |\alpha\rangle$ representan el mismo estado cuántico

Se define un espacio de "Bra", dual al de "kets" al que se va mediante «dual conjugado».

$$|a\rangle, |a''\rangle \underset{DC}{\Longleftrightarrow} \langle a''|, \langle a|$$

$$|a\rangle + |b\rangle \longleftrightarrow \langle a| + \langle b|$$

$$c|a\rangle \longleftrightarrow c^*\langle a|$$

Se define el producto interno:

$$\boxed{(\underset{\text{BRA}}{\langle\beta|})(\underset{\text{KET}}{|\alpha\rangle}) \equiv \langle\beta|\alpha\rangle}$$ es un número complejo

Se puede hacer una equivalencia con vectores std. del álgebra del siguiente modo:

Ket	$\sim$ Vector columna
Bra	$\sim$ Vector fila

$$|x\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|y\rangle$$

$$|y\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \langle A|x\rangle = \left(\frac{1\ \ 1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle x| = (1\ \ 0) \qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle x| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle y|\right)\left(|x\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- **Propiedades**

1. $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ $\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle \in \mathbb{R}$
2. $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ Métrica definida positiva
3. $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle = 0$ $\Leftrightarrow$ $|\alpha\rangle$ es ortogonal a $|\beta\rangle$
4. $\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = 1$ con $|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}.|\alpha\rangle$ Todo ket ($\neq 0$) es Normalizable

OPERADORES

A cada observable lo representaremos por un operador. Hay operadores que no vienen de observables.

$$\hat{A}|\alpha\rangle = |\gamma\rangle \longrightarrow$$ un operador sobre un ket da otro ket

$$\langle\beta|\hat{A} = \langle\Gamma| \longrightarrow$$ " " " bra " " bra

$$\boxed{X|\alpha\rangle \underset{DC}{\Longleftrightarrow} \langle\alpha|X^\dagger}$$ donde $\dagger$ (daga) $\equiv$ traspuesto conjugado (Cambia el sentido hacia donde actúa el operador y conjuga)

$$\boxed{\text{si } X = X^\dagger \Rightarrow X \text{ es hermítico}}$$

1. $X.Y \neq Y.X$ no conmutativo
2. $X(YZ) = (XY)Z = XYZ$ asociativo

$$(XY)^{\dagger} = Y^{\dagger}X^{\dagger}$$

$$\hat{O}|\alpha\rangle = 0 \qquad \forall\ |\alpha\rangle\ ;\ \hat{O} \equiv \text{operador nulo}$$

$$X\left(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right) = c_1 X|\alpha\rangle + c_2 X|\beta\rangle$$

Importante

Los observables en cuántica se representan mediante operadores hermíticos

- Sandwichs

usando prop. del prod. interno

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = (\langle\beta|)\cdot\underbrace{(X|\alpha\rangle)}_{|\gamma\rangle} = \langle\beta|\gamma\rangle = \langle\gamma|\beta\rangle^{*} = \left(\langle\alpha|X^{\dagger}|\beta\rangle\right)^{*}$$

es un ket

$$|\gamma\rangle \longrightarrow |\gamma\rangle \overset{DC}{\Longleftrightarrow} \langle\gamma| = \langle\alpha|X^{\dagger}$$

$$\boxed{\langle\beta|X|\alpha\rangle = \left(\langle\alpha|X^{\dagger}|\beta\rangle\right)^{*}}$$

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \underbrace{(\langle\beta|X)}_{\langle\Gamma|}\cdot|\alpha\rangle = \langle\Gamma|\alpha\rangle = \langle\alpha|\Gamma\rangle^{*} = \left(\langle\alpha|X^{\dagger}|\beta\rangle\right)^{*}$$

$$\langle\Gamma| \overset{DC}{\Longleftrightarrow} |\Gamma\rangle = X^{\dagger}|\beta\rangle$$

EL formalismo es consistente. EL operador opera sobre un ket/bra y multiplica al otro.

- Producto Externo

$$\boxed{|\beta\rangle\langle\alpha| \equiv (|\beta\rangle)\cdot(\langle\alpha|)}$$

$$\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\right)|\gamma\rangle = |\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle = \underbrace{\langle\alpha|\gamma\rangle}_{\text{escalar}}|\beta\rangle$$

- Es un operador, pues al aplicar sobre un ket obtengo otro ket
- rota $|\gamma\rangle$ en la dirección de $|\beta\rangle$

$$\boxed{\Lambda_\alpha \equiv |\alpha\rangle\langle\alpha|} \leftarrow \text{el proyector}$$

EL proyector Λ_α sobre un ket $|\beta\rangle$ selecciona la parte de $|\beta\rangle$ en la dirección de $|\alpha\rangle$. Nos dice cuanto de $|\beta\rangle$ está en la dirección de $|\alpha\rangle$.

$$\Lambda_\alpha^2 = |\alpha\rangle\underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{=1}\langle\alpha| = |\alpha\rangle\langle\alpha| = \Lambda_\alpha$$

$$\boxed{\sum_i^N \Lambda_i = \sum_i^N |i\rangle\langle i| \equiv \mathbb{1}} \rightarrow$$

La Σ de todos los proyectores del espacio en el que estamos es la identidad de ese espacio.

$\{|i\rangle\}$ es un conjunto completo

$$\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\right)^{\dagger} = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

- Notas Varias

$$\hat{X} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{Y} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad X^{\dagger}X = (1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$\hat{X}^{\dagger} = (1\ 0) \qquad \hat{Y}^{\dagger} = (0\ 1) \qquad XX^{\dagger} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Notar la diferencia en la dimensión del resultado.

Los kets $|\alpha\rangle$ viven en un espacio vectorial de Hilbert con dim. N, donde N lo dicta el # de posibles estados de cada sistema físico. Una partícula de spin 1/2 solo tiene 2 estados: (up y down)

Hay otro producto más, que se llama producto tensorial y se representa como:

$|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ Es un producto entre kets de espacios de Hilbert diferentes.

$$(\langle\alpha|\beta\rangle)^{*} \equiv DC\{|\beta\rangle\}\cdot DC\{\langle\alpha|\}$$

■ Bases

Dado un sistema físico representado por un ev $\mathcal{H}$ de dim N existirá una base (de dim. N) que será un conjunto de estados tal que cualquier estado de ese sistema físico puede representarse como CL de ese conjunto.

$$\boxed{\{|i\rangle\} \text{ base}} \rightarrow \boxed{|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |i\rangle}$$, con $|\alpha\rangle$ estado cualquiera

Es práctico utilizar bases ortonormales

$$\boxed{\langle i | j \rangle = \delta_{ij}} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ (Delta de Kronecker)

Los kets se definen normalizados

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle + d|4\rangle \rightarrow |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

Sea $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$, $\langle\phi| = a^*\langle 1| + b^*\langle 2| \Rightarrow$

$$\langle\phi|\phi\rangle = \left(a^*\langle 1| + b^*\langle 2|\right)\left(a|1\rangle + b|2\rangle\right) =$$

$$= a^*a\langle 1|1\rangle + b^*a\langle 2|1\rangle + a^*b\langle 1|2\rangle + b^*b\langle 2|2\rangle$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

■ Autokets y Autovalores

$$\boxed{\text{Si } A|a\rangle = c|a\rangle \Rightarrow |a\rangle \text{ es autoket de A con autovalor } c}$$

Se suelen etiquetar los autoestados $|a'\rangle, |a''\rangle \rightarrow$

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

$$\boxed{(A - a'\mathbb{1})|a'\rangle = 0} \leftarrow \text{el problema espectral}$$

NOTA: En general solo se sabe cómo opera un operador sobre kets. La operación sobre bras la obtenemos usando DC.

Entonces los operadores tendrán representación matricial, que cambiará según la base utilizada

A • $\boxed{\text{Los autovalores de un operador hermítico son } \mathbb{R}\text{, y los autokets correspondientes a diferentes autovalores son ortogonales}}$

B • $\boxed{\text{Los autokets de un operador son base completa del espacio de kets.}}$

A• $a'|a'\rangle = A|a'\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle a'|A^+ = \langle a'|A = \langle a'|a'^*$

$$\Rightarrow \langle a'|A|a'\rangle = (\langle a'|)(A|a'\rangle) = a'$$

$$(\langle a'|A|a'\rangle)^* = ((\langle a'|)(A|a'\rangle))^* = (\langle a'|A^+)(|a'\rangle)$$

$$= \langle a'|A|a'\rangle = a' \Rightarrow a' = a'^*$$

$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$
$A|a''\rangle = a''|a''\rangle$ $\Rightarrow A(|a'\rangle - |a''\rangle) = a'|a'\rangle - a''|a''\rangle$

$\langle a''|A|a'\rangle = a'\langle a''|a'\rangle$
$\langle a'|A|a''\rangle = a''\langle a'|a''\rangle$
$\langle a''|A|a'\rangle^* = a''\langle a''|a'\rangle^*$ vuelvo a conjugar (uso $a''^* = a''$)
$\langle a''|A|a'\rangle = a'\langle a''|a'\rangle$
$\langle a''|A|a'\rangle = a''\langle a''|a'\rangle$

Restamos $0 = (a' - a'')\langle a''|a'\rangle$

$\Rightarrow \langle a''|a'\rangle = 0$ si $a' \neq a''$

B. Se postula así. Si esto vale $\Rightarrow$

$$|\alpha\rangle = \sum_i^N |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i^N c_i|a_i\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{i,j}^N \langle a_j|c_j^* c_i|a_i\rangle = \sum_i^N |c_i|^2 = 1$$

$$\mathbb{1} = \sum |a_i\rangle\langle a_i|$$

si la base es completa $\Rightarrow$ la $\sum \Lambda = 1$

Operadores & Matrices

Representación matricial del operador X

$$X = \sum_{a'}^{N}\sum_{a''}^{N} |a''\rangle\underbrace{\langle a''|X|a'\rangle}_{\text{un escalar}}\langle a'| = \sum_{a'}^{N}\sum_{a''}^{N} \left(\langle a''|X|a'\rangle\right)|a''\rangle\langle a'|$$

$\langle a_1|$ $\langle a_2|$ $\langle a_3|$

Notar que $|a''\rangle\langle a'| \in N\times N$

elemento de matriz → $\boxed{X_{ij} = \langle a_i|X|a_j\rangle}$ fila columna

Sea base de dim. 3 → $X \doteq \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix}|a_1\rangle \\ |a_2\rangle \\ |a_3\rangle\end{matrix}$

$\boxed{X \text{ es hermítico} \Rightarrow \text{su matriz es simétrica conjugada}}$

$$\left(\langle a_i|X|a_j\rangle\right)^* = \left(\langle a_j|X^\dagger\right)\left(|a_i\rangle\right) = \langle a_j|X|a_i\rangle \quad\Rightarrow\quad \left(\langle a_j|X|a_i\rangle\right)^* = \langle a_i|X|a_j\rangle$$

La matriz tiene traza real y seis elementos independientes:

$X_{ji}^* = X_{ij}$

$X_{ij}^{t*} = X_{ij}$

$\boxed{X_{ij}^{\dagger} = X_{ij}}$ ← Aquí se ve bien el significado de daguear

$$X \doteq \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12}^* & x_{22} & x_{23} \\ x_{13}^* & x_{23}^* & x_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^* & X_{21}^* & X_{31}^* \\ X_{12}^* & X_{22}^* & X_{32}^* \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33}^*\end{pmatrix}$$

- CL de autoestados

Un estado $|\alpha\rangle$ se puede escribir en función de la base $\{|a_i\rangle\}$, de esta forma:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\langle a_i|\alpha\rangle\right)}_{c_i}|a_i\rangle \rightarrow \langle a_j|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\underbrace{\langle a_j|a_i\rangle}_{\delta_{ji}}$$

$$\langle a_j|\alpha\rangle = c_j$$

- cambio de base

$$X|b_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\underbrace{\langle a_i|X|b_j\rangle}_{\text{Matriz de cambio de base}} = \sum_{i=1}^{N} C_{ij}|a_i\rangle$$

◂ Para cambiar de base metemos $\mathbb{1}$ escritas como Σ de proyectores

$$|b_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i|b_j\rangle = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\langle a_i|b_j\rangle\right)|a_i\rangle}$$

son los elementos de la matriz que cambia de base

- Representación diagonal

Un operador tiene representación diagonal cuando está representado en la base de sus autokets

$$A = \sum_i^N\sum_j^N |a_i\rangle\langle a_i|A|a_j\rangle\langle a_j| = \sum_i^N\sum_j^N a_j|a_i\rangle\langle a_i|a_j\rangle\langle a_j| = \sum_{i,j}^{N}\delta_{ij}\,a_j\underbrace{|a_i\rangle\langle a_j|}_{\text{matriz de } N\times N}$$

$$A = \sum_i^N a_i\,\mathbb{1} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & a_N\end{pmatrix}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_N$ son sus autovalores

$\boxed{\text{Es conveniente utilizar como bases los autoestados de ciertos operadores.}}$

- Representaciones canónicas

Podemos representar una base como vectores canónicos

$$|a_1\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\N\end{pmatrix} \quad |a_2\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\N\end{pmatrix} \quad |a_N\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \langle a_1|\alpha\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\N\end{pmatrix} + \langle a_2|\alpha\rangle\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\N\end{pmatrix} + \cdots + \langle a_N|\alpha\rangle\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle a_1|\alpha\rangle\\\langle a_2|\alpha\rangle\\\vdots\\\langle a_N|\alpha\rangle\end{pmatrix}$$

DC ↓

$$\langle\alpha| = \left(\langle\alpha|a_1\rangle \; \langle\alpha|a_2\rangle \; \ldots \; \langle\alpha|a_N\rangle\right)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = \underset{1\times N}{\left(\quad\right)}\underset{N\times 1}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} = \square \text{ un escalar}$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \underset{1\times N}{(\langle\beta|a_i\rangle)}\underset{N\times 1}{\begin{pmatrix}\langle a_i|\alpha\rangle\end{pmatrix}} = \sum_i^N \langle\beta|\overbrace{a_i\rangle\langle a_i}^{\Lambda_{a_i}}|\alpha\rangle = \square \text{ un escalar}$$

$$\langle a_i|\gamma\rangle = \langle a_i|X|\alpha\rangle = \sum_{a_j}\langle a_i|X|a_j\rangle\langle a_j|\alpha\rangle$$

$$\underset{N\times 1}{\begin{pmatrix}\langle a_1|\gamma\rangle\\ \vdots\\ \\ \end{pmatrix}} = \underset{N\times N}{\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & \cdots\\ X_{21} & X_{22} & \\ \vdots & & \ddots\end{pmatrix}}\underset{N\times 1}{\begin{pmatrix}\langle a_1|\alpha\rangle\\ \vdots\\ \\ \end{pmatrix}}$$

$$X \doteq \sum_i^N\sum_j^N |a_i\rangle\langle a_i|X|a_j\rangle\langle a_j| \doteq \sum_i^N\sum_j^N(\langle a_i|X|a_j\rangle)\underbrace{|a_i\rangle\langle a_j|}_{\text{es una matriz}}$$

Aquí el $\hat{X}$ es una matriz y $\langle a_i|\hat{X}|a_j\rangle \equiv X_{ij}$ son sus elementillos (escalares)

Sistemas de spín 1/2

Hay dos estados posibles de spin $(|+\rangle, |-\rangle) \Rightarrow$ dim ev $\equiv 2$

$$\boxed{\begin{matrix}|S_z;+\rangle = |S_z = \hbar/2\rangle \equiv |+\rangle\\ |S_z;-\rangle = |S_z = -\hbar/2\rangle \equiv |-\rangle\end{matrix}} \qquad \mathbb{1} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$$

Operadores subida & bajada

$$\begin{cases} S_+ = \hbar\, |+\rangle\langle-| \longrightarrow & S_+ = \hbar\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1) = \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \\ S_- = \hbar\, |-\rangle\langle+| \longrightarrow & S_- = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0) = \hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\end{cases}$$

Sube el spín o da el ket nulo

baja el spín o da el ket nulo

Cambio de base

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Dados dos conjuntos base ortonormales y completos } \exists\ \hat{U} \text{ unitario :}\\ U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = \mathbb{1}\\ |b_i\rangle = U|a_i\rangle\end{matrix}}$$

Este operador de cambio de base será: $U = \sum_\ell |b_\ell\rangle\langle a_\ell|$

$$\boxed{\text{paso de } \underset{\text{vieja base}}{|a_\ell\rangle} \to \underset{\text{nueva base}}{|b_\ell\rangle}}$$

$$U|a_i\rangle = \sum_\ell |b_\ell\rangle\langle a_\ell|a_i\rangle = |b_i\rangle$$

$$\langle b_k|\alpha\rangle = \sum_\ell \langle b_k|a_\ell\rangle\langle a_\ell|\alpha\rangle = \sum_\ell \langle a_k|U^{\dagger}|a_\ell\rangle\langle a_\ell|\alpha\rangle = \langle a_k|U^{\dagger}|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow |\text{nueva base}\rangle = U\,|\text{vieja base}\rangle$$

$$\langle b_i|X|b_j\rangle = \sum_{\ell,m}\langle b_i|a_\ell\rangle\langle a_\ell|X|a_m\rangle\langle a_m|b_j\rangle$$

$$\langle b_i|X|b_j\rangle = \sum_{\ell,m}\langle a_i|U^{\dagger}|a_\ell\rangle\langle a_\ell|X|a_m\rangle\langle a_m|U|a_j\rangle \Rightarrow \boxed{X_{|b\rangle} = U^{\dagger}X_{|a\rangle}U}$$

Transformación de similaridad

Mediciones y Probabilidades

En mecánica cuántica MEDIR es Filtrar. La medición perturba al sistema. Se miden variables dinámicas asociadas a observables

Como los autoestados de un observable $\hat{A}$ son una base completa $\{|a_i\rangle\}$ $\Rightarrow$ un sistema se hallará en una CL de autoestados de $\hat{A}$ (puede pensarse esto).

Antes de Medir		Luego de Medir
sistema en CL de autoestados de $\hat{A}$ $\rightarrow$	Medición de $\hat{A}$	$\rightarrow$ salta a un autoestado de $\hat{A}$
sistema en autoestado de $\hat{A}$ $\rightarrow$		$\rightarrow$ continúa en autoestado de $\hat{A}$

hace saltar a $|a'\rangle$

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{Medición}} |a'\rangle$$

obtengo autovalor a'

$$\boxed{\text{Prob}_{|a'\rangle} \equiv |\langle a'|\alpha\rangle|^2}$$

Probabilidad de hallar el sistema en el estado $|a'\rangle$

Antes de medir no puedo saber a que estado saltará y tampoco en que estado se hallaba

$P=1 \rightarrow$ se halla en $|a'\rangle$ antes de saltar

$P=0 \rightarrow$ no se halla en $|a'\rangle$ antes de saltar

- **Valor de expectación**

$$\boxed{\langle\hat{A}\rangle \equiv \langle\alpha|A|\alpha\rangle} \qquad (\Delta A)^2_\alpha = \langle A^2\rangle_\alpha - \langle A\rangle^2$$

El valor de expectación siempre se refiere a un estado en particular.

$$\langle A\rangle = \sum_{a',a''}\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|A|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle = \sum_{a',a''}\langle\alpha|a'\rangle a''\delta_{a'a''}\langle a''|\alpha\rangle = \sum_{a''} a''|\langle\alpha|a''\rangle|^2$$

$$\langle A\rangle = \sum_{a''} a''\cdot\text{Prob}_{|a''\rangle}$$

Esto último tiene el sentido de una especie de promedio ponderado.

Conmutadores

$$\boxed{[A,B] \equiv A.B - B.A} \leftarrow \text{conmutador}$$

$$\boxed{\{A,B\} \equiv A.B + B.A} \leftarrow \text{anticonmutador}$$

Dos observables A,B conmutan si $[A,B]=0$. Se dice que son:

compatibles $\rightarrow [A,B]=0$

incompatibles $\rightarrow [A,B]\neq 0$

- **Teorema**

> Sean A,B observables compatibles y no degenerados $\Rightarrow$ los autoestados $\{|a'\rangle\}$ de A lo son también de B. Es decir que A y B tienen base de autoestados común

- **demo**

$$\langle a'|A.B - B.A|a''\rangle = 0$$

$$a'\langle a'|B|a''\rangle - \langle a'|B|a''\rangle a'' = 0$$

$$(a'-a'').\langle a'|B|a''\rangle = 0 \quad\rightarrow\quad \langle a'|B|a''\rangle = 0 \rightarrow B \text{ es diagonal en } \{|a'\rangle\}$$

$\blacksquare$

Los autoestados son iguales pero no los autovalores, con lo cual se utilizará la notación

$$|a',b'\rangle \quad \text{donde} \quad \begin{cases} A|a'b'\rangle = a'|a'b'\rangle \\ B|a'b'\rangle = b'|a'b'\rangle \end{cases}$$

Degeneración

Puede darse que haya varios (g) autoestados correspondientes a un mismo autovalor (a'); entonces se dice que hay degeneración de orden g para el autoestado $|a'\rangle$

$$A\,|a'_i\rangle = a'\,|a'_i\rangle \qquad ;\ i = 1,2,\dots g$$

A tendrá una matriz de nxn por bloques

En este caso No se puede decir que la base de A diagonalice a B. Los $|a'_i\rangle$ no dan información sobre los bloques correspondientes en la matriz de B.

$$A \doteq \begin{pmatrix} a'\mathbb{1} & 0 & & 0 & \\ 0 & a''\mathbb{1} & & & \\ & & a''' & & \\ & 0 & & a^{iv} & 0 \\ & & 0 & & a^{v} \ \ddots \end{pmatrix}$$

Necesito un conjunto de operadores que haga romper la degeneración para expresar univocamente el estado del sistema. Se llama CCOC.

Necesito que conmuten entre sí para que las mediciones tengan sentido. ‡

Los autovalores de algunos operadores podrán tener degeneración pero una combinación de los autovalores del CCOC, $|a'b'c'\dots\rangle$, determina el estado en forma única.

Dado un set CCOC, $\{A, B, C, D\}$, se etiquetarán $|K'\rangle \equiv |a', b', c', d'\rangle$ los autoestados.

Las únicas cosas que tiene sentido medir en MC son las variables asociadas a operadores en un CCOC.

A,B compatibles. Sin degeneración:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle \xrightarrow[b']{\text{Mido B}} |a'b'\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} |a'b'\rangle$$

Con degeneración en el autovalor a':

$$|\alpha\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido A}} \sum_{i=1}^{g} C_{a'}^{(i)}\,|a'b'^{(i)}\rangle \xrightarrow[b'^{(j)}]{\text{Mido B}} C_{a'}^{(j)}\,|a'b'^{(j)}\rangle \xrightarrow[a'^{(j)}]{\text{Mido A}} C_{a'}^{(j)}\,|a'b'^{(j)}\rangle$$

AL medir A y obtener a' no tengo determinado el estado del sistema. Me hallaré en una CL de autoestados correspondientes al autovalor degenerado a'.

AL medir B luego, selecciono uno de los $|a'b'\rangle$ degenerados, el correspondiente a $b'^{(j)}$ pues B no está degenerado. Puedo volver a medir A pues el autoestado en que ha caído el sistema permanece incólume.

---

‡ Si no conmutan → son incompatibles → la medición de uno hace saltar al sistema a un autoestado del otro y como no son comunes pierde sentido el concepto de medir. No tiene sentido la medición de algo si por el hecho de medir cambiamos lo que queremos medir. AL ser incompatibles sus medidas se afectan mutuamente.

Postulados de la Mecánica Cuántica

① — EL estado de un sistema lo definimos con un ket $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$. $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

② — Asociamos a propiedades físicas (observables) operadores hermíticos $\hat{A}$ que operan sobre los kets. Los autokets $|a\rangle$ verifican:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad , \text{y} \quad \{|a\rangle\} \text{ es una base del espacio de kets}$$

③ — AL medir una cantidad física representada por el observable $\hat{A}$ obtenemos un autovalor a'. Luego de medir, el estado del sistema es $|a'\rangle$.

$$|\psi\rangle \xrightarrow[a']{\text{Mido } A} |\psi'\rangle = \overbrace{|a\rangle\langle a|}^{\Lambda_a}\psi\rangle = (\langle a|\psi\rangle)|a\rangle \qquad [1]$$

Hecho al sistema a un autoestado de $\hat{A}$. Quizás deba ahora normalizar. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

EL esquema [1] representa la frase "proyectar sobre la base de autoestados".

⑤ — Las transformaciones espaciales se generan por $\vec{p}$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

⑥ — La evolución temporal la realiza H (el hamiltoniano)

- **Dispersión (operador de)**

$$\boxed{\Delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle A\rangle \mathbb{1}}$$

La dispersión será nula en un autoestado del operador $\hat{A}$. Luego la dispersión cualitativamente nos dice "que tan lejos" del autoestado nos hallamos.

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle(\hat{A} - \langle A\rangle\mathbb{1})^2\rangle = \langle A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2\rangle = \langle A^2\rangle - 2\langle A\rangle^2 + \langle A\rangle^2$$

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

$$\boxed{\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2}$$

Relación de dispersión generalizada

Espectro Continuo

Hay observables con espectro de autovalores continuo.

Espectro Discreto	Espectro Continuo
$A\,\vert a'\rangle = a'\,\vert a'\rangle$	$Y\vert y'\rangle = y'\vert y'\rangle$
$\mathbb{1} = \sum_{a'}^{N} \vert a'\rangle\langle a'\vert$	$\int_{-\infty}^{+\infty} dy'\,\vert y'\rangle\langle y'\vert = \mathbb{1}$
Delta de Kronecker $\langle a'\vert a''\rangle = \delta_{a'a''}$	$\langle y'\vert y''\rangle = \delta(y'-y'')$ Delta de Dirac
$\sum_{a''}^{N} \langle a'\vert a''\rangle\langle a''\vert = \langle a'\vert$	$\int_{-\infty}^{+\infty} dy''\,\langle y'\vert y''\rangle\langle y'\vert = \langle y'\vert$
$\sum_{a'}^{N} \vert a'\rangle\langle a'\vert\alpha\rangle = \vert\alpha\rangle$	$\int_{-\infty}^{+\infty} dy'\vert y'\rangle\langle y'\vert\alpha\rangle = \vert\alpha\rangle$
$\sum_{a'}^{N} \vert\langle a'\vert\alpha\rangle\vert^2 = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} dy'\,\vert\langle y'\vert\alpha\rangle\vert^2 = 1$
$\langle\beta\vert\alpha\rangle = \sum_{a'}^{N} \langle\beta\vert a'\rangle\langle a'\vert\alpha\rangle$	$\langle\beta\vert\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\,\langle\beta\vert y'\rangle\langle y'\vert\alpha\rangle$

La Función de Onda

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$, donde $\boxed{\langle x'|\alpha\rangle . dx'}$ ≡ densidad de probabilidad

$\boxed{|\langle x'|\alpha\rangle|^2}$ ≡ amplitud de probabilidad

La densidad de probabilidad, en el formalismo de Schrödinger, es la función de onda

$$\boxed{\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle}$$

Este es el vínculo entre la representación de Dirac y la de funciones de onda

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \int dx'\,\langle\beta|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \int dx'\,\psi^*_\beta(x)\,.\,\psi_\alpha(x)$$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \iint dx''\,dx'\,\langle\beta|x''\rangle\langle x''|A|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= \iint dx''.dx'\,\psi^*_\beta(x'')\langle x''|A|x'\rangle\,\psi_\alpha(x')$$; si $A = f(\hat{x}) \rightarrow f(\hat{x})\,|x'\rangle = f(x')|x'\rangle$

$$= \iint dx''\,dx'\,\psi^*_\beta(x'')f(x')\,\delta(x''-x')\,\psi_\alpha(x')$$

$$\boxed{\langle\beta|f(x)|\alpha\rangle = \int dx'\,\psi^*_\beta(x')\,.\,f(x')\,.\,\psi_\alpha(x')}$$

En forma análoga tenemos la representación de momento:

$\hat{p}\,|p'\rangle = p'|p'\rangle \qquad \langle p'|p''\rangle = \delta(p'-p'') \qquad |\alpha\rangle = \int dp'\,|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$

$$\boxed{\phi_\alpha(p') = \langle p' | \alpha \rangle}$$

- **Operador Traslación**

Se le pedirá:

$$\boxed{\mathcal{T}_{(dx')} |x'\rangle = |x' + dx'\rangle}$$

Este requerimiento es intuitivamente adecuado para una traslación.

dx' No es un operador, es el parámetro de la traslación

con las propiedades

- unitariedad
$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = \mathbb{1}$$

Para que no varíe la prob. ante un cambio de coordenadas.

- Aditividad
$$\mathcal{T}_{(dx')} \cdot \mathcal{T}_{(dx'')} = \mathcal{T}_{(dx'+dx'')}$$

Porque vale en Mec. Clásica

- $\exists$ Inverso
$$\mathcal{T}^{-1}_{(dx')} = \mathcal{T}_{(-dx')}$$

- Tender a $\mathbb{1}$
$$\mathcal{T}_{(dx')} \xrightarrow[dx' \to 0]{} \mathbb{1}$$

Se propone un $\mathcal{T}_{(d\vec{x})} = \mathbb{1} - i\,\vec{K}.d\vec{x}'$, con $\vec{K}$ hermítico (Notemos que $\mathcal{T}$ no es hermítico)

Comparando con clásica vemos que $\vec{p}$ origina las traslaciones $\Rightarrow$ K se identifica con P

Pedimos que $\vec{P}$ cuántico origine las traslaciones $\quad \vec{K} = \frac{\vec{P}}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{T}_{(d\vec{x}')} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\vec{P}.d\vec{x}'}$

$$\mathcal{T}_{(dx')} |p'\rangle = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} p.dx\right)|p'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}p'dx\right)|p'\rangle$$; el autovalor no es real ($\mathcal{T}$ no es hermítico)

Partiendo del conmutador:

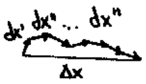
$\boxed{x.\mathcal{T}_{(dx)} - \mathcal{T}_{(dx)}.x = dx.\mathcal{T}_{(dx)}} \rightarrow [x, \mathcal{T}_{(dx)}] = dx.\mathcal{T} \Rightarrow$ con $dx \sim 0$ [a orden 1]† $\boxed{[X, P_x] = i\hbar}$

Se llega a la incompatibilidad de posición y momento

$$\boxed{[X_i, P_j] = i\hbar\,\delta_{ij}} \xleftarrow{\text{generalizando}}$$

$\boxed{[\mathcal{T}_{(d\vec{x}')}, \mathcal{T}_{(d\vec{x}'')}] = 0} \Rightarrow$ Las traslaciones en direcciones diferentes conmutan $\Rightarrow \boxed{[P_i, P_j] = 0}$

Sumando ∞ traslaciones infinitesimales tenemos una traslación finita



$$\mathcal{T}_{(\Delta x')} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}P.\frac{\Delta x'}{N}\right)^N = e^{-\frac{i}{\hbar}P.\Delta x'} \Rightarrow \boxed{\mathcal{T}_{(\Delta\vec{x})} = e^{-i\frac{\vec{P}.\Delta\vec{x}}{\hbar}}}$$

---

† Esto significa que tiramos los términos cuadráticos en (dx)

$\vec{P}$ en la representación $\vec{x}$

$$T_{(\Delta x)}|\alpha\rangle = \int dx'\, T\, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \int dx'\; |x'+\Delta x\rangle\langle x'|\alpha\rangle = \int dx'\; |x'\rangle\langle x'-\Delta x|\alpha\rangle$$

Pero $\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle \cong \frac{-\langle x'-\Delta x|\alpha\rangle + \langle x'|\alpha\rangle}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle.\Delta x + \langle x'|\alpha\rangle = \langle x'-\Delta x|\alpha\rangle$

Primer orden en Δx

$$T|\alpha\rangle = \int dx'\; |x'\rangle\left(\langle x'|\alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\Delta x\right) = \int dx'\, |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle - \int dx'\, |x'\rangle\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\Delta x$$

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}p.\Delta x\right)|\alpha\rangle = |\alpha\rangle - \int dx'\, |x'\rangle\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\Delta x$$

$$-\frac{i}{\hbar}p\Delta x\,|\alpha\rangle = \left(-\int dx'|x'\rangle\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle\right)\Delta x \Rightarrow$$

$$p|\alpha\rangle = -i\hbar\int dx'\; |x'\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\langle\beta|p|\alpha\rangle = \int dx'\; \langle\beta|x'\rangle - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\boxed{\langle\beta|p|\alpha\rangle = \int dx'\; \Psi^*_\beta(x')\; -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_\alpha(x')\right)}$$

$$\langle x''|p|\alpha\rangle = -i\hbar\int dx'\; \langle x''|x'\rangle\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle$$

$$\boxed{\langle x''|p|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x''|\alpha\rangle}$$

$$\boxed{\hat{p} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

Cambio entre Representación $\vec{x}$ y $\vec{p}$

$$\langle x'|\hat{p}|p'\rangle = -i\hbar\int dx'\langle x'|x'\rangle\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|p'\rangle$$

$$p'\langle x'|p'\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|p'\rangle \rightarrow \int\frac{1}{\langle x'|p'\rangle}\,\partial\langle x'|p'\rangle = \int\frac{ip'}{\hbar}\,\partial x'$$

Resulta una ec. dif. para $\langle x'|p'\rangle$

$$\ln\langle x'|p'\rangle = \frac{ip'.x'}{\hbar} + \text{Constante}$$

$$\boxed{\langle x'|p'\rangle = N.\,e^{\frac{ip'x'}{\hbar}}}$$

$$\int dp'\,\langle x'|p'\rangle\langle p'|x''\rangle = \langle x'|x''\rangle = \delta(x'-x'')$$

$$\int dp'.\,e^{\frac{ip'}{\hbar}(x'-x'')}\,|N|^2 = \delta(x'-x'')$$

$$\delta(x'-x'').\,2\pi\hbar\,|N|^2 = \delta(x'-x'') \Rightarrow |N| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\boxed{\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{\frac{ip'x'}{\hbar}}}.$$

▲ Con este escalar podemos cambiar entre representaciones.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}dp.\,e^{iap(x-x')} = \frac{2\pi}{a}.\,\delta(x-x')}$$

Usando esto podemos ver que: $\Psi_\alpha(x')$ y $\phi_\alpha(p')$ son transformadas de Fourier la una de la otra.

Corchetes Poisson vs Conmutadores

Hay una equivalencia entre corchetes de Poisson y conmutadores, a saber:

$$[A,B]_{classic} \longrightarrow \frac{[A,B]}{i\hbar} \qquad \boxed{[A,B]_{classic} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)}$$

DINÁMICA CUÁNTICA

Queremos ver la evolución temporal de los kets

$|\alpha, t_0, t\rangle \longleftarrow$ estado $|\alpha\rangle$, que partió en t_0, en el tiempo t

$$|\alpha, t_0\rangle \xrightarrow[\text{evoluciona}]{} |\alpha, t_0, t\rangle$$

Emplearemos un operador $U_{(t,t_0)}$ (evolución temporal)

Le pediremos:

$$\boxed{|\alpha, t_0, t\rangle = U\,|\alpha, t_0\rangle}$$

con las propiedades

- unitariedad

Para conservación de la probabilidad

$$\langle \alpha, t_0, t\,|\,\alpha, t_0, t\rangle = 1 \qquad \forall\, t$$

$$\langle \alpha, t_0|\,U^{+}U\,|\alpha, t_0\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad U^{+}U = UU^{+} = \mathbb{1}$$

- Linealidad

$$U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)\cdot U(t_1,t_0) \qquad t_2 > t_1 > t_0$$

- Tender a $\mathbb{1}$

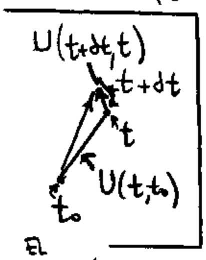
$$\underset{t\to t_0}{U(t,t_0)} \longrightarrow \mathbb{1} \quad \text{, o bien} \quad \underset{dt\to 0}{U(t_0+dt,t_0)} \longrightarrow \mathbb{1}$$

Se propone un $\quad U_{(t+dt,t)} = \mathbb{1} - i\,\Omega\,dt \quad$ con Ω hermítico

Comparando con clásica vemos que H origina la evolución temporal $\Rightarrow$ Ω se identifica con H

$$\Omega = \frac{H}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(t+dt,t) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} H\,dt}$$

$$U_{(t+dt,t_0)} = U(t+dt,t)\cdot U_{(t,t_0)} = \left(\mathbb{1} - \frac{iH\,dt}{\hbar}\right)\cdot U(t,t_0)$$



El concepto

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(t+dt,t_0) - U(t,t_0)}{dt} = -\frac{iH}{\hbar}\cdot U(t,t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} U = H\cdot U}$$

▲ Ecuación para $U(t,t_0)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} U_{(t,t_0)}\,|\alpha, t_0\rangle = H\;U(t,t_0)\,|\alpha, t_0\rangle$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t_0, t\rangle = H\;|\alpha, t_0, t\rangle} \quad \longleftarrow \text{Ecuación de Schrödinger para kets}$$

Acá el inconveniente es que $H = H(t)$

■ Casos de Solución de $U(t,t_0)$

● Supongamos $H \neq H(t)$ →

$$\boxed{U(t,t_0) = e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}}$$

● Sea $H = H(t)$ con $[H(t_1), H(t_2)] = 0$ ⇒

$$\boxed{U(t,t_0) = e^{-i/\hbar \int_{t_0}^{t} H(t').dt'}}$$

La integral puede hacerse una vez conocida la expresión de $H(t)$

● Sea $H = H(t)$ con $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$ ⇒

$$\boxed{U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)}$$

serie de Dyson

EL problema que se suscita es debido a que si H a diferentes tiempos no conmuta no podemos poner la exponencial en serie de potencias. En realidad $e^{\hat{O}}$ tiene sentido sólo si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{O}^n$ tiene sentido; es decir si no surgen ambigüedades al tomar la potencia n del operador $\hat{O}$

Para el caso 1 es simplemente:

$$e^{-\frac{iH}{\hbar}(t-t_0)} = 1 + (-i)\frac{H}{\hbar}(t-t_0) + \frac{(-i)^2}{2}\left(\frac{H(t-t_0)}{\hbar}\right)^2 + \ldots$$

Pero en caso 3 es:

$$\left(\int H(t').dt'\right).\left(\int H(t'').dt''\right) \neq \left(\int H(t'').dt'' \int H(t').dt'\right)$$ puesto que al operar es:

$$\int dt'\,dt''\, H(t').H(t'') \neq \int dt'\,dt''\, H(t'').H(t') \quad \text{pues} \quad [H(t'), H(t'')] \neq 0$$

■ Soluciones Útiles

En el caso 2 $\left(\int_{t_0}^{t} H(t').dt'\right)^n$ no tiene problemas; provista la conmutatividad

Primeramente conseguimos un $\hat{A}$ tal que $[A,H] = 0$ → (Considero $H \neq H(t)$)

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \quad , \text{luego} \quad U(t,t_0)|\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

como $\hat{H}$ y $\hat{A}$ conmutan
$\hat{H}|a'\rangle = E_{a'}|a'\rangle$.
$\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$
$\hat{H}^n|a'\rangle = E_{a'}^n|a'\rangle$

⇒ operamos con el H para → $$U(t,t_0) = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle\langle a'| \Rightarrow$$

$$U(t,t_0)|\alpha\rangle = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$\boxed{|\alpha, t_0, t\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle . e^{-\frac{iE_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle}$$

comparando

$$|\alpha, t_0\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle . |a'\rangle$$

EL coeficiente es el mismo pero le hemos sumado una fase $e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)}$ que no es global.

Evolución de Valores de expectación

Importante: Los autoestados NO EVOLUCIONAN

$$|\alpha\rangle = |a'\rangle \rightarrow \qquad |\alpha, t\rangle = \boxed{|a', t\rangle = e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle}$$

La fase es global al considerar un autoestado. La podemos descartar (setear $=1$)

$$\boxed{\langle a', t | B | a', t\rangle = \langle a' | \cancel{e^{i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)}} B \, \cancel{e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)}} |a'\rangle = \langle a' | B | a'\rangle}$$

El valor de expectación de un operador respecto a un autoestado no varía.

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t\rangle = \langle a'' | \sum_{a''} \langle a'' | \alpha\rangle^* e^{+i\frac{E_{a''}}{\hbar}(t-t_0)} \, B \, \sum_{a'} \langle a' | \alpha\rangle e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle$$

$$\boxed{\langle \alpha, t | B | \alpha, t\rangle = \sum_{a', a''} c_{a''}^* . c_{a'} \, e^{i\frac{(t-t_0)}{\hbar}(E_{a''} - E_{a'})} \langle a'' | B | a'\rangle}$$

El valor de expectación de un operador respecto un estado general tiene una fase no global que produce términos de interferencia.

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t\rangle = \langle \alpha, t_0 | e^{i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} \, B \, e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle$$

$$\langle \alpha, t | B | \alpha, t\rangle = \sum_{a'', a'} \underbrace{\langle \alpha, t_0 | a''\rangle}_{= c_{a''}^*} \underbrace{\langle a'' | e^{i\frac{E_{a''}}{\hbar}(t-t_0)} \, B \, e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)} |a'\rangle}_{= \langle a'' | B | a'\rangle . e^{\frac{i(t-t_0)}{\hbar}(E_{a''} - E_{a'})}} \underbrace{\langle a' | \alpha, t_0\rangle}_{= c_{a'}}$$

Relaciones de Conmutación

$$[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, B.C] = B[A, C] + [A, B]C$$

$$\boxed{i\hbar [A, B]_{classic} = [A, B]}$$, donde $[\ ,\ ]_{classic}$ es el corchete de Poisson

$$\boxed{\begin{aligned} [x_i, x_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0 \\ [x_i, p_j] &= i\hbar \, \delta_{ij} \end{aligned}}$$

Relaciones de Conmutación fundamentales

$$[S_i, S_j] = i\hbar \, \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p}$$

$$[p, G(x)] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x}$$

si f, G pueden ser expresadas en series de potencias

La Ecuación de Schrödinger

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t_0, t\rangle = H |\alpha, t_0, t\rangle} \quad \text{con} \quad \boxed{\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x})}$$

Puedo meter un bra $\langle x'|$ que no depende del tiempo $\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' |\alpha, t_0, t\rangle = \langle x' | H |\alpha, t_0, t\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha(x',t)}{\partial t} = \langle x' | \frac{p^2}{2m} + V(x) |\alpha, t_0, t\rangle$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha(x',t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_\alpha(x',t) + V(x) . \Psi_\alpha(x',t)}$$

◂ La ecuación de Schrödinger

Representación de Heisenberg

Los kets y los operadores no tienen sentido físico, pero sí los valores de expectación: Toda física podrá modificar los primeros pero debe conservar los valores de expectación. Así, tenemos dos representaciones posibles:

Schrödinger	Heisenberg
$\lvert\alpha\rangle \longrightarrow U\lvert\alpha\rangle$	$\lvert\alpha\rangle \longrightarrow \lvert\alpha\rangle$
$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow U^{+}AU$
$\lvert a'\rangle \longrightarrow \lvert a'\rangle$	$\lvert a'\rangle \longrightarrow U^{+}\lvert a'\rangle$

Los kets evolucionan y los operadores permanecen fijos, al igual que los autoestados.

Los kets no evolucionan pero sí lo hacen los operadores y los autoestados

Debe notarse que:

① $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\beta| \underbrace{U^{+} U}_{1} |\alpha\rangle$

② $\langle\alpha, t | A |\alpha, t\rangle = \langle\alpha| U^{+} A U |\alpha\rangle = \begin{cases}\langle A\rangle^{(H)} \\ \langle A\rangle^{(S)}\end{cases}$

① los productos internos no cambian con el tiempo.

$$\boxed{\langle A\rangle^{(S)} = \langle A\rangle^{(H)}}$$

◂ ② Los valores de expectación son los mismos en ambos esquemas

$$\boxed{A^{H}(t) = U^{+}(t)\, A^{S}\, U(t)}$$

EL operador $\hat{A}$ en Schrödinger no depende explícitamente del tiempo. La idea es que le "pegamos" a los operadores la evolución temporal de los kets.

$$\underbrace{\left(\langle\alpha, t_0| U^{+}\right)}\ \underbrace{A^{(S)}}\ \underbrace{\left(U |\alpha, t_0\rangle\right)} = \underbrace{\langle\alpha, t_0|}\ \underbrace{U^{+} A^{(S)} U}\ \underbrace{|\alpha, t_0\rangle}$$

a $t = t_0$ Las representaciones coinciden: $\boxed{|\alpha, t_0, t_0\rangle^{(S)} = |\alpha\rangle^{(H)}}$

- La ecuación de Heisenberg

$$A^{H} = U^{+} A^{S} U$$

$$\frac{\partial A^{H}}{\partial t} = \frac{\partial U^{+}}{\partial t} A^{S} U + U^{+} \frac{\partial A^{S}}{\partial t} U + U^{+} A^{S} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U = HU \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} HU ; \quad \frac{\partial U^{+}}{\partial t} = \frac{1}{-i\hbar} U^{+}H$$

$$\boxed{(HU)^{+} = U^{+}H^{+} = U^{+}H}$$

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}U^{+}HA^{S}U + U^{+}\underbrace{\frac{\partial A^S}{\partial t}}_{=0}U + U^{+}A^{S}\frac{1}{i\hbar}HU$$

pues A^S no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{\partial A^H}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\left(U^{+}HUU^{+}A^{S}U - U^{+}A^{S}UU^{+}HU\right) = \frac{1}{i\hbar}\left(-HA + AH\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial A^{(H)}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[A^{(H)}, H^{(H)}]}$$ ◄ La ecuación de Schrödinger

Si $A^{(H)}$ conmuta con el $H^{(H)}$, entonces $A^{(H)}$ es una cantidad conservada (una constante de movimiento). En ese caso el operador no depende del tiempo y entonces $A^{(H)} = A^{(S)}$

- **Evolución de Autoestados**

$$A^{(S)}|a'\rangle^{(S)} = a'|a'\rangle^{(S)}$$; aplico un U^{+} a ambos lados →

$$\underbrace{U^{+}A^{(S)}U}U^{+}|a'\rangle^{(S)} = a'U^{+}|a'\rangle^{(S)}$$

$$A^{H}\left(U^{+}|a'\rangle^{(S)}\right) = a'\left(U^{+}|a'\rangle^{(S)}\right)$$

Los a' no dependen de la representación porque tienen significado físico. Entonces los $|a'\rangle$ evolucionan.

$$\Rightarrow \boxed{|a',t\rangle^{(H)} = U^{+}|a'\rangle^{(S)}}$$

vemos que cambian los autoestados pero no los autovalores

Importante

$H^{(H)} = U^{+}H^{(S)}U = U^{+}UH^{(S)} = \mathbb{1}H^{(S)} = H^{(S)}$

Entonces H es el mismo en ambas pues $\hat{U} = \hat{U}(A) \Rightarrow [U,H] = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{|a',t\rangle^{(H)}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{U^{+}|a'\rangle^{(S)}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle^{(H)} = -\frac{1}{i\hbar}U^{+}H|a'\rangle^{(S)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle^{(H)} = -\frac{1}{i\hbar}HU^{+}|a'\rangle^{(S)}$$

Los autoestados evolucionan al revés en la picture de Heisenberg →

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a',t\rangle^{(H)} = -H|a',t\rangle^{(H)}}$$

Podemos ver de otro modo la equivalencia:

$$A^{(H)} = U^{+}\sum_{a'}A^{(S)}|a'\rangle\langle a'|\,U = \sum_{a'}a'U^{+}|a'\rangle\langle a'|U$$

pero

$$A^{(H)} = \sum_{a'}A^{(H)}|a',t\rangle\langle a',t| \equiv \sum_{a'}$$

$$A^{H} = \sum_{a'}a'\underbrace{|a',t\rangle}\langle a',t| \equiv \sum_{a'}a'\left(\underbrace{U^{+}|a'\rangle}\langle a'|U\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{|a',t\rangle^{(H)} = U^{+}|a'\rangle^{(S)}}$$

- ***Coeficientes***

$$C_{a'}^{(S)}(t) = {}^{(S)}\langle a'|\alpha,t_0,t\rangle^{(S)} = {}^{(S)}\langle a'|\left(U|\alpha,t_0\rangle\right)$$

$$C_{a'}^{(H)}(t) = {}^{(H)}\langle a',t|\alpha,t_0\rangle^{(H)} = \left({}^{(S)}\langle a'|U\right)|\alpha,t_0\rangle$$

Los coeficientes en Schrödinger y en Heisenberg

En "Schrödinger" es $\rightarrow$ $$|\alpha,t_0,t\rangle = \sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\alpha,t_0,t\rangle = \sum_{a'}\overbrace{\left(\langle a'|\alpha,t_0,t\rangle\right)}^{C_{a'}(t)}|a'\rangle$$

En "Heisenberg" es $\rightarrow$ $$|\alpha,t_0\rangle = \sum_{a'}|a',t\rangle\langle a',t|\alpha,t_0\rangle = \sum_{a'}\underbrace{\left(\langle a',t|\alpha,t_0\rangle\right)}_{C_{a'}(t)}|a',t\rangle$$

Los coeficientes en las expansiones son iguales como corresponde a toda magnitud que tiene sentido físico; $|C_{a}(t)|^2$ es la probabilidad.

Teorema de Ehrenfest

$$\boxed{X^{(H)} = X(0) + \frac{P(0)}{m}t} \longrightarrow$$ Para una partícula libre, donde $p(t) = p(0)$ es constante de movimiento

$$[X(t), X(0)] = -\frac{i\hbar}{m}t \longleftarrow$$ operador que no conmuta a t diferentes

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = \frac{1}{i\hbar}[p, V(x)] = \frac{1}{i\hbar}\left(-i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \longrightarrow \boxed{m.\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}}$$

$$p = m.\frac{dx}{dt} \longrightarrow \frac{dp}{dt} = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

Estamos usando: $\boxed{\frac{\partial A^H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[A^H, H]}$

Remark

Debe notarse que relaciones como: $[X,p] = i\hbar$ son para operadores en la pictura de Schrödinger, donde los operadores no cambian en el tiempo. $[X(0), p(0)] = i\hbar$

$$\langle\alpha, t_0| m\frac{d^2x}{dt^2}|\alpha, t_0\rangle = -\langle\alpha, t_0|\frac{\partial V}{\partial x}|\alpha, t_0\rangle$$

$$m.\frac{d^2}{dt^2}\langle\alpha, t_0|x^H|\alpha, t_0\rangle = -\langle\alpha, t_0|\frac{\partial V}{\partial x}|\alpha, t_0\rangle$$

Teorema de Ehrenfest $\rightarrow$ $$\boxed{m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle x^{(s)}\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}^{(s)}\right\rangle}$$ $\leftarrow$ los valores de expectación son iguales en ambas representaciones

EL oscilador Armónico

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}} \xrightarrow{\text{OSC. ARM. 1D}} \boxed{E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

EL problema del oscilador armónico en 1D con el hamiltoniano H dado puede resolverse usando un nuevo operador $\hat{a}$:

$$\boxed{\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)} \qquad \text{con:} \qquad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$$

Este operador es suma de $\hat{x}, \hat{p}$ pero <u>No es</u> <u>hermítico</u>. Cumple que:

$$[a, a^+] = 1 \qquad a^+a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)}$$

donde se define: $\boxed{\hat{N} \equiv a^+a}$ ← el operador número

Luego $[\hat{N}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow$ tienen base de autoestados común $\{|n\rangle\}$

$$\boxed{\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle} \qquad \hat{H}|n\rangle = \underbrace{\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{= E_n}|n\rangle$$

$n \equiv$ # de cuantos de energía

$$[N, a] = [a^+a, a] = -[a, a^+a] = -\left(a^+[a, a] + [a, a^+]a\right) = -a$$

$$[N, a^+] = [a^+a, a^+] = -[a^+, a^+a] = -\left(a^+[a^+, a] + [a^+, a]a^+\right) = a^+$$

Queremos ver qué le hace a^+ a un autoestado $|n\rangle$ y luego a sobre $|n\rangle$.

$$N a^+|n\rangle = \left([N, a^+] + a^+N\right)|n\rangle = a^+|n\rangle + a^+ n|n\rangle$$

$$\hat{N}[a^+|n\rangle] = (n+1)[a^+|n\rangle]$$

Entonces, como no hay degeneración, y tenemos $N|n'\rangle = n'|n\rangle \Rightarrow$

$$a^+|n\rangle = c_1|n+1\rangle$$

Procediendo ídem para $a|n\rangle$ será:

$$a|n\rangle = c_2|n-1\rangle$$

$$a^+|n\rangle = c_1|n+1\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle n+1|c_1^* = \langle n|a$$

$$a|n\rangle = c_2|n-1\rangle \longleftrightarrow \langle n-1|c_2^* = \langle n|a^+$$

$$\langle n|N|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n = \langle n|a^+a|n\rangle = \langle n-1|c_2^*c_2|n-1\rangle = |c_2|^2\langle n-1|n-1\rangle$$

$$n = \langle n|\underbrace{1+aa^+}_{=N}|n\rangle = -1 + \langle n|aa^+|n\rangle = -1 + \langle n+1|c_1^*c_1|n+1\rangle = -1 + |c_1|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$|c_2| = \sqrt{n} \qquad |c_1| = \sqrt{n+1}$$

$$\boxed{\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle} \qquad \boxed{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

$\hat{a}^+$ es el operador de creación de cuantos y $\hat{a}$ el de aniquilación.

- El estado Fundamental $|0\rangle$

$$a|n\rangle \xleftrightarrow{DC} \langle n|a^+ \Rightarrow \left(\langle n|a^+\right)\left(a|n\rangle\right) \geq 0 \rightarrow n\langle n|n\rangle \geq 0 \Rightarrow \boxed{n \geq 0}$$

Viene del postulado para productos internos

n corre por N

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle$$

$\cdots \Rightarrow$ en algún momento se llega a $|n=0\rangle$ $\quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \rightarrow \boxed{|0\rangle \equiv \text{el fundamental}}$

No se puede bajar más $\quad \boxed{\hat{a}|0\rangle = 0}$

$$a^+|0\rangle = \sqrt{1}\,|1\rangle$$

$$a^{+2}|0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$a^{+2}|0\rangle = \sqrt{1.2.3}\,|3\rangle$$

$$\cdots \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n\rangle}$$

Podemos llegar a cualquier estado con el a^+

Las matrices de $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ solo tienen una diagonal corrida de elementos.

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\cdot\delta_{n',n-1}$$

$$\langle n'|a^+|n\rangle = \sqrt{n-1}\langle n'|n+1\rangle = \sqrt{n-1}\cdot\delta_{n',n+1}$$

También puede verse que: $\langle n|x|n\rangle = 0$, $\langle n|p|n\rangle = 0$ $\qquad \langle(\Delta x)^2\rangle_{|0\rangle}\langle(\Delta p)^2\rangle_{|0\rangle} = \frac{\hbar^2}{4}$ incerteza mínima

El estado fundamental tiene incerteza mínima

- Función de Onda

$\Psi_n(x') = \langle x'|n\rangle$; quiero evaluar $\langle x'|0\rangle = \Psi_0(x') \rightarrow \boxed{\langle x'|a|0\rangle = 0}$

$$0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|x + \frac{ip}{m\omega}|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot\left[x'\langle x'|0\rangle + \frac{i}{m\omega}\langle x'|p|0\rangle\right]$$

$$x'\langle x'|0\rangle + \frac{i}{m\omega}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\langle x'|0\rangle = 0 \longrightarrow x'\langle x'|0\rangle = -\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|0\rangle$$

$$-\int \frac{m\omega}{\hbar}\, x'\, dx' = \int \frac{d\langle x'|0\rangle}{\langle x'|0\rangle} \quad \rightarrow \quad \langle x'|0\rangle = N \cdot e^{-\frac{m\omega x'^2}{2\hbar}}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle 0|x'\rangle\langle x'|0\rangle \, dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} |N|^2 e^{-\frac{m\omega x'^2}{\hbar}} \, dx' = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \quad \rightarrow \quad |N| = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{1/4}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \boxed{\langle x'|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} x_0^{1/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2}} \blacktriangleleft \text{ Pack Gaussiano}$$

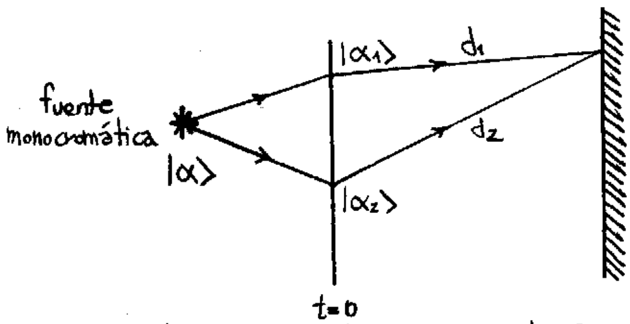
El estado fundamental tiene incerteza mínima y debe corresponder a un paquete gaussiano.

Nota

a^+ crea sobre ket / aniquila sobre bra
a aniquila sobre ket / crea sobre bra

$$\text{DC}\begin{cases} a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle \\ \langle n|a = \langle n+1|\sqrt{n+1} \end{cases} \qquad \text{DC}\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle \\ \langle n|a^+ = \langle n-1|\sqrt{n} \end{cases}$$

■ Interferencia en experimento de Young



Uso $\hat{H}$ de partículas libres

$$\frac{1}{2}|\alpha\rangle = |\alpha_1\rangle = |\alpha_2\rangle$$

$t>0$

$$|\tilde{\alpha}_1\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\alpha_1\rangle = e^{-iE_\alpha t/\hbar}|\alpha_1\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}_2\rangle = e^{-iE_\alpha t/\hbar}|\alpha_2\rangle$$

En la pantalla debe verse la interferencia de los dos estados solapados.

$$|\tilde{\alpha}\rangle = |\tilde{\alpha}_1\rangle + |\tilde{\alpha}_2\rangle$$

$$= e^{-iE_\alpha \frac{d_1}{v}\frac{1}{\hbar}}|\alpha_1\rangle + e^{-iE_\alpha \frac{d_2}{v}\frac{1}{\hbar}}|\alpha_2\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{2} e^{-i\frac{E_\alpha}{\hbar}\frac{d_1}{v}} \cdot \left|1 + e^{-i\frac{E_\alpha}{v\hbar}[d_2-d_1]}\right| |\alpha\rangle$$

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{4}\left|1 + e^{-i\frac{E_\alpha}{\hbar v}(d_2-d_1)}\right|^2 = \frac{1}{4}\cdot\left[(1+\cos)^2 + \operatorname{sen}^2\right] = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{E_\alpha(d_2-d_1)}{\hbar v}\right)}$$

AL partir el estado $|\alpha\rangle$ y volver a unirlo en $|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle$ vemos una "intensidad" que depende de la Δ camino

■ Cambio de Cero del Potencial

En Mecánica clásica la física de un problema no ~~se~~ se ve afectada por un cambio de Gauge. Si movemos el cero de potencial, la situación física es la misma.
Veamos qué sucede en mecánica cuántica.

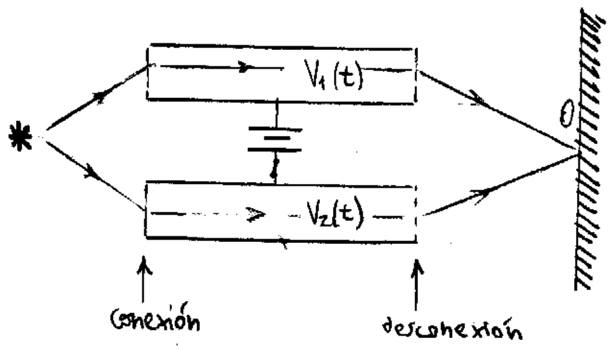
$$|\alpha, t_0, t\rangle = e^{-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\frac{(t-t_0)}{\hbar}} |\alpha, t_0\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}, t_0, t\rangle = e^{-i\left(\frac{p^2}{2m} + V(x) + V_0\right)\frac{(t-t_0)}{\hbar}} |\alpha, t_0\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}, t_0, t\rangle = e^{-iV_0\frac{(t-t_0)}{\hbar}} |\alpha, t_0, t\rangle$$ difieren en una fase $|\tilde{\alpha}, t\rangle$ y $|\alpha, t\rangle$

$\Rightarrow$ Los valores de expectación NO cambian (con V_0 constante)

Este es un experimento ideal [pensado]. Dentro de los cilindros hay campo nulo. Se varía el V abriendo y cerrando la llave a la entrada y a la salida.



Se cambia la fase de las partículas inferiores respecto de las superiores $\Rightarrow$ habrá interferencia en 0.

Clásicamente no hay variación

$$\Delta \text{fase} = -\frac{i}{\hbar} e \int_{t_1}^{t_2} V_1(t) - V_2(t)\, dt$$

$$\Delta \text{fase} = -\frac{ie}{\hbar} \Delta V$$

Lo que realmente cuenta es la diferencia de potencial ΔV, la cual sí tiene sentido físico, porque es independiente de la medida y porque pueden escribirse los campos en función de aquella.

$$E = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2 + e\phi$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{p_i - eA_i}{m}$$

■ El Propagador

Físicamente representa la probabilidad de transición entre autoestados por el paso del tiempo:

$$|x'\rangle_{t_0} \longrightarrow |x''\rangle_t$$

$$\boxed{\langle x''|\, e^{-iH\frac{(t-t_0)}{\hbar}}\, |x'\rangle = K(x'',t;x',t_0)}$$ ◄ EL propagador

$$\langle x''|\alpha,t_0,t\rangle = \langle x''|\, e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}\, |\alpha,t_0\rangle$$

$$= \int dx' \langle x''|\, e^{-iH\frac{(t-t_0)}{\hbar}}\, |x'\rangle\langle x'|\alpha,t_0\rangle$$

$$\overbrace{\Psi_\alpha(x'',t)}^{\text{función de onda final}} = \int dx' \underbrace{K(x'',t;x',t)}\, \overbrace{\Psi_\alpha(x',t_0)}^{\text{función de onda inicial}}$$

Podemos pensar que el propagador lleva la función de onda desde t_0 a t. Se puede escribir:

$$\boxed{K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} \langle x''|a'\rangle\langle a'|x'\rangle\, e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}(t-t_0)}}$$

Metemos un observable $\hat{A}$ donde $[A,H]=0$ y $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$

El propagador depende del potencial, pero no de la función de onda inicial. Se debe cumplir que:

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} K(x'',t;x',t_0) = \delta^3(x''-x')}$$

$$K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} \langle x''|\, e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}\, |a'\rangle\langle a'|x'\rangle = \sum_{a'} \Psi_{|a'\rangle}(x'',t)\cdot\langle a'|x'\rangle$$

$$K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} c_{a'}(x')\cdot \underbrace{\Psi_{|a'\rangle}(x'',t)}_{\langle x''|\, e^{-\frac{iE_{a'}}{\hbar}(t-t_0)}\, |a'\rangle}$$ ⇒ a x', t_0 fijo esto satisface la ecuación de Schrödinger

⇒ El propagador es una función de Green que satisface:

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla''^2 + V(x'') - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) K(x'',t;x',t_0) = -i\hbar\, \delta^3(x''-x')\cdot\delta(t-t_0)}$$

con $K(x'',t;x',t_0)=0$ $t<t_0$

Condición de Contorno

- **El propagador para la partícula libre**

$$K(x'',t;x',t_0) = \int dp' \langle x''|\, e^{-\frac{ip^2}{2m\hbar}(t-t_0)}\, |p'\rangle\langle p'|x'\rangle$$

$$= \int dp' \cdot e^{-\frac{ip'^2}{2m\hbar}(t-t_0)} \langle x''|p'\rangle\langle p'|x'\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp' \cdot e^{-\frac{ip'^2}{2m\hbar}(t-t_0)} \cdot e^{-i\frac{p'}{\hbar}(x'-x'')}$$

$$\boxed{K(x'',t;x',t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\, i(t-t_0)}}\cdot e^{i\frac{m(x''-x')^2}{2\hbar(t-t_0)}}}$$ ◄ Propagador de una partícula libre

Se puede escribir el propagador en la representación de Heisenberg.

$$\langle x''| e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}|x'\rangle = \left(\langle x''|e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}\right)\left(e^{\frac{iHt_0}{\hbar}}|x'\rangle\right) = \langle x'',t|x',t_0\rangle$$

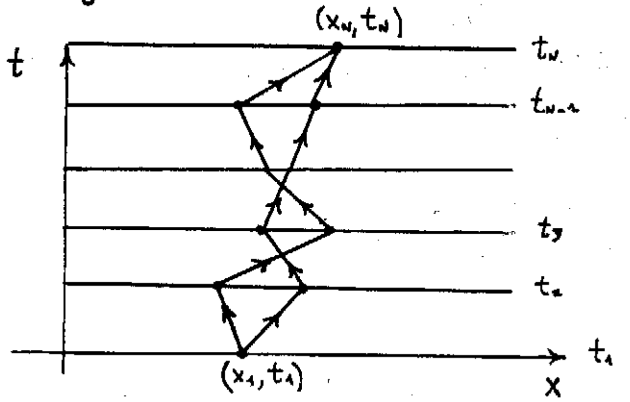
$$\boxed{K(x'',t;x',t_0) = \langle x'',t|x',t_0\rangle}$$

EL propagador cumple con la <u>propiedad de composición</u> (como el $U(t,t_0)$); es decir:

$$\boxed{K(x'',t;x',t_0) = K(x'',t;x',t_1)\cdot K(x',t_1;x',t_0)}$$

$$t > t_1 > t_0$$

■ <u>Integrales de Camino de Feynman</u>



Consideramos una partícula yendo de (x_1,t_1) a (x_N,t_N). Dividimos el tiempo

$$\Delta t = \frac{t_N-t_1}{(N-1)}$$

Queremos ver la amplitud de transición desde estado 1 al N.

$$\langle x_N,t_N|x_1,t_1\rangle \doteq \int dx_{N-1}\int dx_{N-2}\cdots\int dx_2 \overbrace{\langle x_N,t_N|x_{N-1},t_{N-1}\rangle\cdots\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle}^{=\mathcal{N}}$$

Se puede pensar como que estamos <u>sumando sobre todos los posibles caminos</u> entre (x_1,t_1) y (x_N,t_N) fijos. En mecánica clásica teníamos un solo camino, el que minimizaba la acción S

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\,\mathcal{L} = \delta S = 0}$$

En mecánica cuántica todos los posibles caminos aportan. En un libro de Dirac, Feynman lee

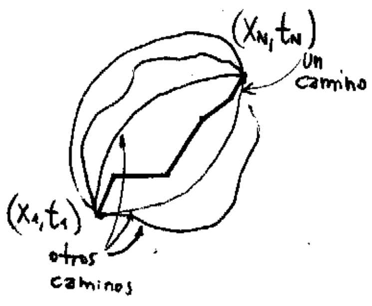
$$\underline{\langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle}\ \underline{\text{corresponde a}}\quad \underline{e^{i\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathcal{L}}{\hbar}dt}}$$

Definiremos:
$$S(n,n-1) \equiv \int_{t_{n-1}}^{t_n}\mathcal{L}(x,\dot{x})\,dt$$

Luego para considerar la suma sobre todos los segmentillos, a lo largo de un camino, tendremos:

$$\mathcal{N} = \prod_{n=2}^{N} e^{\frac{i}{\hbar}S(n,n-1)} = e^{\frac{i}{\hbar}\left(\sum_{n=2}^{N}S(n,n-1)\right)} = e^{i\frac{S}{\hbar}(N,1)}$$

luego, hay que considerar TODOS los posibles caminos



$$\boxed{\langle x_N,t_N|x_1,t_1\rangle \sim \sum_{\text{caminos}} e^{\frac{i}{\hbar}S(N,1)}}$$

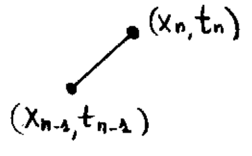
Cuando $\hbar\to 0$ las trayectorias contribuyen con una cantidad que oscila loca y violentamente. Tienden a la cancelación para caminos aledaños

Por $\hbar\sim 0$ la Δfase es grande $\Rightarrow$ se cancelan

Esto no ocurre cerca del camino (real) que cumple: $\delta S(N,1) = 0$

Para trayectorias cercanas la Δfase no es grande y hay interferencia constructiva

- Para un δt infinitesimal es:



$$\langle x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}\rangle = N\cdot e^{i\frac{S}{\hbar}(n,n-1)}$$

$$S(n,n-1) = \int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right) \underset{\substack{\text{orden}\\ 1\ \text{pues}\ \delta t\sim 0}}{\approx} \int_{t_{n-1}}^{t_n}dt\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{\delta t^2} - V\left(\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right)\right)$$

Consideremos, por ejemplo, una partícula libre: $\Rightarrow V=0$

$\Rightarrow$ resolviendo $$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = N \cdot e^{\,i m \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\hbar \Delta t}}$$

Esto no es otra cosa que el propagador de una partícula libre. Para un Δt finito será:

$$\langle x_n, t_n | x_1, t_1 \rangle = \underbrace{\lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int dx_{n-1} \int dx_{n-2} \cdots \int dx_2}\ \prod_{n=2}^{N} e^{\,i \frac{S}{\hbar}(n, n-1)}$$

$$\boxed{\langle x_n, t_n | x_1, t_1 \rangle = \int_{x_1}^{x_n} \mathcal{D}[x(t)] \cdot e^{\,i \int_{t_1}^{t_n} dt \frac{\mathcal{L}(x,\dot{x})}{\hbar}}}$$

◄ integral de camino de Feynman

En base a éstas Feynman desarrolla una formulación equivalente de la mecánica cuántica que utiliza los conceptos de: ① superposición ② composición de la transición ③ Límite clásico con $\hbar \to 0$.

$\boxed{\text{Estas integrales contienen toda la información del sistema cuántico, aunque no sea sencillo extraerla.}}$

Consideremos un propagador de $(x',0) \to (x',t)$

$$G(t) = \int dx' K(x',t; x',0) = \int dx' \langle x' | e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | x' \rangle = \sum_{a'} \int dx' \langle x' | e^{-i\frac{E_{a'}t}{\hbar}} | a' \rangle \langle a' | x' \rangle$$

$$G(t) = \sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}t} \int dx' |\langle x' | a' \rangle|^2 = \boxed{\sum_{a'} e^{-i\frac{E_{a'}}{\hbar}t}}$$

← Es reminiscencia de la función de partición de mecánica estadística

Tomando Laplace-Fourier $\rightsquigarrow$ $$\tilde{G}(E) = -i \int dE \, \frac{G(t)}{\hbar} \, e^{iEt/\hbar} = \boxed{\sum_{a'} \frac{1}{E - E_{a'}}}$$

← El espectro de autoenergías son los polos de $\tilde{G}(E)$

La expresión:

$$\langle x, t | x_1, t_1 \rangle \equiv \text{integral de camino de Feynman}$$

satisface la ecuación de Schrödinger y es una alternativa a la formulación de la cuántica usual.

Introducción AL Momento Angular (Rotaciones)

EL operador $\hat{L}$ será el encargado de realizar las rotaciones. Por el álgebra visto en la mecánica clásica sabemos que; dado un vector $\vec{v}$ y una matriz R ortogonal se tiene:

$$\boxed{\vec{V}' = R\,\vec{V}} \quad \text{con} \quad |\vec{V}'| = |\vec{V}| \quad |\vec{V}|^2 = V^t V \to (V^t R^t)(R V), \quad R^t R = R R^t = \mathbb{1} \text{ pues}$$

CLAUSURA $\quad (R_1 R_2)(R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = \mathbb{1}$ ← EL Producto de dos matrices ortogonales es otra matriz ortogonal

ASOCIATIVIDAD $\quad R_1 (R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3$

$\exists$ identidad $\mathbb{1}$ $\quad R.\mathbb{1} = \mathbb{1}.R = R$

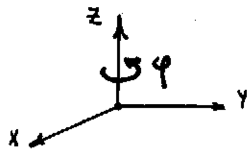
$\exists$ inversa R^{-1} $\quad R.R^{-1} = R^{-1}.R = \mathbb{1} \Rightarrow$ con $\boxed{R^{-1} \equiv R^t}$

$$\boxed{\text{MATRIZ ORTOGONAL} \quad R^t R = \mathbb{1}}$$

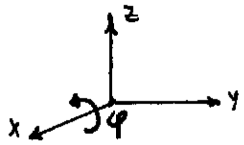
Esto define un grupo de matrices ortogonales que realiza rotaciones y se denomina $SO(3)$

No Conmutatividad de las Rotaciones Clásicas

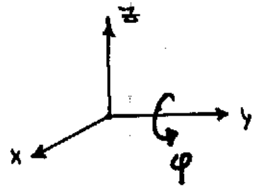
Las rotaciones finitas no conmutan. Luego el grupo de las rotaciones será un grupo abeliano



$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Si reemplazamos $\left\{ \begin{array}{l} \cos(\varepsilon) \cong 1 - \varepsilon^2/2 \\ \operatorname{sen}(\varepsilon) \cong \varepsilon \end{array} \right\}$ hasta orden 2

se puede ver que las rotaciones, (en torno a ejes diferentes) sólo conmutan a orden $1(\varepsilon) \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{rotación infinitesimal } (d\varphi) \text{ CONMUTA} \\ \text{rotación finita } (\varphi) \text{ NO CONMUTA} \end{array}}$

Rotaciones Cuánticas

Para las rotaciones cuánticas se pedirá:

$$\boxed{D(\hat{n}, d\varphi) = \mathbb{1} - i\,\frac{\vec{J}.\hat{n}}{\hbar}\,d\varphi} \quad \blacktriangleleft \text{ Rotación infinitesimal}$$

$$\boxed{D(\hat{n}, \theta) = e^{-i\frac{\vec{J}.\hat{n}}{\hbar}\theta}} \quad \blacktriangleleft \text{ Rotación finita}$$

donde $\hat{D}$ es el operador de las rotaciones, y $\hat{J}$ es un momento angular general. Se postula de esta forma para que $\hat{D}$ cumpla las mismas propiedades que R y la relación de conmutación

$$\boxed{R_x R_y - R_y R_x = R_z(\varepsilon^2) - \mathbb{1}}$$

$$D(\hat{x}, \varepsilon) \cdot D(\hat{y}, \varepsilon) - D(\hat{y}, \varepsilon) \cdot D(\hat{x}, \varepsilon) = D(\hat{z}, \varepsilon^2) - D(\mathbb{1})$$

$\Rightarrow$ la cuenta lleva a:

$$J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z \quad \Rightarrow \text{ generalizando se llega a:}$$

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} J_k}$$

← Relaciones de conmutación generales para momento angular $\hat{J}$

Para sistemas de spín 1/2 es $\mathcal{D}(\hat{n},\phi) \equiv e^{-i\frac{\vec{S}\cdot\hat{n}}{\hbar}}$

Se puede ver que ante rotaciones cuánticas $\mathcal{D}(\hat{n},\phi)$ los valores de expectación transforman como vectores

$$\begin{pmatrix} \langle S_x' \rangle \\ \langle S_y' \rangle \\ \langle S_z' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{(\hat{n},\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x \rangle \\ \langle S_y \rangle \\ \langle S_z \rangle \end{pmatrix}$$

En general $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ se transforma como vector $\Rightarrow \hat{J}$ es un operador vectorial

Para spín 1/2 es:

$$|\alpha\rangle = (\langle +|\alpha\rangle)|+\rangle + (\langle -|\alpha\rangle)|-\rangle$$

$$\mathcal{D}(\hat{z},\phi)|\alpha\rangle = e^{-i\frac{S_z}{\hbar}\phi}(\langle +|\alpha\rangle)|+\rangle + e^{-i\frac{S_z}{\hbar}\phi}(\langle -|\alpha\rangle)|-\rangle$$

$$\mathcal{D}(\hat{z},\phi)|\alpha\rangle = \langle +|\alpha\rangle e^{-i\phi/2}|+\rangle + \langle -|\alpha\rangle e^{i\phi/2}|-\rangle$$

Si $\phi = 2\pi$ (cosa que debería dejar al ket incólume)

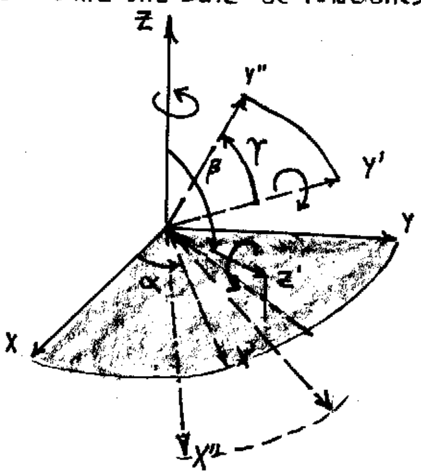
$$\mathcal{D}(\hat{z},2\pi)|\alpha\rangle = -\langle +|\alpha\rangle |+\rangle - \langle -|\alpha\rangle |-\rangle = \boxed{-|\alpha\rangle}$$

Luego, esto es una muestra del carácter no-clásico del spin; una vuelta completa le cambia el signo al ket [igualmente notemos que el valor de expectación – que es algo físico – no varía]

Es muestra de que el <u>ket no puede tener sentido físico</u>.

- **<u>Angulos de Euler</u>**

Se define una serie de rotaciones: ① $R_z(\alpha)$; ② $R_{y'}(\beta)$; ③ $R_{z'}(\gamma)$



Esto equivale a: $\boxed{R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{z'}(\gamma)\,.\,R_{y'}(\beta)\,.\,R_z(\alpha)}$ [1]

$$e^{-i\frac{J_{z'}}{\hbar}\gamma}\,.\,e^{-i\frac{J_{y'}}{\hbar}\beta}\,.\,e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\alpha} \quad |\psi\rangle$$

Pero desconozco como operar en los ejes móviles z', y'

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z^{-1}(\alpha)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)\, R_z(\gamma)\, R_{y'}^{-1}(\beta)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_{y'}(\beta)\, R_z(\gamma)\, \underbrace{R_{y'}^{-1}(\beta)\, R_{y'}(\beta)}_{\mathbb{1}}\, R_z(\alpha)$$

$$= R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z^{-1}(\alpha)\, R_z(\gamma)\, R_z(\alpha)$$

Los ángulos de Euler son la caracterización de una rotación general en 3D

$$\boxed{R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)\; R_y(\beta)\; R_z(\gamma)}$$

← Rotación equivalente a [1] pero para ejes fijos (en QM sabemos rotar en torno a ejes fijos)

Entonces nuestra rotación en 3D cuántica será:

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}_z(\alpha)\, \mathcal{D}_y(\beta)\, \mathcal{D}_z(\gamma) = e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\alpha}\, e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta}\, e^{-i\frac{J_z}{\hbar}\gamma}$$

Autoestados y Autovalores de J

Partimos de $\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} J_k}$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \qquad \boxed{[J^2, J_i] = 0} \longleftarrow$$

MUY IMPORTANTE. Se prueba evaluando directamente. Lleva a: $[J^2, J_i^n] = 0$ con $\begin{cases} i = x,y,z \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Se eligen J^2, J_z como observables que conmutan

$$J^2 |\overset{J^2}{a}, \overset{J_z}{b}\rangle = a\, |\overset{J^2}{a}, \overset{J_z}{b}\rangle$$
$$J_z |a, b\rangle = b\, |a, b\rangle$$

Definiremos los operadores de subida y de bajada:

$$\boxed{J_\pm \equiv J_x \pm i J_y} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \\ \boxed{[J_\pm, J^2] = 0} \end{cases}$$

$$J^2\big(J_\pm |a,b\rangle\big) = J_\pm J^2 |a,b\rangle = a\big(J_\pm |a,b\rangle\big) \quad\Rightarrow\quad J_\pm |a,b\rangle = \square\, |a,b\rangle$$

$$\big(J_z J_\pm - J_\pm J_z\big)|a,b\rangle = \pm\hbar J_\pm |a,b\rangle$$
$$J_z\big(J_\pm |a,b\rangle\big) = (b \pm \hbar)\big(J_\pm |a,b\rangle\big) \quad\Rightarrow\quad J_\pm |a,b\rangle = \boxtimes\, |a, b\pm\hbar\rangle$$

$$\boxed{J_\pm |a,b\rangle = c_\pm\, |a, b\pm\hbar\rangle}$$

$J_+ |a,b\rangle = c_+\, |a, b+\hbar\rangle$ sube el J_z en una unidad de $\hbar$

$J_- |a,b\rangle = c_-\, |a, b-\hbar\rangle$ baja el J_z en una unidad de $\hbar$

$$J_+ J_- = J_x^2 + iJ_yJ_x - iJ_xJ_y + J_y^2$$
$$J_- J_+ = J_x^2 - iJ_yJ_x + iJ_xJ_y + J_y^2$$

$$\boxed{(J_+^\dagger) = J_-}$$

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}\big(J_+J_- + J_-J_+\big)$$
$$J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}\big(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+\big)$$

$$\langle a,b | J^2 - J_z^2 | a,b\rangle = \langle a,b | J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+ | a,b\rangle\, (1/2)$$
$$(a - b^2)\langle a,b|a,b\rangle = \big[\langle a,b | J_+J_+^\dagger | a,b\rangle + \langle a,b | J_+^\dagger J_+ | a,b\rangle\big]\,(1/2)$$
$$(a - b^2) = |J_+^\dagger |a,b\rangle|^2 \geq 0 \qquad |J_+^\dagger |a,b\rangle|^2$$

$\boxed{a \geq b^2}$ ← Hay cota para b

$J_+ |a, b_M\rangle = 0$ ⟵ Como no puede seguir subiendo debe dar el ket nulo

$J_-J_+ |a, b_M\rangle = 0$, pero $J_-J_+ = J_x^2 + J_y^2 + i\,[J_x, J_y]$

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 + i\, i\hbar J_z$$
$$\big(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z\big)|a, b_M\rangle = 0$$
$$\big(a - b_M^2 - \hbar b_M\big)|a, b_M\rangle = 0$$
$$\boxed{a = b_M(b_M + \hbar)}$$

$J_- |a, b_m\rangle = 0$ ⟵ Como no puede seguir bajando debe dar el ket nulo

$J_+J_- |a, b_m\rangle = 0 \qquad J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

$$(J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)|a, b_m\rangle = 0$$
$$(a - b_m^2 + \hbar b_m)|a, b_m\rangle = 0$$
$$\boxed{a = b_m(b_m - \hbar)}$$

$b_M(b_M + \hbar) = b_m(b_m - \hbar)$
tiene solución
$b_M - b_m = -\hbar$ si $b_M + b_m \neq 0$
absurdo $\Rightarrow$ $\boxed{b_M = -b_m}$

Entonces $-b_m = b_M \Rightarrow -b_M \leq b \leq b_M$

Luego $|a, b_m\rangle \xrightarrow[J_+]{} |a, b_M\rangle$, y como J_+ sube de a un $\hbar$ será:

$b_M = b_m + n\hbar \rightarrow b_M = \frac{n\hbar}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)\hbar = j\hbar \Rightarrow j$ es entero o semientero

definiremos: $\boxed{b_M \equiv j\hbar}$ $\rightarrow$ $-j\hbar \leq b \leq j\hbar$ $\quad \frac{b}{\hbar} \equiv m$

$\boxed{a \equiv j(j+1)\hbar^2}$ $\quad \boxed{-j \leq m \leq j}$

$m = (-j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j)$ $\quad 2j+1$ valores de m

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 |j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2 |j,m\rangle \\ J_z |j,m\rangle &= m\hbar |j,m\rangle \end{aligned}}$$

- La normalización de $J_\pm$

$J_+|j,m\rangle = C_+|j,m+1\rangle \qquad J_-^\dagger = J_+$

$$\langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle = \langle j,m|J_+^\dagger J_+|j,m\rangle = |C_+|^2$$
$$= \langle j,m|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar^2 m = |C_+|^2$$

Por convención se toman $C_\pm \in \mathbb{R}$

$$C_+ = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle = \langle j,m|J_-^\dagger J_-|j,m\rangle = |C_-|^2$$
$$= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2 = |C_-|^2$$
$$C_- = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_+|j,m\rangle &= \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,|j,m+1\rangle \\ J_-|j,m\rangle &= \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle \end{aligned}}$$

- **Elementos de Matriz de J^2, J_z, J_+**

Asumiendo normalización de $|j,m\rangle$

$$\langle j',m'|J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2\,\delta_{j'j}\,\delta_{m'm}$$

$$\langle j', m' | J_z | j, m \rangle = m\hbar \, \delta_{j'j} \, \delta_{m'm}$$

$$\langle j', m' | J_\pm | j, m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \, \hbar \, \delta_{j'j} \, \delta_{m', m\pm 1}$$

- **elementos de matriz de $\mathscr{D}(R)$**

Ahora queremos ver cual es la forma de los elementos de matriz de $\mathscr{D}(R)$

$$\boxed{\mathscr{D}(R) = e^{-i \frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar} \phi}} \longleftarrow \left(\underline{\mathscr{D}(R) \text{ tiene por efecto rotar el sistema físico}} \right)$$

Lo primero a notar es que:

$$\langle j', m' | \mathscr{D}(R) | j, m \rangle \propto \delta_{j'j}$$

, porque $[J^2, J_i] = 0 \rightarrow$ y $\mathscr{D}(R) = f(J_i) \rightarrow [J^2, \mathscr{D}(R)] = 0$

$\Downarrow$

$[J^2, J_i^n] = 0$

luego

$$\boxed{\mathscr{D}^{(j)}_{m'm} = \langle j, m' | e^{-i \frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar} \phi} | j, m \rangle}$$

◀ Es una matriz para cada j fijo con $\{(2j+1) \times (2j+1) = \text{dimensión}\}$

$$\mathscr{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} | j, m' \rangle \langle j, m' | e^{-i \vec{J}\cdot\hat{n}\phi/\hbar} | j, m \rangle = \sum_{m'} \mathscr{D}^{(j)}_{m'm}(R) \, | j, m' \rangle$$

$\boxed{\text{Las rotaciones no cambian el } j}$

$\Downarrow$

$\boxed{\mathscr{D}(R) \text{ conecta estados con la misma } j}$

$$\mathscr{D}^{(j)}_{m'm} \in (2j+1) \times (2j+1)$$

$$\boxed{\mathscr{D}(R) | j, m \rangle = \sum_{m'} \mathscr{D}^{(j)}_{m'm}(R) \, | j, m' \rangle}$$

La matriz de $\mathscr{D}(R)$ (no caracterizada por un único j) puede ponerse en forma diagonal por bloques:

$$\mathscr{D}(R) \doteq \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j' & j'' & j''' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 \quad 0 & & \blacksquare \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} j' \\ j'' \\ j''' \end{array}$$

con cada bloque de $(2j+1) \times (2j+1)$. Cada bloque sin embargo es irreducible.

<u>Las matrices de rotación con j fijo forman un grupo</u>

$\mathscr{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ son los elementillos de la matriz de rotación

$$\boxed{|j, m\rangle \xrightarrow[\text{Rotación}]{} \mathscr{D}(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} \underbrace{\mathscr{D}^{(j)}_{m'm}(R)}_{\text{amplitud de hallar al } |j,m\rangle \text{ rotado en } |j,m'\rangle} |j, m'\rangle}$$

- **forma explícita del operador $\mathscr{D}(R)$**

Los ángulos de Euler permitieron caracterizar la rotación más general. Entonces:

$$\mathscr{D}^{(j)}_{m'm} = \langle j, m' | e^{-i \frac{J_z \cdot \alpha}{\hbar}} \, e^{-i \frac{J_y \cdot \beta}{\hbar}} \, e^{-i \frac{J_z}{\hbar} \gamma} | j, m \rangle$$

$$\boxed{\mathscr{D}^{(j)}_{m'm} = \underbrace{e^{-i(m'\alpha + m\gamma)}}_{\text{una fase}} \, \underbrace{\langle j, m' | e^{-i \frac{J_y \cdot \beta}{\hbar}} | j, m \rangle}_{\equiv \, d^{(j)}_{m'm}(\beta)}}$$

En los $d^{(j)}_{m'm}$ está la dificultad de la cuenta.

▪ Formalismo de Spinores de Pauli

Apropiado para trabajar con sistemas de spin ½. Estos sistemas son casos particulares de momento angular: $j=\frac{1}{2}$ $m=-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}$ → Se definen los spinores $\chi_\pm$ como:

$$\boxed{\begin{aligned}|+\rangle &\doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv\chi_+\\ |-\rangle &\doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\equiv\chi_-\end{aligned}}\qquad \chi_+^\dagger \equiv \langle +| \qquad \chi_-^\dagger\equiv\langle -|$$

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix}\langle +|\alpha\rangle\\ \langle -|\alpha\rangle\end{pmatrix}\qquad \langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix}\langle +|\alpha\rangle & \langle -|\alpha\rangle\end{pmatrix}$$

Para spin ½ podemos tomar $\vec{J}=\vec{S}$ por la analogía de las relaciones de conmutación. A su vez

$$\boxed{\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\overleftrightarrow{\sigma}}\quad \text{con}\quad \boxed{\overleftrightarrow{\sigma}\equiv(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)}\quad \text{(es una especie de vector)}$$

Luego esta equivalencia provee expresión de los operadores S_i en términos de matrices de 2x2. Así:

$$\overleftrightarrow{\sigma}=\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]$$

Matrices de Pauli

$$\frac{i[(J_-)-(J_+)]}{2}=\underbrace{J_y\doteq S_y}_{\text{actúan sobre kets}}\doteq\underbrace{\frac{\hbar}{2}\sigma_y}_{\text{actúa sobre spinores}}$$

Propiedades básicas de las matrices de Pauli

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_i^2=\mathbb{1}\qquad \sigma_i^n=\begin{cases}\mathbb{1} & n \text{ par}\\ \sigma_i & n\text{ impar}\end{cases}\\ &\sigma_i^\dagger=\sigma_i\\ &[\sigma_i,\sigma_j]=i2\epsilon_{ijk}\sigma_k\\ &\{\sigma_i,\sigma_j\}=\delta_{ij}\end{aligned}}$$

$$|+\rangle\equiv|j=1/2, m=1/2\rangle$$
$$|-\rangle\equiv|j=1/2, m=-1/2\rangle$$

$$\boxed{(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{a})(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{b})+i\overleftrightarrow{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

- Aplicación a las Rotaciones (con $j=1/2$)

$$\mathcal{D}(\hat{n},\phi)=e^{-i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\phi}\doteq e^{-i\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n}\frac{\phi}{2}}\quad;\ \text{pero}\quad (\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n})^n=\begin{cases}\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n} & n\text{ impar}\\ \mathbb{1} & n\text{ par}\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$e^{-i\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n}\frac{\phi}{2}}=1-i\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n}\frac{\phi}{2}-\frac{1}{2!}(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n})^2\left(\frac{\phi}{2}\right)^2+\frac{i}{3!}(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n})^3\left(\frac{\phi}{2}\right)^3-\dots$$

$$\boxed{\mathcal{D}(\hat{n},\phi)=e^{-i\sigma\cdot\hat{n}\frac{\phi}{2}}=\mathbb{1}\cdot\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)-i\cdot\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)}\quad;\ \text{con } \mathbb{1}\in 2\text{x}2$$

▲ operador de rotación para sistemas de spin ½

Con esta expresión podemos evaluar $d^{j=1/2}_{m'm}(\beta)$

$$\boxed{\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n}$$

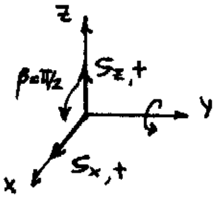
$$\boxed{\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{2n}}{(2n)!}(-1)^n}$$

$$d^{1/2}(\beta)\doteq\begin{array}{c} \begin{array}{cc}|+\rangle & |-\rangle\end{array}\\ \begin{pmatrix}\cos\beta/2 & -\operatorname{sen}\beta/2\\ \operatorname{sen}\beta/2 & \cos\beta/2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}|+\rangle\\ |-\rangle\end{array}$$

En el caso general el operador de rotación para sistemas de spin ½ lucirá:

$$\boxed{\mathcal{D}^{j=1/2}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\cdot\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)}\cdot\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}}$$

- Ejemplo



$$d^{1/2}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad d^{1/2}(\pi/2)\,\chi_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\chi_+ + \chi_-\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

Este resultado es intuitivamente lógico $\longrightarrow$ $d^{1/2}(\pi/2)\,\chi_+ = |S_x;+\rangle$

Rotaciones en Sistemas con $j=1$

Ahora tenemos: $j=1 \quad m=-1,0,1$; recordando J_y en términos de escaleras:

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i} \rightarrow \quad J_y \doteq \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |11\rangle & |10\rangle & |1{-1}\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ |11\rangle \\ |10\rangle \\ |1{-1}\rangle \end{array}$$

$$e^{-i\frac{J_y}{\hbar}\beta} = 1 + -i\frac{J_y}{\hbar}\beta + (-i)^2\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^2\frac{1}{2!} + (-i)^3\left(\frac{J_y}{\hbar}\beta\right)^3\frac{1}{3!} + \dots$$

$$= 1 - i\frac{J_y\beta}{\hbar} - \frac{1}{2!}\left(\frac{J_y\beta}{\hbar}\right)^2 - \frac{i}{3!}\left(\frac{J_y\beta}{\hbar}\right)^3$$

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) & n \text{ impar} \\ \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\boxed{e^{-i\frac{J_y\beta}{\hbar}} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta) - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\cdot\text{sen}\,\beta = \hat{d}^{j=1}(\beta)}$$

acá lo vemos como operador [es notación]

$$d^{j=1}(\beta) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} |11\rangle & |10\rangle & |1{-1}\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\beta & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ |11\rangle \\ |10\rangle \\ |1{-1}\rangle \end{array}$$

$d^{j=1}_{m'm}(\beta)$ simboliza la matriz

■ Momento Angular Orbital

$\boxed{\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}}$ verifica el álgebra de $\hat{J}$

$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$ $\qquad$ $L_i = \epsilon_{ijk} X_j P_k$

$$L_z = x \cdot p_y - y \cdot p_x$$

Consideremos una rotación en torno a $\hat{z}$, en un $\delta\phi$

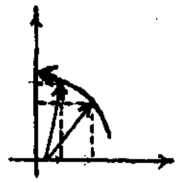
$$\left(1 - \frac{i L_z \delta\phi}{\hbar}\right)|x', y', z'\rangle = 1 - \frac{i x p_y}{\hbar}\delta\phi + \frac{i y p_x}{\hbar}\delta\phi \quad |x', y', z'\rangle$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar}p_y(x \cdot \delta\phi) + \frac{i}{\hbar}p_x(y \cdot \delta\phi) \quad |x', y', z'\rangle \longrightarrow$$

Esto es una traslación en $\hat{x}, \hat{y}$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\left(-p_x \cdot y\delta\phi + p_y \cdot x\delta\phi\right)\right)|x', y', z'\rangle$$

$$\boxed{\left(1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi\right)|x', y', z'\rangle = |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle}$$



Esta traslación es debida a una rotación infinitesimal, en $\delta\phi$, torno a $\hat{z}$ $\Rightarrow$ L

L_z genera las rotaciones clásicas (en torno a $\hat{z}$)

$$\psi_\alpha(\vec{x}') = \langle x', y', z' | \alpha\rangle \xrightarrow{\text{ROTAMOS EN } \hat{z}} \langle x', y', z' | 1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi | \alpha\rangle = \langle x' + y'\delta\phi, y' - x'\delta\phi, z' | \alpha\rangle$$

Coordenadas esféricas $\downarrow$

$$\psi_\alpha(\vec{r}') = \langle r, \theta, \varphi | \alpha\rangle \xrightarrow{\text{ROTAMOS EN } \hat{z}} \langle r, \theta, \varphi - \delta\phi | \alpha\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\phi|\alpha\rangle \simeq \frac{\langle\phi + \delta\phi|\alpha\rangle - \langle\phi|\alpha\rangle}{\delta\phi} \simeq \frac{\langle\phi|\alpha\rangle - \langle\phi - \delta\phi|\alpha\rangle}{\delta\phi}$$

$$\langle\phi - \delta\phi|\alpha\rangle \simeq \langle\phi|\alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial\phi}\langle\phi|\alpha\rangle\delta\phi$$

Podemos hallar una expresión para L_z en esféricas:

$$\langle r, \theta, \varphi | 1 - i\frac{L_z}{\hbar}\delta\phi | \alpha\rangle \simeq \langle\phi|\alpha\rangle - \frac{\partial}{\partial\phi}\langle\phi|\alpha\rangle \cdot \delta\phi \quad \Rightarrow$$

identificamos:

$$\langle\vec{r}| - i\frac{L_z}{\hbar}|\alpha\rangle = -\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\vec{r}|\alpha\rangle$$

$$\boxed{L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}}$$ ◄ Operador L_z en esféricas

Usando

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}\left(L_+L_- + L_-L_+\right) \quad \text{se llega a:}$$

$$\langle r, \theta, \varphi | L^2 | \alpha\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\right]\right]\langle r, \theta, \varphi | \alpha\rangle$$

$$\boxed{L^2 = -\hbar^2 r^2 \cdot \nabla^2_{\theta,\varphi}}$$, donde $\nabla^2_{\theta,\varphi}$ es la parte angular del Laplaciano en coordenadas esféricas.

Esto puede obtenerse también partiendo de:

$$\boxed{L^2 = \vec{x}^2\vec{p}^2 - (\vec{x}\cdot\vec{p})^2 + i\hbar\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Sea un H de partícula, sin spín, sujeta a potencial simétricamente esférico. Sabemos que la función de onda $\psi_\alpha(\vec{r})$ es separable en coordenadas esféricas, entonces:

$$\boxed{\langle \vec{r} \mid n, l, m \rangle = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)}$$

La dependencia angular es común para todo problema de simetría esférica

$$\langle \vec{r} | n, l, m \rangle = \left(\langle r | \otimes \langle \theta, \varphi |\right)\left(|n, l, m\rangle\right) = \langle r | n, l, m \rangle \langle \theta, \varphi \mid l, m \rangle$$

Cuando el H es esféricamente simétrico (como en potencial central) se tiene

$$[H, L_z] = [H, L^2] = 0$$

Trabajaremos solamente en la parte angular $\quad |\theta, \varphi\rangle \equiv |\hat{n}\rangle$

$$\boxed{\langle \hat{n} | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\hat{n})}$$

amplitud de hallar $|l, m\rangle$ en la dirección $\hat{n}$

Podemos vincular ahora los armónicos esféricos con los autoestados de L_z, L^2

$$L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle \longrightarrow \langle \hat{n} | L_z | l, m \rangle = m\hbar \langle \hat{n} | l, m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | l, m \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$m \langle \hat{n} | l m \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | l, m \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Y_l^m(\theta \varphi) \propto e^{im\phi}}$$

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle$$

$$\langle \hat{n} | L^2 | l, m \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle \hat{n} | l, m \rangle =$$

$$-\hbar^2 r^2 \nabla^2_{\theta\varphi} \langle \hat{n} | l, m \rangle = l(l+1)\hbar^2 \langle \hat{n} | l, m \rangle$$

$$\left(-\hbar^2 r^2 \nabla^2_{\theta, \varphi} + l(l+1)\hbar^2\right) \langle \hat{n} | l, m \rangle = 0$$

Con la $\begin{cases} \text{ortogonalidad} \longrightarrow \langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \\ \text{completitud} \longrightarrow \int d\Omega \, |\hat{n}\rangle\langle \hat{n}| = 1 \end{cases}$ llegamos a:

$$\int d\Omega \langle l', m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

$$\int d\Omega \; Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

Podemos hallar una expresión para:

$$\langle \hat{n} | L_+ | l, l \rangle = 0$$

$$-i\hbar e^{i\varphi} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \langle \hat{n} | l, l \rangle = 0 \quad \rightarrow \quad Y_l^l(\theta, \varphi) = c_l \cdot e^{il\varphi} \cdot \operatorname{sen}^l\theta$$

Luego usamos L_- para hallar sucesivamente los demás Y_l^m

$$\frac{\langle \hat{n} | L_- | l, m \rangle}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \langle \hat{n} | l, m-1 \rangle$$

Por este camino se llega a:

$$\boxed{Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi \, (l-m)!}} \; e^{im\varphi} \; \frac{1}{\operatorname{sen}^m\theta} \cdot \frac{d^{\,l-m}}{d(\cos^{l-m}\theta)} (\operatorname{sen}\theta)^{2l}}$$

con:

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left(Y_l^m[\theta, \varphi]\right)^* \qquad\qquad Y_l^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \, P_l(\cos\theta)$$

En el caso de momento angular orbital "l" no puede ser semientero porque entonces "m" sería semientero y en una vuelta de 2π

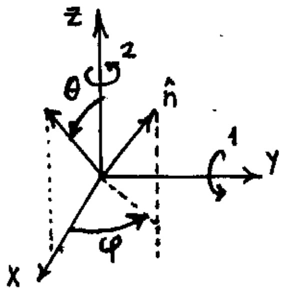
$$e^{im2\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad \psi \text{ no sería univaluada}$$

Además $\qquad \langle \vec{x}' | e^{-i\frac{L_z 2\pi}{\hbar}} | \alpha \rangle = \langle \vec{x}' | \alpha \rangle \qquad$ (no hay signo menos)

■ Armónicos Esféricos como Matrices de Rotación

Se pueden hallar autoestados dirección $|\hat{n}\rangle$ rotando el $|\hat{z}\rangle$

$$|\hat{n}\rangle = \mathcal{D}(R)\,|\hat{z}\rangle$$



Necesitamos aplicar $\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(\alpha=\varphi, \beta=\theta, \gamma=0)$

$$|\hat{n}\rangle = \sum_{l,m} \mathcal{D}(R)\,|l,m\rangle\langle l,m|\hat{z}\rangle$$

$$\langle l,m'|\hat{n}\rangle = \sum_{l,m} \underbrace{\langle l,m'|\mathcal{D}(R)|l,m\rangle}\langle l,m|\hat{z}\rangle$$

→ La $\mathcal{D}(R)$ no conecta l diferentes

$$\langle l,m'|\hat{n}\rangle = \sum_{m} \mathcal{D}^{l}_{m'm}(R)\,\langle l,m|\hat{z}\rangle$$

$$Y_l^{m'*}(\theta,\varphi) = \sum_m \mathcal{D}^{l}_{m'm}(R)\;\underbrace{Y_l^{m*}(\theta=0,\varphi\text{ indeterminado})}$$

Pero como con $\theta=0$ $Y_l^m = 0$ (con $m\neq 0$) se tiene:

$$\langle l,m|\hat{z}\rangle = Y_l^{m*}(\theta=0,\varphi\text{ indeterminado})\cdot\delta_{m0}$$

$$\langle l,m|\hat{z}\rangle = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\cdot\delta_{m0}$$

$$\boxed{Y_l^{m'*}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\mathcal{D}^{l}_{m'0}(\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0)}$$

◄ La matriz de rotación en este caso es un armónico esférico

La Ψ tiene la misma simetría que el potencial