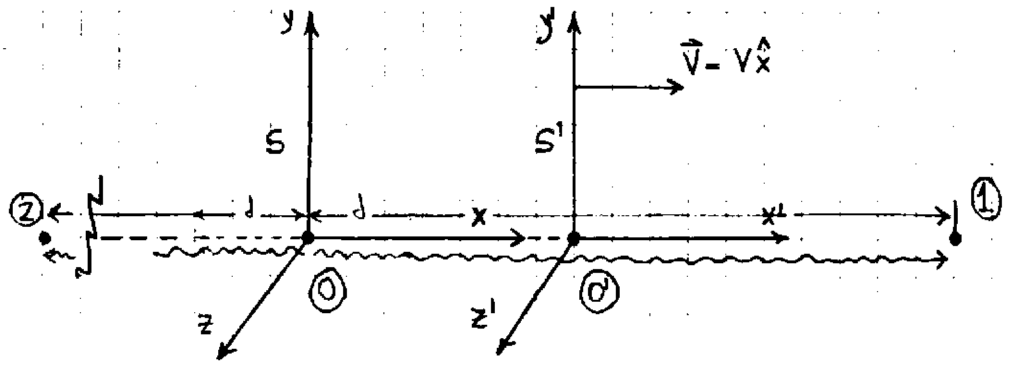
GUÍA 7

Relatividad Especial. Formulación covariante del EM.

1.



* transf Lorentz

$$y' = y \quad , \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (x - v.t) \quad , \quad z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} . x\right)$$

(a) (ii) $c^2 t^2 = d^2 \rightarrow t = \frac{d}{c}$

tiempo que emplea un rayo de luz en ir desde O hasta $\begin{cases} \text{reloj ①} \\ \text{reloj ②} \end{cases}$ visto desde S

reloj en d $\quad t_1' = \gamma \left(\frac{d}{c} - \frac{v}{c^2} d\right)$

reloj en $-d$ $\quad t_2' = \gamma \left(\frac{d}{c} + \frac{v}{c^2} d\right)$

$$t_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{d}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{\cancel{c} \cdot d (c-v)}{\underbrace{(c^2 - v^2)^{1/2}}_{(c-v)^{1/2}(c+v)^{1/2}} \cancel{c} \cdot c}$$

$$t_2' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{d}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

tiempo que emplea un rayo de luz en ir desde O hasta reloj ① / reloj ② vistos desde S'

reloj ① $\qquad$ reloj ②

$$t_1' = \frac{d \, (c-v)^{1/2}}{(c+v)^{1/2} c} \qquad t_2' = \frac{d (c+v)^{1/2}}{c (c-v)^{1/2}}$$

$$t_1' + t_2' = \frac{d}{c}\left(\frac{(c-v)^{1/2}}{(c+v)^{1/2}} + \frac{(c+v)^{1/2}}{(c-v)^{1/2}}\right)$$

$$t'_{tot} = \frac{d}{c}\left[\frac{c \cancel{-v} + c \cancel{+v}}{(c^2 - v^2)^{1/2}}\right]$$

$$t'_{tot} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{c}$$

(i) Como la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas los relojes fijos ①, ② están sincronizados entre sí en S

(b) Cuando $O' = d$ (medido en S) es:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot (d - v.t) \rightarrow t = \frac{d}{v}$$

(tiempo de O' en ir de O a d)

En este caso O' marcará:

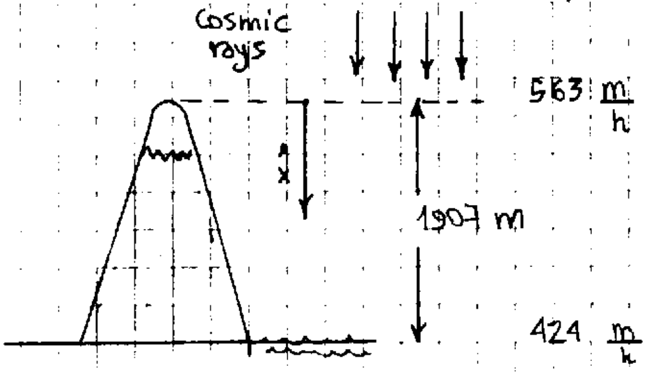
$$t' = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot \left(\frac{d}{v} - \frac{v.d}{c^2}\right) = \frac{d}{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

El reloj en O' marcará un tiempo menor $\rightarrow$ $\boxed{t' = \frac{d}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

(c)

* CONTINÚA EN HOJA SIGUIENTE

2. vida media: $\tau' = 2,2\, 10^{-6}$ seg (en un sistema solidario al muón pero en reposo (casi)) $\quad \frac{N(t)}{h} = \frac{N(t=0)}{h} e^{-t/\tau}$



$t = 6,3873\cdot 10^{-6}$ seg

* usamos $\boxed{c = 3.10^8 \frac{m}{s}}$

* No relativista

$$N_h = 563 \frac{m}{h} . e^{-t/\tau}$$

muones por hora $\searrow$ $N_h = 30,8 \frac{m}{h}$ (en el mar)

(No está de acuerdo con la experiencia)

K' ≡ sistema sobre el muón (muón en reposo)

Pasamos el tiempo de caída al sistema muón

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \cdot \left(t - \frac{V.X}{c^2}\right)$$ → distancia recorrida en la caída

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-0,9952^2}}\left(6,3873.10^{-6} s - \frac{0,9952.1907.m}{c}\right)$$

$$t' = (10,218)\, 6,385\, 10^{-8} seg = 6,24783.10^{-7} seg$$

$$\underset{\text{(en el mar)}}{N_h} = 563.\frac{m}{h}.e^{-\frac{6,24\, 10^{-7} s}{2,2.10^{-6} s}} = \boxed{423,81 \frac{m}{h}}$$ ⇒ Resultado compatible con relatividad especial

vida media ↳ $\tau = t_{muerte} - t_{nacimiento}$ ⇒ $\tau' = \gamma\left(t_M - \frac{V.X_M}{c^2}\right) - \gamma\left(t_n - \frac{V.X_n}{c^2}\right)$

$$\tau' = \gamma\left[t_M - \underbrace{t_n}_{=0} - \frac{V.X_M}{c^2} + \underbrace{\frac{V.X_n}{c^2}}_{=0}\right]$$

OBS.
Donde se ha definido $t_M = \tau$
y $X_M = V.t_M = V.\tau$

$$\tau' = \gamma\left[\tau - \frac{V.V\tau}{c^2}\right] = \gamma.\frac{1}{\gamma^2}.\tau \Rightarrow \tau = \gamma.\tau'$$

La vida media vista desde el Laboratorio es mayor → $\boxed{\tau = 2,248.10^{-5} seg}$

(c) del ejercicio 1.

$$\Delta S = c^2 \Delta t^2 - |\Delta \vec{x}|^2 = \Delta S' = c^2(\Delta t')^2 - |\Delta \vec{x}'|^2$$ → invariante lorentziano

Luz a ② $\quad c^2 \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^2 - d^2 = 0$

Luz a ① $\quad c^2\left(\frac{-d}{c}\right)^2 - (-d)^2 = 0$

Los intervalos son luminosos ≡ solo pueden conectarse por señales de luz

$\boxed{\Delta S \text{ vale cero en ambos casos}}$

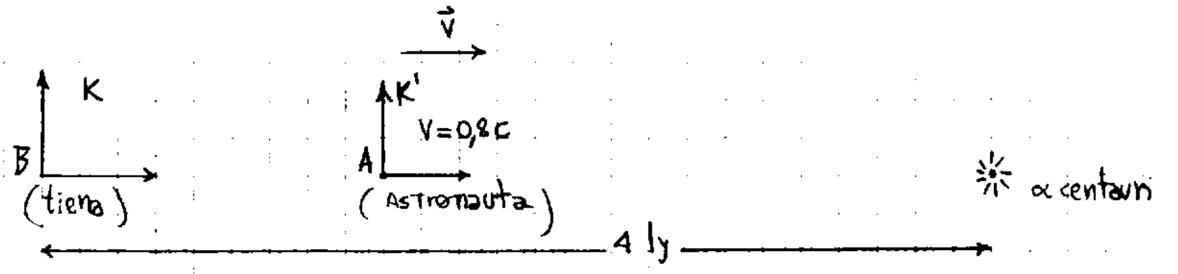
Luz a ② $\quad c^2 \cdot \left(\frac{d}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\right)^2 - \gamma^2\left(d - \frac{v \cdot d}{c}\right)^2 =$

$$d \cdot \left(\frac{c-v}{c+v}\right) - \frac{c^2}{c^2-v^2}(d^2) \cdot \frac{(c-v)^2}{c^2} =$$

$$\frac{d^2(c-v)}{(c+v)} - \frac{d^2}{(c+v)}(c-v) = 0$$ → por ser invariante da lo mismo en cualquier sistema inercial

$\Delta S > 0$ temporal
$\Delta S < 0$ espacial

4.



(a)

en K el viaje duró 10 años, para K' el tiempo se arrastra ⇒

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \left(\frac{10}{6}\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right)$$

tiempo de la travesía total según el A $\rightsquigarrow$ $t'_{lleg} = \gamma\left(t_{lleg} - \frac{V.X_\alpha}{c^2}\right).2$

$V.X_\alpha$ → v.t

.2 → dos veces el viaje (Tierra - α cen)

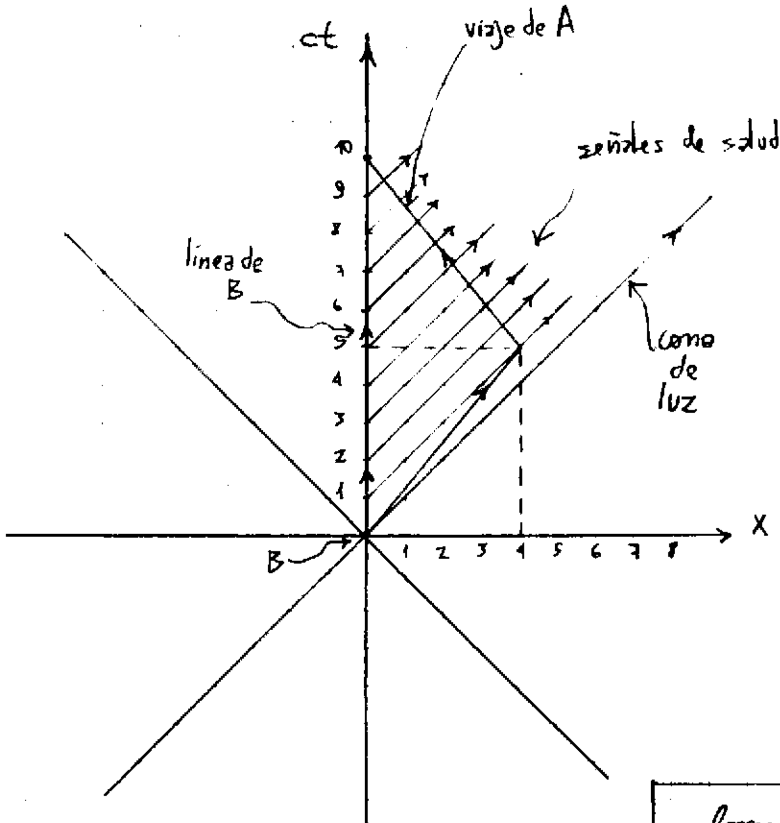
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t).\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}.\Delta t$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma}\, 10 \text{ años} = \frac{6}{\cancel{10}}.\cancel{10} \text{ años} \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta t' = 6 \text{ años}}$$

Esto significa que cuando se reencuentran han pasado 10 años para B y sólo 6 para A ⇒ B está más viejo

(b)



$$X' = \gamma(x - v.t)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V.X}{c}\right)$$

$$X = \gamma(x' + v.t')$$

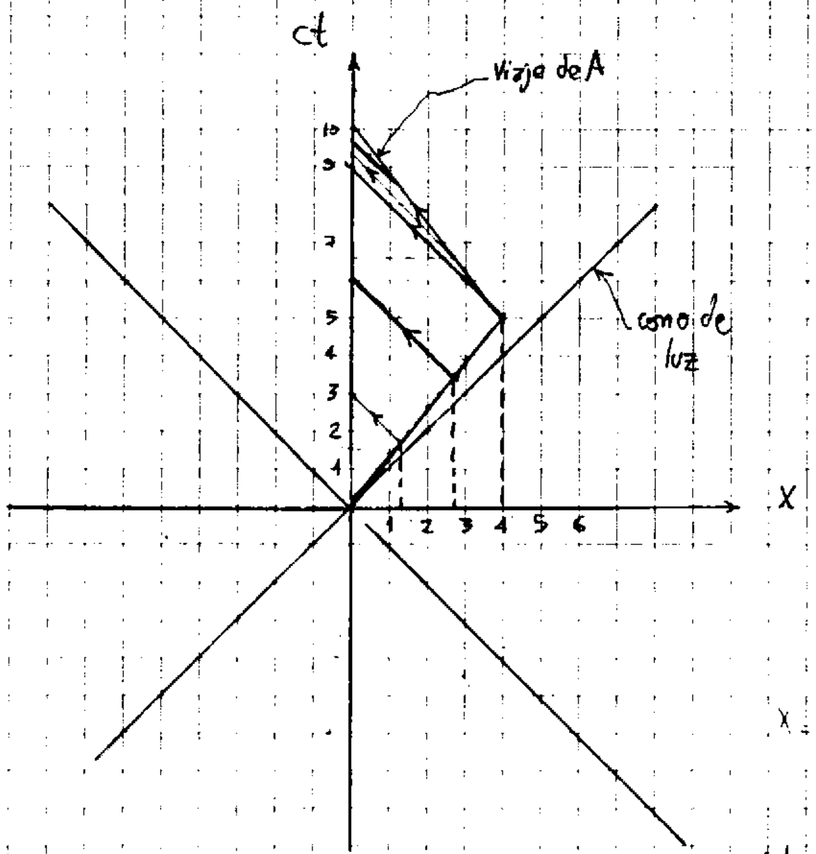
$$X = \left(\frac{V}{c}\right) c.t \Rightarrow$$

$$ct = \frac{1}{V/c}.X$$

$$ct = \frac{1}{0.8}\, x$$

Como puede verse en el diagrama el astronauta A recibe la 1ra señal cuando está a punto de retornar.
Las otras nueve señales le llegan durante su viaje de retorno.

(c)



1 año viajando a 0,8c recorre 0,8 años-luz. Pero para distancias terrestres serán:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v.x}{c^2}\right)$$

$$t' = \gamma . t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$t' = \frac{10}{6} . t \, \frac{36}{100} \quad \therefore$$

$$t = t' \frac{10}{6}$$

1 año en nave
1,66 años tierra

distancia recorrida vista desde tierra

$$X_1 = \gamma (X_1' + v.t_1')$$

distancia recorrida vista desde la nave

tiempo transcurrido en la nave

$$X = \gamma (0 + 0,8c . 1)$$

$$X = \frac{10}{6}(0,8) = \frac{10}{6}\frac{8}{10} = 4/3 \text{ ly}$$

$$X = \gamma . v . t'$$

$$t = \gamma \left(t' + \underbrace{\frac{v.x'}{c^2}}_{=0}\right)$$

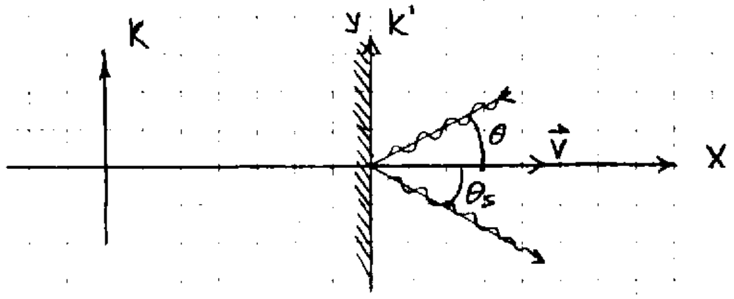
pues el astronauta A no se mueve de su origen

Puede verse en el diagrama que cada mensaje de A es recibido cada 3 años en la tierra por B para los tres primeros mensajes y que los 3 finales llegan ~~todos~~ agolpados el último año ⇐ Desde K' (la nave) la posición de A es siempre el origen $x' = 0$ ⇐

(d) AL viajar A hasta α-centauri con 0.8c la señal de radio que viaja con c.

(e) B tiene 5 años más justo antes del retorno
A tiene 3 años más justo antes del retorno

5.



fotón $E = h.\nu$

$p = \frac{E}{c}$

Se conserva el $p^\mu = (p_0, \vec{p}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ se Conserva el cuadrivector momento

* Sistema K'

$$p_i^\mu = \left(\frac{E'}{c}, -\frac{E'}{c}\cos\theta'\hat{x}, -\frac{E'}{c}\operatorname{sen}\theta'\hat{y}, 0\right)$$

$$p_f^\mu = \left(\frac{E_f'}{c}, \frac{E_f'}{c}\cos\theta_s'\hat{x}, -\frac{E_f'}{c}\operatorname{sen}\theta_s'\hat{y}, 0\right)$$

$$E_i' = E_f' \rightarrow \frac{h.\nu'}{c} = \frac{h\nu_f'}{c} \qquad \theta' = \theta_s'$$

* sistema K

$$p^\mu = \left(\frac{h.\nu}{c}, \frac{h.\nu}{c}\cos\theta\,\hat{x}, -\frac{h\nu}{c}\operatorname{sen}\theta\,\hat{y}, 0\right)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \gamma\left(\frac{h\nu'}{c} + \beta.\frac{h\nu'}{c}\cos\theta'\right) = \gamma.\frac{h\nu'}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta'\right)$$

$$\frac{h.\nu}{c}\cos\theta = \gamma\left(\frac{h\nu'}{c}\cos\theta' + \beta.\frac{h\nu'}{c}\right)$$

$$\cancel{\frac{h}{c}}\nu.\cos\theta = \gamma\cancel{\frac{h}{c}}\nu'\left(\cos\theta' + \frac{v}{c}\right)$$

$$h\nu = \gamma.h\nu'.\left(1 + \frac{v}{c}.\cos\theta'\right)$$

$$\boxed{E_{LABO} = \gamma.E.\left(1 + \frac{v}{c}.\cos\theta\right)}$$

datos del problema

$$\cos\theta_L = \gamma.\frac{\nu'}{\nu}.\left(\cos\theta' + \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{E}{E_{LABO}} = \frac{\nu'}{\nu}$$

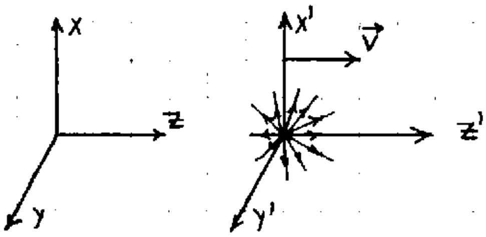
$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}.\cos\theta\right)}$$

$$\cos\theta_L = \frac{\gamma\,(v/c + \cos\theta)}{\gamma\left(1 + v/c\cos\theta\right)}$$

ángulo de desvío desde el laboratorio (sistema K)

$$\boxed{\cos\theta_L = \left(\frac{v/c + \cos\theta}{1 + v/c.\cos\theta}\right)}$$

7. K K'



La fuente emite isótropamente en K' (sistema propio)
Queremos ver como se percibe esa emisión en K (laboratorio)

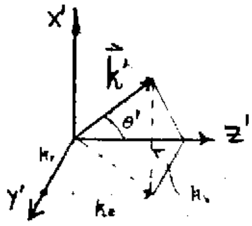
$$\psi = \frac{A}{r'} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}' - \omega' t')}$$

$$k'_z = \gamma\left(k_z - \beta \cdot \frac{\omega}{c}\right) \rightarrow k_z = \gamma\left(k'_z + \beta \cdot \frac{\omega'}{c}\right)$$

$$k'_x = k_x$$

$$k'_y = k_y$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z\right) \rightarrow \frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} + \beta \cdot k' \cos\theta'\right)$$



$$\frac{\omega}{\cancel{c}} = \gamma \frac{\omega'}{\cancel{c}}\left(1 + \beta \cdot \cos\theta'\right)$$

$$\omega = \gamma\omega'\left(1 + \beta\cos\theta'\right)$$

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \beta \cdot \cos\theta\right)$$

$$\omega = \gamma^2\omega\left(1 + \beta \cdot \cos\theta'\right)\left(1 - \beta \cdot \cos\theta\right)$$

$$k_z = \gamma\left(k' \cdot \cos\theta' + \beta \cdot k'\right) = \gamma k'\left(\cos\theta' + \beta\right)$$

Desde el sistema propio K', considerando el hemisferio delantero será $\theta \in (0, \pi/2)$ siendo:

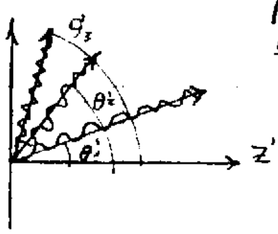
$\theta' = 0$

$\pi/2$ viniendo de valores menores $\theta' = \pi/2$ último ángulo para el cual podemos considerar que hay emisión hacia adelante (último ángulo que tiene componente de $\vec{k}$ en $+\hat{z}$)

$$1 = \gamma^2\left(1 + \beta \cdot \cos\theta'\right)\left(1 - \beta \cdot \cos\theta\right)$$

$$0 = \gamma \cdot \left(\cos\theta - \beta\right)$$

$\theta' = \pi/2 \implies \arccos\beta = \theta$



$\theta' = \pi/2$ Corresponde a un $\theta_{(\text{sistema K})} \equiv \alpha$; $\beta = \cos\alpha$

Luego la emisión hacia adelante se concentra (vista en K) en un cono de ángulo α

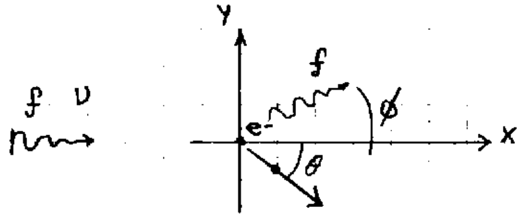
$$\beta^2 = \cos^2\alpha$$

$$1 - \beta^2 = 1 - \cos^2\alpha$$

$$1 - \beta^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{asen}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

9.



$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

Fotón → f $\quad E^2 = c^2p^2 \rightarrow E_f = cp = h\nu$

$$P^{\mu}_{f} = \left(\frac{E_f}{c}, \frac{E_f}{c}\hat{p}\right)$$

$$E^2 = m_e^2c^4 \rightarrow E_e = m_ec^2$$

e⁻ en reposo

	sistema K antes [Laboratorio]
f	$\left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\hat{x}\right)$
e⁻	$\left(\frac{m_eC^2}{c}, 0\right)$
	sistema K después [Laboratorio]
f	$\left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{C}(\cos\phi\,\hat{x} + \text{sen}\,\phi\,\hat{y})\right)$
e⁻	$\left(\frac{(m_e^2c^4 + c^2P_e^2)^{1/2}}{c}, P_x^e + P_y^e\right)$

Aquí no hay dos sistemas, considero que se conserva el P^{μ} (energía y momento)

$$\Rightarrow$$

$$P^{\mu}_{inicial} = P^{\mu}_{Final}$$

$$\frac{h\nu}{c} + \frac{m_eC^2}{c} = \frac{h\nu'}{c} + \frac{\sqrt{m_e^2c^4 + c^2P_e^2}}{c}$$

$$\hat{x})\quad \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cdot\cos\phi + P_x^e$$

$$\hat{y})\quad 0 = \frac{h\nu'}{c}\cdot\text{sen}\,\phi + P_y^e$$

$$P_e^2 = P_y^{e2} + P_x^{e2} = \frac{h^2\nu'^2}{c^2}\,\text{sen}^2\phi + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \frac{h^2\nu'^2}{c^2}\cdot\cos^2\phi - 2\,\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu'}{c}\cdot\cos\phi$$

$$h\nu + m_eC^2 = h\nu' + \sqrt{m_e^2c^4 + P_e^2c^2} \qquad P_e^2 = \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{c}\right)^2\nu\nu'\cdot\cos\phi$$

$$h\nu' = h\nu + m_eC^2 - \sqrt{m_e^2c^4 + h^2\nu'^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\phi}$$

$$(-h\nu' + h\nu + m_eC^2)^2 = m_e^2c^4 + h^2\nu'^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\phi$$

$$\cancel{h^2\nu'^2} + \cancel{h^2\nu^2} - 2hh\nu\nu' + \cancel{m_e^2c^4} + 2(-h\nu' + h\nu)m_eC^2 = \cancel{m_e^2c^4} + \cancel{h^2\nu'^2} + \cancel{h^2\nu^2} - 2h^2\nu\nu'\cos\phi$$

$$-\nu'(2h^2\nu + 2h\,m_eC^2 - 2h^2\nu.\cos\phi) = -2h\nu\,m_eC^2$$

$$\nu' = \frac{\cancel{2h\nu}\,m_eC^2}{\cancel{2h\nu}\left(h + \frac{m_eC^2}{\nu} - h.\cos\phi\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{h\,\nu' = E_f' = \frac{m_eC^2}{\left(1 - \cos\phi + \frac{m_eC^2}{h.\nu}\right)}}$$

Para luz visible

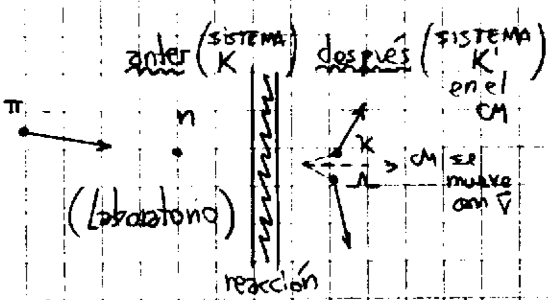
$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \nu' = \frac{m_eC^2}{h\left(1 - \cos\phi + \frac{m_eC^{\cancel{2}}}{h.\cancel{c}}\lambda\right)}$$

$$\nu = \frac{c}{5000\,\text{Å}} = 6\,10^{14}\,\frac{1}{s} \qquad \nu' = \frac{m_eC^2/h}{\left(1 - \cos\phi + \lambda.\frac{m_eC}{h}\right)}$$

como $\frac{m_eC}{h} \sim 4{,}10^{11}$ $\quad \nu' \approx \frac{c}{\lambda}$

Para ver cambio de ν necesito λ muy pequeña para hacer apreciable el término $1-\cos\phi$

10.



$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ es invariante

m es siempre masa en reposo

(a)

Sistema aislado $\Rightarrow$ se conserva el cuadrimpulso (momento y energía)

$m_\pi c^2 = 140$ MeV
$m_n c^2 = 940$ MeV
$m_K c^2 = 494$ MeV
$m_\Lambda c^2 = 1116$ MeV

$$\underbrace{\frac{\vec{P}_\pi}{M_{TOT}}}{} = \frac{\vec{P}_K + \vec{P}_\Lambda}{M_{TOT}} = \vec{V}_{CM}$$

La energía umbral de la reacción será aquella para la cual apenas se muevan K, Λ, es decir en el límite en que $\vec{P}_K = 0$, $\vec{P}_\Lambda = 0$ medidos en K' $\rightarrow$ que se mueve con $\vec{V} = \vec{V}_{CM}$.

la $\sum m a = 0$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right) \rightarrow \qquad \left.\frac{E^2}{c^2} - P^2\right|_K = \left.\frac{E^2}{c^2} - P^2\right|_{K'}$$

$$\left. M^2 c^2 \right| = \left. M^2 c^2 \right|_{K'}$$

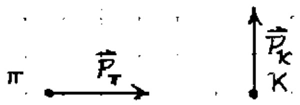
$$\frac{\left(m_n c^2 + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + P_\pi^2 c^2}\right)^2}{c^2} - P_\pi^2 = \left(m_K c + m_\Lambda c\right)^2$$

$$m_n^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 + \cancel{P_\pi^2} + 2 m_n \cancel{c^2} \frac{\sqrt{m_\pi^2 c^4 + P_\pi^2 c^2}}{\cancel{c^2}} - \cancel{P_\pi^2} = m_K^2 c^2 + m_\Lambda^2 c^2 + 2 m_K c\, m_\Lambda c$$

$$E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + P_\pi^2 c^2} \qquad \sqrt{m_\pi^2 c^4 + P_\pi^2 c^2} = \frac{m_K^2 c^2 + m_\Lambda^2 c^2 + 2 c^2 m_K m_\Lambda - m_n^2 c^2 - m_\pi^2 c^2}{2 m_n}$$

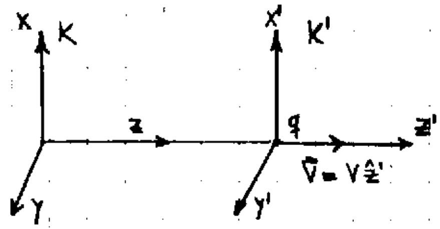
$$\boxed{E_\pi = \frac{c^2 \left(m_K^2 + m_\Lambda^2 + 2 m_K m_\Lambda - m_n^2 - m_\pi^2\right)}{2 \cdot m_n}}$$

(b)



11.

(a) Carga que se mueve con velocidad $\vec{v}$



K' sistema solidario a la carga → allí está en reposo, con lo cual sólo ejerce un campo $\vec{E}'$

$$\vec{E}' = q/r^2\,\hat{r} = q/r^3\,\vec{r} = \frac{q}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}(x'\hat{x}'+y'\hat{y}'+z'\hat{z}')$$

$$\vec{B}'=0$$

* transf. Campos.

$$\left.\begin{aligned} E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) & B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y)\\ E'_y &= \gamma(E_y + \beta B_x) & B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x)\\ E'_z &= E_z & B'_z &= B_z \end{aligned}\right] [1] \qquad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{E'_x}{\gamma} + \beta B_y = E_x \qquad \frac{B'_y}{\gamma} + \beta E_x = B_y$$

$$\frac{E'_x}{\gamma} + \beta \cdot \frac{B'_y}{\gamma} + \beta^2 E_x = E_x$$

$$\frac{1}{\gamma}(E'_x + \beta B'_y) = E_x(1-\beta^2)$$

$$E_x = \gamma(E'_x + \beta B'_y)$$

⇒ En forma análoga la transformación para $\vec{E}, \vec{B}$ sin primar se logra reemplazando los signos en el sistema [1] y lo primado por lo sin primar y viceversa

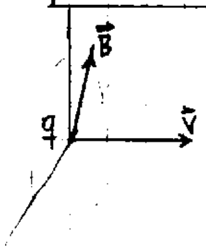
$$E_x = \gamma\left[\frac{q\,x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\right] \qquad E_y = \gamma\left[\frac{q\,y'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\right] \qquad E_z = \frac{q\,z'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \gamma\left[\frac{-\beta\,q\,y'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\right] \qquad B_y = \gamma\left[\frac{\beta\,q\,x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\right] \qquad B_z = 0$$

* Transf. Coordenadas

$$z' = \gamma\left[z - v\,t\right] \qquad x' = x \;,\; y' = y \quad \Rightarrow$$

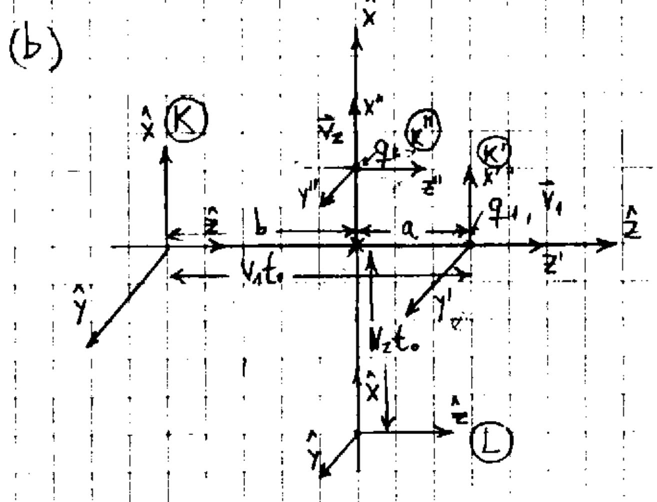
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \gamma q \cdot \frac{1}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{3/2}}\,(x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (z-v\,t)\,\hat{z})\\ \vec{B} &= \gamma \cdot q \cdot \frac{v}{c}\,\frac{1}{[x^2+y^2+\gamma^2(z-vt)^2]^{3/2}}\,(-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}) \end{aligned}}$$



$\vec{v} \perp \vec{B}$

Campos $\vec{E}, \vec{B}$ como se ven desde el laboratorio (sistema K)

(b)



K' sistema fijo a q_1 que viaja en $\hat{z}$

* $q_1, \vec{v}_1$ (en Ⓚ)

$$\vec{E} = \gamma_1 q_1 \, r_1^{-3/2} (x, y, z - v_1 t)$$

$$\vec{B} = \gamma_1 q_1 \frac{v_1}{c} (-y, x, 0) \, r_1^{-3/2}$$

$$r_1^{-3/2} = \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - v_1 t)^2 \gamma_1^2]^{3/2}}$$

Reorientamos los ejes (de K' a K'')

$x' \to y''$
$y' \to z''$
$z' \to x''$

K'' sistema fijo a q_2 que viaja en $\hat{x}$

* $q_2, \vec{v}_2$ (en Ⓛ)

$$\vec{E} = \gamma_2 q_2 \, r_2^{-3/2} (x - v_2 t, y, z)$$

$$\vec{B} = \gamma_2 q_2 \, r_2^{-3/2} \frac{v_2}{c} (0, -z, y)$$

$$r_2^{-3/2} = \frac{1}{[(x - v_2 t)^2 \gamma_2^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

Sea t_0 (medido en L) cuando q_2 cruza trayectoria de q_1 [x en la figura]

$$\vec{F}_{12} = q_2 \left[\vec{E}_1(0,0,b) + \left(\tfrac{1}{c}\right) \vec{v}_2 \times \vec{B}_1(0,0,b) \right]$$

fuerza debida a q_1 sobre q_2

$$\vec{F}_{12} = q_2 \cdot \left[\gamma_1 q_1 \frac{1}{\underbrace{(b - v_1 t_0)^3}_{-a} \gamma_1^3} \overbrace{(b - v_1 t_0)}^{b - a - b} \hat{z} + \frac{1}{c} (v_2 \hat{x}) \times 0 \right] = \boxed{q_2 q_1 \cdot \frac{-\hat{z}}{\gamma_1^2 \, a^2}}$$

evaluado en Ⓚ

Hay que transformar Ⓛ a Ⓚ tomando $x^L = x^K + v_2 t_0$, $z^L = z^K - b$

$$\vec{F}_{21} = q_1 \left[\vec{E}_2(0,0,b+a) + \left(\tfrac{1}{c}\right) \vec{v}_1 \times \vec{B}_2(0,0,b+a) \right]$$

Punto $\to$ $t = t_0$, $z = v_1 t_0$, $x = 0, y = 0$

$$\vec{F}_{21} = q_1 \left[\gamma_2 q_2 \, r_2^{-3/2}\Big|_{Punto} (0,0,a) + \frac{1}{c} v_1 \hat{z} \times \gamma_2 q_2 \frac{v_2}{c} r_2^{-3/2}\Big|_P (0, -a, 0) \right]$$

$$= q_1 \gamma_2 q_2 \frac{a}{a^3} \hat{z} + \frac{1}{c^2} v_1 v_2 \gamma_2 q_2 q_1 \frac{a}{a^3} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = q_2 q_1 \gamma_2 \cdot \frac{1}{a^2} \left(\hat{z} + \frac{v_1 v_2}{c^2} \hat{x} \right)}$$

evaluado en Ⓚ

* vínculos $\boxed{a \; t_0}$

en Ⓚ es

$\vec{r}_{q_1} = (0, 0, v_1 t_0)$

$\vec{r}_{q_2} = (0, 0, b)$

en Ⓛ es

$\vec{r}_{q_1} = (v_2 t_0, 0, a)$

$\vec{r}_{q_2} = (v_2 t_0, 0, 0)$

$a + b = v_1 t_0$

Las fuerzas no son iguales y opuestas.

La cantidad de movimiento se conserva, pero lo que sucede es que hay transferencia al campo

$$\frac{d\vec{P}_{Mec}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi c} \int_V \vec{E} \times \vec{B} \, dV \right) = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S}$$

donde $\frac{d\vec{P}_{Mec}}{dt} = \vec{F}_{Lorentz}$

Sin embargo, el cálculo no es una boludez porque hay que integrar en un volumen apropiado y calcular $\vec{E}, \vec{B}$ en todo el espacio.

AUXILIAR

Pasamos los campos de Ⓛ a Ⓚ

$$\vec{E} = \gamma_2 q_2 \frac{1}{\left([x + v_2(t_0 - t)]\gamma^2 + y^2 + (z - b)^2\right)^{3/2}} \cdot (x + v_2 t_0 - v_2 t, y, z - b)$$

$$\vec{B} = \gamma_2 q_2 \frac{v_2}{c} \cdot \frac{1}{\left([x + v_2(t_0 - t)]\gamma^2 + y^2 + (z - b)^2\right)^{3/2}} \cdot (v_2 t_0, -z + b, y)$$

12.

(a) Sean $\vec{E}, \vec{B} \perp$ en un evento $\Rightarrow$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{en} \quad \vec{X} = (x_0, y_0, z_0, ct_0) \quad \text{en } K$$

AL pasar a cualquer sistema K' serán perpendiculares allí también

*transf. coordenadas

$$\vec{X}'_{\parallel} = \gamma\left(\vec{X}_{\parallel} - \vec{V}t\right)$$

$$\vec{X}'_{\perp} = \vec{X}_{\perp}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{X}}{c^2}\right)$$

*transf. campos

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2\left(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{B}-\vec{\beta}\times\vec{E}\right) - \frac{\gamma^3}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\cdot\left(\vec{B}-\vec{\beta}\times\vec{E}\right)$$

$$-\frac{\gamma^3}{\gamma+1}\left(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right) + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right)^2\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\cdot\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2\cdot\Big[\underbrace{\vec{E}\cdot\vec{B}}_{=0} - \underbrace{\vec{E}\cdot(\overset{\perp\vec{E}}{\vec{\beta}\times\vec{E}})}_{=0} + \underbrace{(\overset{\perp\vec{B}}{\vec{\beta}\times\vec{B}})\cdot\vec{B}}_{=0} - (\vec{\beta}\times\vec{B})(\vec{\beta}\times\vec{E})\Big]$$

$$-\frac{\gamma^3}{\gamma+1}\Big[\underset{(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})}{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot\vec{B}} - \underbrace{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot(\overset{\perp\vec{\beta}}{\vec{\beta}\times\vec{E}})}_{=0}\Big]$$

$$-\frac{\gamma^3}{\gamma+1}\Big[\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\cdot\vec{E} + \underbrace{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\cdot(\overset{\perp\vec{\beta}}{\vec{\beta}\times\vec{B}})}_{=0}\Big]$$

$$+\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right)^2\Big[\beta^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\Big]$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = -\gamma^2\left(\vec{\beta}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right) + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2}\beta^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}\right)\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}\right)$$

$$= -\gamma^2\Big[(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})\overbrace{(\vec{B}\cdot\vec{E})}^{=0} - (\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{B}\cdot\vec{\beta})\Big] - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

NOTA

$$1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$1-\frac{1}{\gamma^2} = \beta^2$$

$$\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} = \beta^2$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \Big[+\gamma^2 - \frac{2\gamma^3}{(\gamma+1)} + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}\Big](\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

$$\frac{\gamma^{\cancel{4}\,2}\,(\overset{(\gamma-1)\cancel{(\gamma+1)}}{\gamma^2-1})}{(\gamma+1)^{\cancel{2}}\ \cancel{\gamma^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Big[+\gamma^2 - \frac{2\gamma^3}{(\gamma+1)} + \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)}\Big]$$

$$\Big[\frac{+\gamma^3+\gamma^2}{(\gamma+1)} \; \frac{-2\gamma^3}{(\gamma+1)} + \frac{\gamma^3-\gamma^2}{(\gamma+1)}\Big] = \frac{+\gamma^3+\gamma^2-\gamma^3-\gamma^2}{(\gamma+1)} = 0$$

$$\boxed{\vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0}$$

$\vec{E}, \vec{B}$ serán perpendiculares en cualquier sistema de referencia considerado

(b) Sea ahora $E>B$, luego añadimos un término extra al desarrollo anterior, pues ahora $E.B \neq 0$, con lo cual:

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2 \vec{E}\cdot\vec{B} - \gamma^2(\vec{\beta}\times\vec{B})\cdot(\vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})(\vec{\beta}\cdot\vec{E}) + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2\vec{E}\cdot\vec{B} - \gamma^2\beta^2\vec{B}\cdot\vec{E} + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) + \frac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

Recordad

$1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$

$1-\frac{1}{\gamma^2} = \beta^2$

$\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} = \beta^2$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \gamma^2\vec{E}\cdot\vec{B} - (\gamma^2-1)\vec{E}\cdot\vec{B} + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) + \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B} + \left(\frac{(\gamma+1)\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^3 - \gamma^2}{\gamma+1}\right)(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \vec{E}\cdot\vec{B} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{B} > 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}'\cdot\vec{B}' > 0}$$

La moraleja aquí es que un producto escalar es, como su nombre lo dice, un escalar $\Rightarrow$ es invariante ante una transformación de Lorentz.

13.

$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ pues $\vec{E}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0$ en cualquier sistema de referencia K'

$E^2 - B^2 \neq 0 \Rightarrow E'^2 - B'^2 \neq 0$ en cualquier sistema de referencia K'

Estas conclusiones se siguen del carácter escalar de $\vec{E}\cdot\vec{B}$ y E^2-B^2

$$E'^2 = \vec{E}'\cdot\vec{E}' = \left[\gamma(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\right]\left[\gamma(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\right]$$

$$= \left[\gamma^2\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{B})2 + (\vec{\beta}\times\vec{B})\cdot(\vec{\beta}\times\vec{B})\right) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}\left\{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot\vec{E} + \underbrace{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot\underbrace{\vec{\beta}\times\vec{B}}_{\perp\vec{\beta}}}_{=0}\right\} + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right)^2\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\cdot\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\right]$$

$$E'^2 = \left[\gamma^2\left(E^2 + \vec{\beta}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})2 + \beta^2B^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{B})(\vec{B}\cdot\vec{\beta})\right) - \frac{2\gamma^3}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{E}) + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2}\beta^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\right]$$

$$E'^2 = \gamma^2E^2 + \gamma^2 2\vec{\beta}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) + \gamma^2\beta^2B^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2\gamma^2 - \frac{2\gamma^3}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2 + \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2$$

$$B'^2 = \vec{B}'\cdot\vec{B}' = \left[\gamma(\vec{B}-\vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\right]\left[\gamma(\vec{B}-\vec{\beta}\times\vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\right]$$

$$B'^2 = \left[\gamma^2\left(B^2 - 2\vec{B}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{E}) + (\vec{\beta}\times\vec{E})\cdot(\vec{\beta}\times\vec{E})\right) - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}\left\{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B} - \underbrace{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\cdot\underbrace{(\vec{\beta}\times\vec{E})}_{\perp\vec{\beta}}}_{=0}\right\} + \frac{\gamma^4}{(\gamma+1)^2}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\cdot\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\right]$$

$$B'^2 = \gamma^2B^2 - 2\gamma^2\vec{\beta}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \gamma^2\beta^2E^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2\gamma^2 - \frac{2\gamma^3}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2 + \frac{\gamma^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2$$

$-2\gamma^3 \cdot \gamma \cdot \gamma' \nearrow \quad \dfrac{-\gamma^2\cancel{(\gamma+1)}}{\cancel{(\gamma+1)}}$

$$E'^2 = \gamma^2 E^2 - 2\gamma^2 \vec{\beta}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \gamma^2\beta^2 B^2 - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2 + \frac{-\gamma^3-\gamma^2}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2$$

$$B'^2 = \gamma^2 B^2 - 2\gamma^2 \vec{\beta}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \gamma^2\beta^2 E^2 - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2 + \frac{-\gamma^3-\gamma^2}{(\gamma+1)}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2$$

$$E'^2 - B'^2 = \gamma^2(E^2-B^2) \underbrace{+\gamma^2\beta^2(B^2-E^2)}_{+(\gamma^2-1)(B^2-E^2)} - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2 + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2 - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{E})^2 + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{B})^2$$

$$E'^2 - B'^2 = \cancel{\gamma^2(E^2-B^2)} + (E^2-B^2) - \cancel{(E^2-B^2)\gamma^2} \Rightarrow \quad E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2$$

Pero como $E^2 - B^2 = \eta = E'^2 - B'^2$ (por ser escalar es invariante) $\Rightarrow$

No hemos ganado mucho. Probemos otro enfoque:

$$\vec{E},\vec{B}\perp \Rightarrow \vec{E}',\vec{B}'\perp \Rightarrow \vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0 \ , \ \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$$

con $E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2 \neq 0 \Rightarrow$

① $E^2 - B^2 = \xi > 0 \Rightarrow B' = 0$ ② $E^2 - B^2 = \xi < 0 \Rightarrow E' = 0$

$$\left[\vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta}\times\vec{B})\right]\times\left[\vec{B}_\parallel + \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta}\times\vec{E})\right] = \vec{E}'\times\vec{B}'$$

$$\underbrace{\vec{E}_\parallel\times\vec{B}_\parallel}_{=0} + \gamma(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\parallel) + \gamma^2(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp) - \gamma^2(\vec{E}_\perp\times\vec{\beta}\times\vec{E}) + \gamma(\vec{\beta}\times\vec{B})\times\vec{B}_\parallel$$

$$+\gamma^2(\vec{\beta}\times\vec{B})\times\vec{B}_\perp - \gamma^2(\vec{\beta}\times\vec{B})\times(\vec{\beta}\times\vec{E}) + \vec{E}_\parallel\times\gamma\vec{B}_\perp - \vec{E}_\parallel\gamma\times\vec{\beta}\times\vec{E})$$

$$\vec{E}'\times\vec{B}' = \Big[-\vec{\beta}(\vec{E}_\perp\cdot\vec{E}) + \underbrace{\vec{E}(\vec{E}_\perp\cdot\vec{\beta})}_{=0}\Big]\gamma^2 + \gamma^2\Big[\underbrace{\vec{B}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}_\perp)}_{=0} - \vec{\beta}(\vec{B}\cdot\vec{B}_\perp)\Big]$$

$$\gamma\left[\vec{B}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}_\parallel) - \vec{\beta}(\vec{B}\cdot\vec{B}_\parallel)\right] - \gamma\left[\vec{\beta}(\vec{E}_\parallel\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}_\parallel\cdot\vec{\beta})\right]$$

$$\gamma(\vec{E}_\parallel\times\vec{B}_\perp) + \gamma(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\parallel) + \gamma^2(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp)$$

$$-\gamma^2\left\{\vec{B}\left[\vec{\beta}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})\right] - \underbrace{\vec{E}\left[\vec{\beta}\cdot(\vec{B}\times\vec{\beta})\right]}_{=0}\right\}$$

$$\vec{E}'\times\vec{B}' = -\vec{\beta}E_\perp^2\gamma^2 - \gamma^2\vec{\beta}B_\perp^2 - \gamma\vec{\beta}B_\parallel^2 + \gamma\vec{B}\beta B_\parallel - \gamma\vec{\beta}E_\parallel^2 + \gamma\vec{E}\beta E_\parallel$$

$$\gamma(\vec{E}_\parallel\times\vec{B}_\perp) + \gamma(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\parallel) + \gamma^2(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp) - \gamma^2\vec{\beta}\,($$

$$= \quad -(\gamma B_\perp^2 + B_\parallel^2)\gamma\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}(\gamma E_\perp^2 + E_\parallel^2) + \gamma\beta(\vec{B}B_\parallel + \vec{E}E_\parallel)$$

$$\vec{E}'\times\vec{B}' = (\vec{E}_\parallel + \gamma\vec{E}_\perp)\times(-\gamma\vec{\beta}\times\vec{E}) = \gamma(\vec{E}_\parallel + \gamma\vec{E}_\perp)\times(\vec{E}\times\vec{\beta})$$

$$= \gamma\left\{\vec{E}\left[(\vec{E}_\parallel + \gamma\vec{E}_\perp)\cdot\vec{\beta}\right] - \vec{\beta}\left[(\vec{E}_\parallel + \gamma\vec{E}_\perp)\cdot\vec{E}\right]\right\} = \gamma\left\{\vec{E}(E_\parallel\beta) - \vec{\beta}(E_\parallel^2 + \gamma E_\perp^2)\right\} = 0$$

$$(\vec{E}_\parallel + \gamma \vec{E}_\perp) \times (\gamma \vec{E} \times \vec{\beta}) = 0$$

$$(\vec{E}'_\parallel + \gamma \vec{E}'_\perp) \times (\gamma \vec{\beta} \times \vec{E}') = 0$$

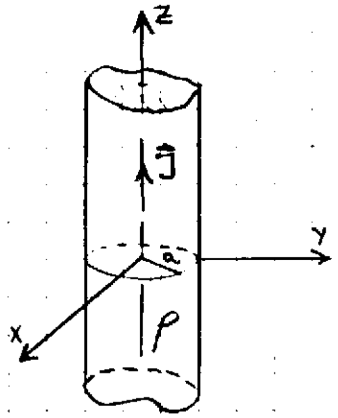
$$\gamma \vec{\beta} \left[(\vec{E}'_\parallel + \gamma \vec{E}'_\perp) \cdot \vec{E}' \right] - \vec{E}' \left[(\vec{E}'_\parallel + \gamma \vec{E}'_\perp) \cdot \gamma \vec{\beta} \right] = 0$$

$$\cancel{\gamma} \vec{\beta} \, (E'^2_\parallel + \gamma E'^2_\perp) - \vec{E}' \cancel{\gamma} E'_\parallel \beta = 0$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{E}' E'_\parallel \beta}{(E'^2_\parallel + \gamma E'^2_\perp)} \qquad \hat{\beta} = \frac{\vec{E}' E'_\parallel}{(E'^2_\parallel + \gamma E'^2_\perp)}$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{E}' = \frac{E'^2 E'_\parallel \beta}{(E'^2_\parallel + \gamma E'^2_\perp)} \qquad \Rightarrow \quad \vec{\beta} \parallel \vec{E}'$$

11.



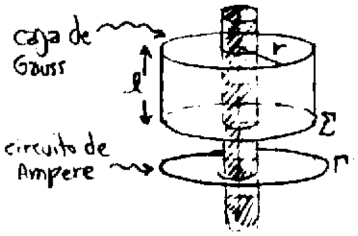
cilindro infinito ρ uniforme, $\vec{J}$ uniforme

$K \equiv$ sistema fijo XYZ

En K veré un campo $\vec{E}$ y un campo $\vec{B}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= E(r)\,\hat{r} \\ \vec{B} &= B(r)\,\hat{\varphi}\end{aligned}\right\} (\hat{r} \text{ de cilíndricas})$$

simetría traslación $\hat{z}$
reflexión ZX, ZY
simetría rotación $\hat{\varphi}$



$$\int \vec{J}\cdot d\vec{S} = I$$
$$J\cdot\pi a^2 = I$$

* $\underline{r>a}$

$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\,\rho\,\pi a^2 \ell \qquad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\, I$$

$$E.r.2\pi\ell = \overset{2}{\cancel{4}}\pi\rho\,\pi a^2 \ell \qquad B.2\cancel{\pi} r = \frac{\overset{2}{\cancel{4\pi}}}{c} I$$

$$E = \frac{2\pi a^2 \rho}{r} \qquad B = \frac{2I}{cr} = \frac{2J\pi a^2}{c.r}$$

* $\underline{r<a}$

$$E.\cancel{r}\,2\pi\cancel{\ell} = \overset{2}{\cancel{4\pi}}\rho\,\pi r^{\cancel{2}}\cancel{\ell} \qquad B.2\pi\cancel{r} = \frac{\overset{2}{\cancel{4\pi}}}{c}J.\pi r^{\cancel{2}}$$

$$E = 2\rho\pi r \qquad B = \frac{2J\pi}{c}.r$$

(a) (b) Ahora habría que hallar un sistema de referencia en el que sólo hay campo eléctrico o magnético.

Para anular el $\vec{B}$ conviene pararse en un sistema en el que haya flujo de carga neta, pero eso no significa pararse en el sistema de las cargas que son transportadas por la corriente I puesto que en tal sistema veremos moverse con velocidad opuesta a las cargas de ρ anteriormente fijas.
La idea es buscar un sistema donde hay tantas cargas moviéndose en una dirección como en la contraria (carga neta en movimiento nula).
Este sistema tendrá $\vec{\beta}$ en $\hat{z} \parallel \hat{z}'$

$$\text{invariantes}\left\{\begin{aligned} &\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0 \qquad , \quad E^2 - B^2 > 0 \to E'^2 > 0 \\ &E^2 - B^2 = E'^2 \quad \to \quad \underline{r>a} \quad \frac{4\pi^2 a^4 \rho^2}{r^2} - \frac{4I^2}{c^2 r^2} = \frac{4\pi^2 a^4}{r^2}\left(\rho^2 - \frac{J^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right.$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2} \qquad \underline{r<a} \quad 4\pi^2 r^2 \rho^2 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2} J^2 = 4\pi r^2\left(\rho^2 - \frac{J^2}{c^2}\right)$$

$\hat{r}\,\hat{\varphi}\,\hat{z}$

Buscamos $\vec{B}' = 0 \to$ se debe verificar que:

$$0 = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}\right) - \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{V}}{c}\left(\frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{B}\right)}_{=0}$$

$$\frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{B} \to V\hat{z}\cdot B\hat{\varphi} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E} \to \quad \hat{\varphi}) \quad B = \frac{V}{c}.E$$

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right) - \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{V}}{c}\underbrace{\left(\frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{E}\right)}_{\hat{z}\cdot\hat{r}=0}}_{=0} \rightarrow \vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right)$$

$\hat{r}$) $$E' = \gamma\left(E - \frac{V}{c}B\right)$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\left(\frac{2\pi a^2\rho}{r} - \frac{V}{c}\cdot\frac{2J\pi a^2}{c\,r}\right) \qquad r>a$$

$B = \frac{V}{c}E$

$\cancel{\frac{2J\pi a^2}{cr}} = \frac{V}{\cancel{c}}\cdot\cancel{\frac{2\pi a^2}{r}}\rho$

$J = V\cdot\rho$

$\boxed{V = \frac{J}{\rho}}$ velocidad entre sistemas

$$E' = \frac{1}{\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}}\frac{2\pi a^2}{r}\left(\rho - \frac{J^2}{\rho c^2}\right)$$

$$\boxed{E' = \frac{2\pi a^2}{r}\rho\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}} \qquad r>a$$

$r<a$

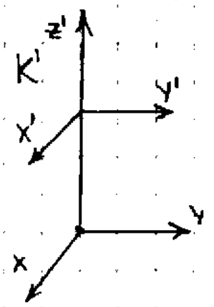
$$E' = \frac{1}{\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}}\left(2\pi r\rho - \frac{V}{c}\frac{2\pi r}{c}J\right)$$

$$E' = \frac{1}{\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}}2\pi r\rho\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)$$

$$\boxed{E' = 2\pi r\rho\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}} \qquad r<a$$

Calculando el módulo al cuadrado de estas expresiones es:

$$E'^2 = \frac{4\pi^2a^4}{r^2}\left(\rho^2 - \frac{J^2}{c^2}\right)$$



el sistema de referencia en el que solo hay campo $\vec{E}$ es el que se mueve con velocidad $V = \frac{J}{\rho}$ en $\hat{z}$

allí es:

$\boxed{\vec{B}' = 0}$

$\boxed{\vec{E}' = \frac{2\pi a^2\rho}{r}\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}\hat{r}'}$ $r>a$

$\boxed{\vec{E}' = 2\pi r\rho\left(1-\frac{J^2}{\rho^2c^2}\right)^{1/2}\hat{r}'}$ $r<a$

Ahora buscaremos un sistema en el cual $\vec{E}' = 0$.

Para anular $\vec{E}'$ deberemos tener solo $\vec{J}$, es decir no habría carga fija ρ

$$0 = \gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right) - \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{V}}{c}\underbrace{\left(\frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{E}\right)}_{\hat{z}\cdot\hat{r}=0}}_{=0}$$

$\vec{V}$ es en $\hat{z}\parallel\hat{z}'$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}$$

$\hat{r}$) $\cancel{\frac{2\pi a^2}{r}}\rho = +\frac{V}{c}\cdot\cancel{\frac{2\pi a^2}{c\,r}}J$

$\boxed{V = +\frac{\rho c^2}{J}}$ velocidad entre sistemas

$\hat{r} = -(\hat{z}\times\hat{\varphi}) \Rightarrow$ si $\hat{z}>0$

$\hat{r} = -(\hat{z}\times\hat{\varphi}) = +\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{V} = V\hat{z}$

$$\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}\right) - \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\frac{\vec{V}}{c}\left(\frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{B}\right)}_{=0} \qquad \hat{z}\cdot\hat{\varphi}=0 \qquad -\left(-\hat{z}\times\hat{r}\right) = -(-\hat{\varphi})$$

$r>a$
$$B' = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho^2 c^4}{J^2 c^2}\right)^{1/2}}\cdot\left(\frac{2\pi a^2}{r}\frac{J}{c} - \frac{1}{c}\frac{\rho c^2}{J}\cdot\frac{2\pi a^2}{r}\rho\right)$$

$$B' = \frac{2\pi a^2}{r}\frac{J}{c}\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right)^{1/2}$$

$r<a$
$$B' = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right)^{1/2}}\left(\frac{2\pi r}{c}J - \frac{\rho c^2}{cJ}2\pi r\rho\right)$$

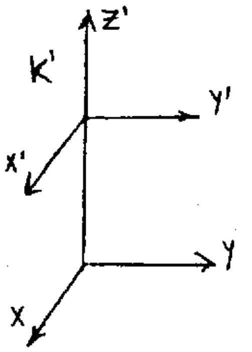
$$B' = \frac{2\pi r}{c}J\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right)^{1/2}$$

Luego $B'^2 = E^2 - B^2 = \frac{4\pi^2a^4}{r^2}\frac{J^2}{c^2}\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right) = \frac{4\pi^2a^4}{r^2}\left(\frac{J^2}{c^2}-\rho^2\right)$ ← esto es igual a E'^2 (anterior) pero con un signo cambiado

$E^2 - B^2 > 0 \Rightarrow E'^2 - B'^2 > 0$; pero $E'=0 \Rightarrow -B'^2>0$ no puede ser

$\Rightarrow$ necesito $E^2-B^2<0 \Rightarrow -B'^2<0 \Rightarrow B'^2>0$ como corresponde

El sistema en el que sólo hay campo $\vec{B}'$ es uno que se mueve con velocidad



$\vec{V} = \frac{\rho c^2}{J}\hat{z}$ dándose que allí es

$$\boxed{\vec{E}' = 0}$$

$$\boxed{\vec{B}' = \frac{2\pi a^2 J}{r.c}\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right)^{1/2}\hat{\varphi}} \qquad r>a$$

$$\boxed{\vec{B}' = \frac{2\pi r J}{c}\left(1-\frac{\rho^2c^2}{J^2}\right)^{1/2}\hat{\varphi}} \qquad r<a$$

Estos sistemas son únicos porque en cada caso debe cumplirse que:

$E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2 = \eta > 0$ es decir $\eta = \frac{4\pi^2a^4}{r^2}\left(\rho^2 - \frac{J^2}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \eta > 0$ si $\rho > \frac{J}{c}$

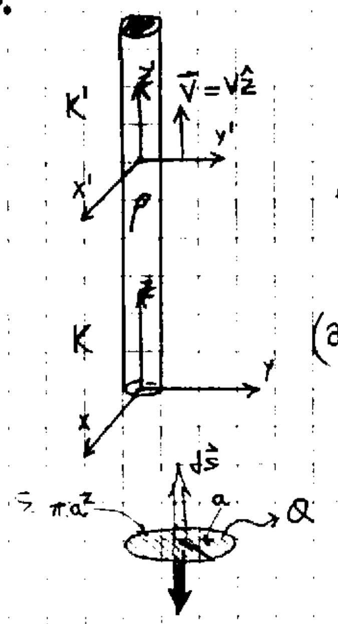
$\eta < 0$ si $\rho < \frac{J}{c}$

Luego; si $\eta>0 \Rightarrow \rho > \frac{J}{c} \Rightarrow E'^2 - B'^2 > 0 \Rightarrow B'=0$ puede ser pues $E'^2>0$ vale

$\Rightarrow E'=0$ no puede ser pues $-B'^2>0$ no puede valer

Entonces el signo de $(\rho^2 - J^2/c^2)$ determina que la solución sea única: o me voy a K' $\begin{cases}\text{con } E'=0 & (\rho^2-J^2/c^2)<0\\ \text{con } B'=0 & (\rho^2-J^2/c^2)>0\end{cases}$

15.



Barra infinita de sección circular, radio "a", longitud ∞

En el sistema K (fijo en la barra) veremos:

$$\text{en } K \begin{cases} \vec{E} = \dfrac{2\pi a^2}{r}\rho\,\hat{r} & r>a \\ \vec{E} = 2\pi r\rho\,\hat{r} & r<a \end{cases} \qquad \vec{B}=0 \qquad \begin{matrix} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=0 \end{matrix}$$

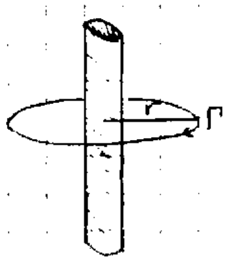
(a) En el sistema K' (moviéndose paralelo a la barra con $\vec{V}$) se verá a las cargas con $-\vec{V}$. En el sistema K tengo ρ y $\vec{J}=0$ pero en K' tendré ρ' y $\vec{J}'$ de acuerdo a la transformación de la cuadridensidad de corriente [ver pág. sig.]

$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\cdot\gamma\cdot\rho$$

* $\underline{r>a}$ $E\cdot 2\pi r \cancel{l} = 4\pi\gamma\rho\,\pi a^2 \cancel{l}$ * $\underline{r<a}$ $E\cdot 2\pi r\cancel{l} = 4\pi\gamma\rho\pi r^2\cancel{l}$

$$E = \frac{2\pi a^2}{r}\gamma\rho \qquad\qquad E = 2\rho\pi r\gamma$$

$$\boxed{\vec{E}' = \begin{cases} 2\pi\rho\gamma\cdot\dfrac{a^2}{r} & r>a \\ 2\pi\rho\cdot\gamma\cdot r & r<a \end{cases}}$$



Para el campo $\vec{B}$ será:

* $\underline{r>a}$ * $\underline{r<a}$

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_c$$

$$B\,2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot\rho\cdot V\cdot\pi a^2\gamma \qquad B\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot I_c = \frac{4\pi}{c}\rho\cdot V\cdot\pi r^2\gamma$$

$$I_c = \int \vec{J}\cdot d\vec{S}$$
$$I_c = -\gamma\cdot V\cdot\rho\cdot\pi a^2$$

$$B = -\frac{2\pi a^2}{c\,r}\rho\cdot V\cdot\gamma \qquad B = -\frac{2\pi\rho\cdot V}{c}\cdot r\gamma$$

$$\boxed{\vec{B}' = \begin{cases} -\dfrac{2\pi\rho V\gamma r}{c}\,\hat{\varphi} & r<a \\ -\dfrac{2\pi\rho V\gamma}{c}\dfrac{a^2}{r}\,\hat{\varphi} & r>a \end{cases}}$$

(2)

$$\vec{B}' = \gamma(\underbrace{\vec{B}}_{=0} - \vec{\beta}\times\vec{E}) - \overbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\underbrace{(\vec{\beta}\cdot\vec{E})}_{=0}}^{=0} \qquad \vec{E}' = \gamma(\vec{E} - \underbrace{\vec{\beta}\times\vec{B}}_{=0}) - \underbrace{\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})}_{=0}$$

* r<a

$$\vec{B}' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\cdot -\frac{V}{c}\,2\pi r\rho\,\hat{\varphi} \qquad \vec{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}(2\pi\rho r)\hat{r}$$

* r>a

$$\vec{B}' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\cdot -\frac{V}{c}\cdot 2\pi\rho\frac{a^2}{r}\,\hat{\varphi} \qquad \vec{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(2\pi\rho\,\frac{a^2}{r}\right)\hat{r}$$

$$\boxed{\vec{B}' = \begin{cases} -\gamma\,2\pi\rho\dfrac{V}{c}\cdot r\cdot\hat{\varphi} & r<a \\ -\gamma\,2\pi\rho\,\dfrac{V}{c}\cdot\dfrac{a^2}{r}\hat{\varphi} & r>a \end{cases}} \qquad \boxed{\vec{E}' = \begin{cases} \gamma\cdot 2\pi\rho\cdot r\;\hat{r} & r<a \\ \gamma\cdot 2\pi\rho\cdot\dfrac{a^2}{r}\;\hat{r} & r>a \end{cases}}$$

$$J^\alpha = (J^0, \vec{J}) = (c\rho, \vec{J}) = (\overset{x_0}{c\rho}, \overset{x_1}{J_x}, \overset{x_2}{J_y}, \overset{x_3}{J_z}) \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{V}}{c} \quad \text{con } \vec{V} = V\hat{z}$$

$$J^\alpha = (c\rho, 0, 0, 0)$$

$$J'^\alpha = (c\rho', 0, 0, J'_z)$$

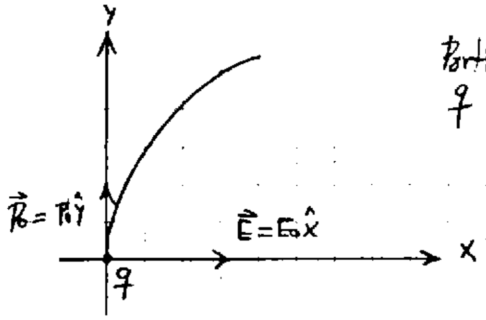
$$c\rho' = \gamma\,(c\rho - \beta . J_z)$$

$$\rho' = \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{c}} \cdot \rho = \gamma \cdot \rho$$

$$J'_z = \gamma\,(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{J_z}} - \frac{V}{c} . c . \rho) = -\gamma . V . \rho$$

Transformación del cuadrivector densidad de corriente

17.



Partícula de carga q relativista

$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ → de la partícula

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p})$$

$\hat{x}$) $$q E_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m \dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$\hat{y}$) $$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m \dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$U = mc^2\gamma = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{c^2}}}$$

La energía no se conserva ⇒

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\, dv = \vec{E}\cdot\vec{v}\, dq$$

$$\frac{dU}{dt} = q\, \vec{v}\cdot\vec{E} \neq 0$$

luego $U = U(t) = \gamma m c^2$

$$\frac{dp_x}{dt} = q E_0$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \rightarrow p_y = k \qquad \boxed{p_y = p_0}$$

$$p_x - \underbrace{p_x^0}_{=0} = q E_0 t$$

$$\boxed{p_x = q E_0 t}$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = q^2 E_0^2 t^2 + p_0^2$$

$$\gamma m \dot{y} = p_0 \qquad \gamma m \dot{x} = q E_0 t$$

$$\gamma^2 m^2 \dot{y}^2 = p_0^2 \qquad \gamma^2 m^2 \dot{x}^2 = q^2 E_0^2 t^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{p_0^2}{\gamma^2 m^2} + \frac{q^2 E_0^2 t^2}{\gamma^2 m^2} = \frac{(1-\beta^2)(p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2)}{m^2}$$

$$v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}{m^2}\right)$$

$$v^2\left(1 + \frac{p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}{m^2 c^2}\right) = \frac{p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}{m^2}$$

$$v^2 = \frac{(p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2)\, c^2}{(c^2 m^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2)}$$

$$\vec{p} = q E_0 t\, \hat{x} + p_0\, \hat{y}$$

$$\gamma m (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) = q E_0 t\, \hat{x} + p_0 \hat{y}$$

$$v_x = \frac{q E_0 t}{\gamma m}$$

$$v_y = \frac{p_0}{\gamma m}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}{m^2 c^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{m^2 c^2}{m^2 c^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}$$

$$v_x^2 = \frac{q^2 E_0^2 t^2}{m^2 \gamma^2} \qquad v_y^2 = \frac{p_0^2}{\gamma^2 m^2}$$

$$v_x^2 = q^2 E_0^2 t^2 \left(\frac{c^2}{m^2 c^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2}\right) \rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{c\, q\, E_0\, t}{(m^2c^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2)^{1/2}}\, \hat{x} \\[2ex] v_y = \dfrac{c\, p_0}{(m^2c^2 + p_0^2 + q^2 E_0^2 t^2)^{1/2}}\, \hat{y} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = c\,q\,E_0\,\frac{t}{\sqrt{m^2c^2+p_0^2+q^2E_0^2t^2}} \quad \rightarrow \quad m^2c^2+p_0^2+q^2E_0^2t^2 = U$$

$$2q^2E_0^2t = \frac{dU}{dt}$$

$$\int dx = c\,q\,E_0 \int_{m^2c^2+p_0^2}^{m^2c^2+p_0^2+q^2E_0^2t^2} \frac{dU}{2q^2E_0^2\,U^{1/2}}$$

$$X-\underbrace{X_0}_{=0} = \frac{\cancel{qE_0}\,c}{1/\cancel{2}\;\cancel{2}q^{\cancel{2}}\cancel{E_0^2}}\left[\sqrt{m^2c^2+p_0^2+q^2E_0^2t^2}-\sqrt{m^2c^2+p_0^2}\right]$$

$$X = \sqrt{t^2c^2+\frac{c^2(m^2c^2+p_0^2)}{q^2E_0^2}} - \sqrt{\frac{(m^2c^2+p_0^2)c^2}{q^2E_0^2}}$$

$$\boxed{X = \sqrt{t^2c^2+\frac{U_0^2}{q^2E_0^2}} - \frac{U_0}{qE_0}}$$

$$\frac{U_0^2}{c^2} = m^2c^2+p_0^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c\,p_0}{\sqrt{m^2c^2+p_0^2+q^2E_0^2t^2}} = \frac{c\,p_0}{qE_0\sqrt{\underbrace{\frac{m^2c^2+p_0^2}{q^2E_0^2}}_{\equiv a^2}+t^2}}$$

$$\int_{y_0=0}^{y} dy = \frac{c\,p_0}{q\,E_0}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}}$$

$$Y = \frac{c\,p_0}{q\,E_0}\cdot \operatorname{asenh}\left(\frac{t}{a}\right)\Big|_0^t$$

$$Y = \frac{c\,p_0}{q\,E_0}\operatorname{asenh}\left(\frac{t\,q\,E_0}{\sqrt{m^2c^2+p_0^2}}\right) = \frac{c\,p_0}{q\,E_0}\cdot\operatorname{asenh}\left(\frac{c\,qE_0\,t}{U_0}\right)$$

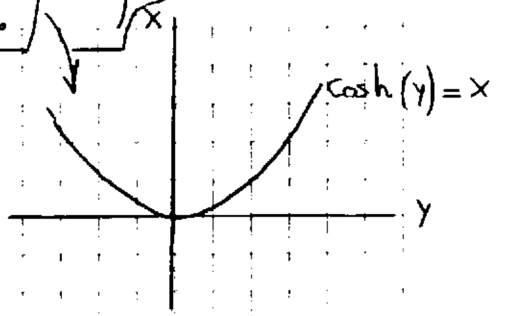
$$\left(\frac{U_0}{q\,E_0}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{q\,E_0\,Y}{c\,p_0}\right) = ct$$

$$X = \sqrt{\frac{U_0^2}{q^2E_0^2}\cdot \operatorname{senh}^2\left(\frac{q\,E_0\,Y}{c\,p_0}\right)+\frac{U_0^2}{q^2E_0^2}} - \frac{U_0}{q\,E_0}$$

$$X = \frac{U_0}{q\,E_0}\left(\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{q\,E_0\,Y}{c\,p_0}\right)+1} - 1\right)$$

$-\operatorname{senh}^2 + \cosh^2 =$

Esto es muy parecido a una parábola $\longrightarrow$ $\boxed{X = \frac{U_0}{q\,E_0}\left(\cosh\left(\frac{q\,E_0\,Y}{c\,p_0}\right)-1\right)}$



Para límite no-relativista

$$\cosh(\phi) \approx 1+\frac{\phi^2}{2}$$

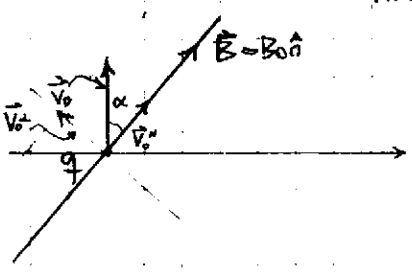
con $\phi \sim 0$
es decir E_0 chico

$$X \approx \frac{U_0}{q\,E_0}\cdot\frac{q^2E_0^2Y^2}{2c^2p_0^2}$$

es una parábola

18.

Partícula relativista



$$\vec{P}=\gamma m\vec{v} \qquad \vec{F}_L = q\left(\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right)$$

$$U=\gamma mc^2 \qquad \frac{dU}{dt}=q\,\vec{v}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow U \text{ se conserva}$$

$$U=U_0=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}mc^2$$

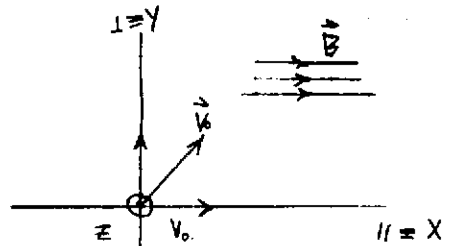
Supongo velocidad inicial $\vec{V}_0$, ángulo α entre $\vec{V}_0$ y $\vec{B}$

$$\rightarrow V^2 = k \text{ (constante)}$$

Tomo plano XY el plano de $\vec{V}_0$ y $\vec{B}$ $\downarrow$

$$\vec{F}=q/c\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)=\frac{q}{c}\left[\left(\vec{V}_{\perp}+\vec{V}_{\parallel}\right)\times\vec{B}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{\perp} = \frac{q}{c}\left(\vec{V}_{\perp}\times\vec{B}\right) = -\frac{q}{c}\cdot V_y\cdot B_0\hat{z} + \frac{q}{c}V_z\cdot B_0\hat{y} \\ \vec{F}_{\parallel} = \frac{q}{c}\left(\vec{V}_{\parallel}\times\vec{B}\right)=0 = \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(P_x) = \gamma m\cdot\frac{dV_x}{dt} = 0 \rightarrow \\ \frac{d}{dt}(P_y) = \gamma m\cdot\frac{dV_y}{dt} = \frac{q}{c}V_z B_0 \\ \frac{d}{dt}(P_z) = \gamma m\cdot\frac{dV_z}{dt} = -\frac{q}{c}V_y B_0 \end{cases} \qquad \boxed{V_x=(cte)=V_{0x}}$$

$$U_0=\gamma mc^2$$

$$\frac{U_0}{c}=\gamma mc$$

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)=\frac{(mc^2)^2}{U_0^2}$$

$$1-\frac{m^2c^4}{U_0^2}=\frac{V^2}{c^2}$$

$$\begin{cases} \frac{dV_y}{dt} = \frac{qB_0}{\gamma mc}V_z = \frac{qB_0c}{U_0}V_z \\ \frac{dV_z}{dt} = -\frac{qB_0}{\gamma mc}V_y = -\frac{qB_0c}{U_0}V_y \end{cases}$$

$$V^2 = k\text{ (constante)} = V_x^2+V_y^2+V_z^2 = c^2-\frac{m^2c^6}{U_0^2}$$

$$V^2 = \underbrace{V_x^{o2}+V_y^{o2}}_{\text{inicial}} = \underbrace{V_x^{o2}+V_y^2+V_z^2}_{\text{después}}$$

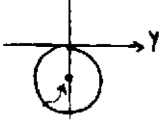
$$V_y=-\frac{dV_z}{dt}\frac{U_0}{qB_0c}\ ; \quad V_z=\frac{dV_y}{dt}\frac{U_0}{qB_0c}$$

$$\frac{d^2V_z}{dt^2}+\frac{q^2B_0^2c^2}{U_0^2}V_z=0$$

$$\frac{d^2V_y}{dt}+\frac{q^2B_0^2c^2}{U_0^2}\cdot V_y=0$$

$$V_y^{o2} = A^2\cdot \text{sen}^2\left(\frac{q^2B_0^2c^2}{U_0^2}t\right) + B^2\cdot\cos^2\left(\frac{q^2B_0^2c^2}{U_0^2}\cdot t\right)$$

— Observación —
Esto es una circunferencia en el plano ZY



$$=\frac{-U_0 V_y^o}{qB_0c}\equiv \text{radio de giro}$$

Pero V_y^{o2} es constante $\Rightarrow A=B \Rightarrow A=B=V_y^o \Rightarrow$

$$V_z=V_y^o\cdot\text{sen}\left(\frac{qB_0c}{U_0}\cdot t\right)$$

$$V_y=V_y^o\cdot\cos\left(\frac{qB_0c}{U_0}\cdot t\right)$$

$$V_z = A\cdot\cos\left(\frac{qB_0c}{U_0}t+\varphi_0\right)$$

$$V_y = B\cdot\cos\left(\frac{qB_0c}{U_0}\cdot t+\varphi_1\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= -V_y^o\cdot\cos\left(\frac{qB_0c}{U_0}t\right)\cdot\frac{U_0}{qB_0c}+\frac{U_0\,V_y^o}{qB_0c} \\ Y &= V_y^o\cdot\text{sen}\left(\frac{qB_0c}{U_0}\cdot t\right)\cdot\frac{U_0}{qB_0c} \end{aligned}}$$

En $t=0$ $\quad V_z=0 \quad V_y=V_y^o$

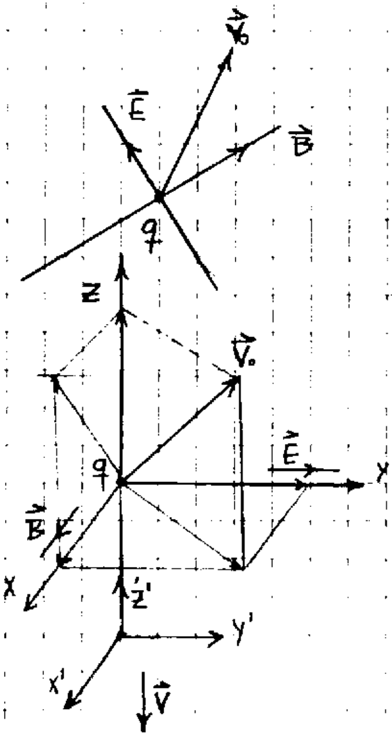
$\varphi_0=\pi/2$

$$V_y^o=B\cdot\cos(\varphi_1)$$

lo puedo tomar $\varphi_1=0$

continúa arriba

19.



$\vec{E} \perp \vec{B} \rightarrow \vec{E}' \perp \vec{B}' \Rightarrow \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$

$E^2 + B^2 = E'^2 + B'^2 \rightarrow$ si pediré $B' = 0$

requiero $E > B$

(a) $E_0 > B_0$

$\vec{E} = E_0 \hat{y}$

$\vec{B} = B_0 \hat{x}$

$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B})$

$0 = \vec{B}_\parallel + \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}\right)$

$\gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} = \vec{B}_\parallel + \gamma \vec{B}_\perp$

vivirá en ZX $\leftarrow$ $\underbrace{\gamma \frac{\vec{v}}{c} \times E_0 \hat{y}}$ $=$

propongo $\vec{v} = v\hat{z}$

$-\gamma \frac{v}{c} E_0 \hat{x} = 0 + \gamma B_0 \hat{x}$

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{B_0 c}{E_0} \hat{z}}$$

en K' será:

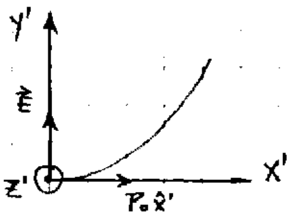
$$\vec{E}' = 0 + \gamma\left(E_0 \hat{y} + \left(-\frac{B_0 c}{E_0 c}\right) \hat{z} \times B_0 \hat{x}\right)$$

$$\vec{E}' = \gamma\left(E_0 - \frac{B_0^2}{E_0}\right)\hat{y} = \gamma\left(\frac{E_0^2 - B_0^2}{E_0}\right)\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}}} \cdot \frac{E_0^2}{E_0}\left(1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}\right)\hat{y}$$

Campo estático eléctrico $\rightarrow$ $\boxed{\vec{E}' = E_0 \cdot \left(1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}\right)^{1/2} \hat{y}'}$

Ahora se puede proceder como en el ejercicio 17.

Hacemos un cambio de ejes y suponemos:



$\vec{p}_0' = p_0' \hat{x}'$ $\qquad U_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2}$

$$y' = \frac{U_0'}{q \cdot E_0'}\left(\cosh\left[\frac{q E_0' x'}{c \, p_0'}\right] - 1\right)$$

$$E_0' = E_0\left(1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}\right)^{1/2}$$

$ct' = \gamma(tc - \beta z)$

$z' = \gamma(z - \beta ct)$

$y' = y$

$x' = x$

Pero $p_0' = p_0$ pues es en $\hat{y}$ que transforma de modo $y' \neq y$ $\Rightarrow$

$$Y = \frac{U_0'}{q E_0'}\left[\cosh\left(q \frac{E_0' x}{c \, p_0'}\right) - 1\right]$$

$$\boxed{Y = \frac{U_0}{q \, E_0 \sqrt{1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}}} \cdot \left[\cosh\left\{\frac{q \, E_0}{c \, p_0} \sqrt{1 - \frac{B_0^2}{E_0^2}} \cdot x\right\} - 1\right]}$$

(b)

$B_0 > E_0$

$$0 = \vec{E}_{\parallel} + \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right)$$

$$\underbrace{-\gamma\frac{\vec{V}}{c}\times B_0\hat{x}}_{\text{vive en } ZY} = \vec{E}_{\parallel} + \gamma\,\vec{E}_{\perp}$$

propongo $\vec{V} = V\hat{z} \rightarrow$

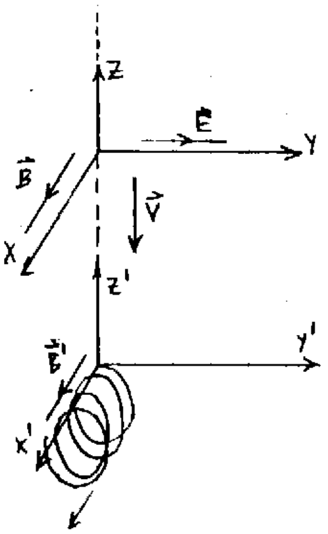
$$-\gamma\frac{V}{c}B_0\,\hat{y} = \gamma E_0\,\hat{y} \rightarrow \boxed{\vec{V} = -\frac{E_0 c}{B_0}\,\hat{x}}$$

$$\vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \left(-\frac{E_0 \cancel{c}}{B_0 \cancel{c}}\right)\hat{z}\times E_0\hat{y}\right)$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(B_0\hat{x} - \frac{E_0^2}{B_0}\hat{x}\right) = \gamma\,B_0\left(1 - \frac{E_0^2}{B_0^2}\right)\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{B}' = B_0\left(1 - \frac{E_0^2}{B_0^2}\right)^{1/2}\hat{x}'}$$

← campo magnético estático en $X'Y'Z'$



Ahora puede procederse usando lo hecho en el ejercicio 17.
Allí se tenía un campo $\vec{E}$ en $\hat{x}$ que generaba una trayectoria circular en el plano ZY y un desplazamiento a $\vec{V}$ constante en $\hat{x}$, siendo su composición una hélice.
Suponiendo $\vec{V}_0$ en el plano XY se tenía:

$V_x^{0'} = V_x'$
constante

$$\left(z' - \frac{U_0' V_y^{0'}}{q\,B_0' c}\right)^2 + y^2 = \frac{U_0'^2\,V_y^{0'2}}{q^2\,B_0'^2\,c^2}$$

← circunferencias (a cada X fijo corresponde una circunferencia de radio $= \frac{U_0' V_y^{0'}}{q B_0' c}$)

Usando la transformación para las coordenadas puede escribirse:

$$X' = X \qquad V_y^{0'} = V_y^0$$

$$Y' = Y$$

$$\frac{U'}{c} = \gamma\left(\frac{U}{c} - \frac{V}{c}\cdot \overbrace{P_z^0}^{=0}\right)$$

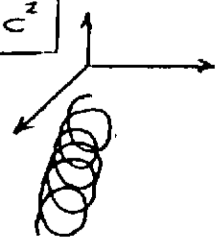
$$z' = \gamma\left(z - \frac{V}{c}ct\right)$$

$$\frac{U_0'}{c} = \gamma\cdot\frac{U_0}{c} \rightarrow U_0' = \gamma U_0$$

$$B_0' = \frac{B_0}{\gamma}$$

$$\boxed{\left(\gamma\cdot z - \gamma\cdot V\cdot t - \frac{U_0\gamma^2 V_y^0}{q\cdot B_0\cdot c}\right)^2 + y^2 = \frac{U_0^2\gamma^4\,V_y^{0\,2}}{q^2\,B_0^2\,c^2}}$$

→ hélice que se desenvuelve en avanzando en $\hat{x}$ mientras se desplaza el plano en $-\hat{z}$



20 Sí. La fase de una onda plana es invariante.

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}\cdot\vec{r} - \frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

la fase tiene el significado físico de reflejar las frecuencias/períodos espaciales y temporales de la onda.
Está relacionada con el "conteo" de crestas/valles en el dibujo espacial o temporal de la onda.

$$\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t = \vec{k}'\cdot\vec{x}' - \omega'\cdot t' \quad \leftarrow \text{invariancia de la fase}$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right)\frac{\vec{v}}{c} - \gamma ct\frac{\vec{v}}{c}$$

$$k_x.x + k_y y + k_z.z - \omega t = k'_x.x' + k'_y.y' + k'_z.z' - \omega' t'$$

Sea $\vec{V} = V\hat{z} \rightarrow$

$$\vec{k}.\vec{x} - \omega t = k'_x.x + k'_y.y + k'_z.\gamma(z - vt) - \frac{\omega'}{c}\gamma\left(ct - \frac{vz}{c}\right)$$

$x' = x$
$y' = y$
$z' = \gamma(z - v.t)$
$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}.z\right)$

Definimos un cuadrivector.

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad \therefore$$

$$\vec{k}.\vec{x} - \omega t = k_x.x + k_y.y + \gamma\left(k_z - \frac{v.\omega}{c^2}\right)\gamma(z - v.t) - \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v.k_z}{c}\right)\gamma\left(ct - \frac{v.z}{c}\right)$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c}k_z\right) \qquad k'_x = k_x$$

$$k'_z = \gamma\left(k_z - \frac{v}{c}.\frac{\omega}{c}\right) \qquad k'_y = k_y \qquad \Rightarrow$$

$$0 = -k_z.z + \omega t + \gamma^2\left(k_z.z - \frac{v.\omega z}{c^2} - k_z v.t + \frac{v^2\omega t}{c^2}\right) - \gamma^2\left(\frac{\omega}{\cancel{c}}\cancel{c}t - \frac{v.k_z.ct}{c} - \frac{\omega}{c}.\frac{v.z}{c} + \frac{v^2 k_z z}{c^2}\right)$$

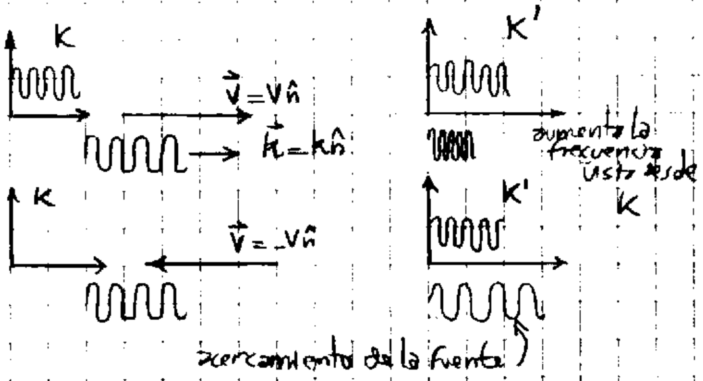
$$0 = -k_z.z + \omega t + \gamma^2\left[k_z.z - \cancel{\frac{v\omega.z}{c^2}} - \cancel{k_z.v.t} + \frac{v^2\omega.t}{c^2} - \omega t + \cancel{v.t.k_z} + \cancel{\frac{\omega v.z}{c^2}} - \frac{v^2 k_z z}{c^2}\right]$$

$$0 = -k_z z + \omega t + \gamma^2\left[k_z.z\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \omega t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$0 = -k_z z + \omega t + \gamma^2\left[k_z.z\frac{1}{\gamma^2} - \omega t.\frac{1}{\gamma^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Está definido OK el cuadrivector } k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)}$$

Veamos un caso de efecto Doppler relativista ($\vec{k} \parallel \vec{V}$)



$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}k\right)$$

pero $k = \frac{\omega}{c}$

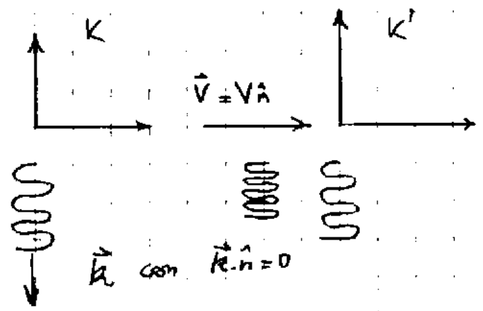
$$k' = \gamma\left(k - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\frac{\omega'}{\cancel{c}} = \gamma\frac{\omega}{\cancel{c}}\left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

Variación de la frecuencia

$$\boxed{\omega' = \omega\,\frac{(1 - V/c)}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}}$$



$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - 0\right)$$

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}}$$

Aún en el caso de $\vec V \perp \vec k$ hay variación de frecuencia en la onda emitida en K'

Preguntas Conceptuales

1. No, no es posible. Incluso la fórmula que da la transformación de la velocidad de un frame inercial K a otro inercial K' tiene como límite c.

3. La existencia de cuerpos rígidos no es compatible con la relatividad. Al moverse un CR solidario a un sistema inercial K' desde otro sistema K se medirá su longitud, paralela a la velocidad entre sistemas, contraída en cierto factor asociado a γ. $\Rightarrow$
no existe un cuerpo rígido en el sentido de dimensión inmutable

7. No tiene sentido porque pasando a otro frame K' podemos tener diferente combinación de campos $\vec E, \vec B$ e incluso puede ser nulo uno de ellos. Es decir que lo que es $\vec E$ en un frame puede ser $\vec B$ en otro y viceversa, y obviamente ambos frames tienen igual validez.

2. No la contradice porque la energía transportada y transmitida por la señal (información) va en $\hat n$, mientras que se supera c en el versor $\hat t$ donde no hay transporte de información.
Relatividad especial garantiza que ninguna señal que porte "información" puede viajar con más de c.