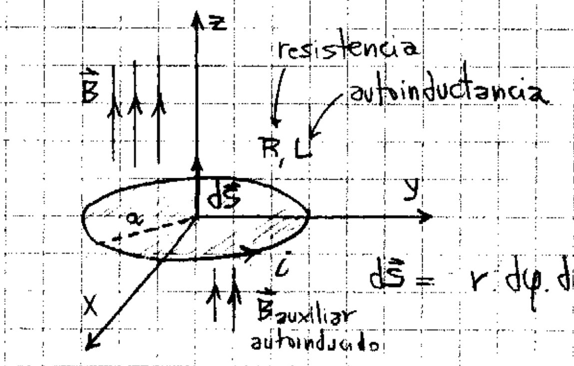
GUÍA 5

1.



$$B(t) = B_0 \, e^{-t/\tau}$$

$$d\vec{S} = r \, d\varphi \, dr \, \hat{z}$$

Lo que Sucede

El campo $\vec{B}$ disminuye entonces el sentido de la fem será tal que tiende a generar un $\vec{B}$ auxiliar que crece en $\hat{z}$ para oponerse al cambio

$$\mathcal{E}_{IND} = -\frac{d\,\phi_m}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{IND} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E}_{IND} = \int_0^a \int_0^{2\pi} -B_0 \, e^{-t/\tau} \cdot \frac{1}{\tau} \, r \, d\varphi \, dr$$

$$\mathcal{E}_{IND} = -B_0 \, e^{-t/\tau} \, \frac{1}{\tau} \, \frac{a^2}{\cancel{2}} \, \cancel{2}\pi$$

$$\mathcal{E}_{IND} = -B_0 \, \frac{a^2 \pi}{\tau} \, e^{-t/\tau}$$

fem debida al flujo del campo externo

$\vec{B}$ genera fem $\mathcal{E}_{IND} \Rightarrow$ hay i

i genera $\vec{B}_{aux} \Rightarrow$ hay autoflujo de $\vec{B}_{aux}$

$$\int \vec{B}_{aux} \cdot d\vec{S} = \phi_m^{auto} \equiv \text{autoflujo}$$

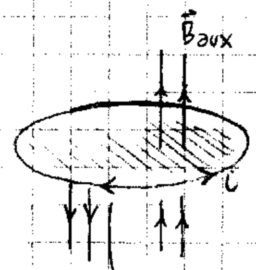
generará $\mathcal{E}_{autoind.}$

$$\mathcal{E}_{Autoinducida} = -\frac{d\,\phi_m^{auto}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i)$$

$$\mathcal{E}_{Autoind.} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{B_0 \, a^2 \pi}{R \cdot \tau} \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_{autoinducida}}{R} = +L \cdot \frac{B_0 \, a^2 \pi}{R^2 \tau^2} \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

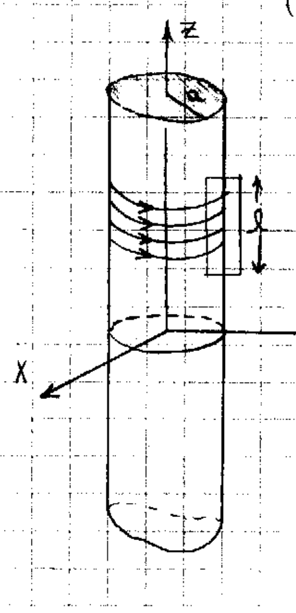


I autoinducida (sentido $-$)

$$\boxed{I(t) = i - I = \frac{B_0 \, a^2 \pi}{R \, \tau} \, e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{L}{R \, \tau}\right)}$$

2.

En casos de $\vec{J}$ uniforme puedo partir del análisis de $\vec{J}$ porque puedo despejarlo de la integral de superficie



$n = \frac{N}{L}$ $\frac{\text{vueltas}}{\text{longitud}}$

vueltas por unidad de longitud

$$I = I_0 \, \text{sen}(\omega t) = \Re\{-i I_0 \, e^{i\omega t}\}$$

solenoide infinito

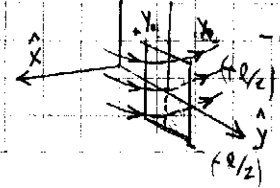
$*$ Escribir $\vec{J}$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{J} = g \hat{\varphi} \, \delta(r-a)$$

Considero en el plano ZY

$$I_0 \, e^{i\omega t} \, n \, \ell = \iint g \, \delta(y-a)(-\hat{x}) \, dy \, dz \, (-\hat{x})$$



$$-i I_0 \, e^{i\omega t} \, n \, \cancel{\ell} = g \, \cancel{\ell}$$

$$\vec{g} = -i n \, I_0 \, e^{i\omega t} \, \hat{\varphi}$$

$$\vec{J} = -n I_0 i e^{i\omega t} \delta(r-a)\hat{\varphi}$$ ← densidad de corriente en coordenadas cilíndricas

* Orden Cero

$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(0)} = 0$ $\qquad$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(0)} = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{(0)} = 4\pi\underbrace{\rho}_{=0} = 0$ → pues no hay cargas libres $\qquad$ $\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(0)}$

• solenoide infinito

$\vec{B} \neq \vec{B}(z), \vec{B}(\varphi)$

$\vec{B} = B\hat{z}$

Por simetría e integración es $\vec{B}=0$ afuera

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} J^{(0)}\hat{\varphi}$$

$$\underbrace{\frac{\partial B_r^{(0)}}{\partial z}}_{=0} - \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} i n I_0 \delta(r-a) e^{i\omega t}$$

$$-\int \frac{\partial B_z^{(0)}}{\partial r} dr = -i\int \frac{4\pi}{c} n I_0 \delta(r-a) dr\, e^{i\omega t}$$

$$B_z^{(0)} = i\frac{4\pi}{c} n I_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \boxed{\vec{B}^{(0)} = i\frac{4\pi}{c} n I_0 e^{i\omega t}\hat{z}}$$ $r<a$

$$\boxed{\vec{E}^{(0)} = 0}$$

$$\vec{B}^{(0)} = -\frac{4\pi}{c} n I_0 \operatorname{sen}(\omega t)\hat{z}$$

* Orden Uno

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{(1)} = 4\pi\rho^{(1)} = 0$$

No hay ρ en volumen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}^{(0)}}{\partial t} = -i\frac{4\pi}{c^2} n I_0 e^{i\omega t} i\omega\hat{z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}E_r = -i\frac{4\pi}{c^2} n I_0 i\omega$$

Por simetría $E_r = 0$

◀ ver forma de $\vec{E}^{(1)}$ en página siguiente

* Análisis de la $\vec{J}$

$$\vec{J} = -n I_0 e^{i\omega t}\delta(r-a)\operatorname{sen}\varphi\,\hat{x} + n I_0 e^{i\omega t}\delta(r-a)\cos\varphi\,\hat{y}$$

$$\vec{J}^{(0)} = n I_0 \delta(r-a) e^{i\omega t}\hat{\varphi}$$

[La parte espacial de $\vec{J}$ no depende de ω]

$$\vec{J}^{(1)} = \omega\frac{\partial J}{\partial\omega} e^{i\omega t} = 0$$

$$\vec{J}^{(2)} = \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial\omega^2} e^{i\omega t} = 0$$

* $r<a$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\varphi) = \frac{4\pi}{c^2} n I_0 \omega$$

$$r E_\varphi = \int +\frac{4\pi}{c^2} n I_0 \omega r\, dr$$

$$E_\varphi = +\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega r$$

* $r>a$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\varphi) = 0 \rightarrow E_\varphi = \frac{k}{r}$$ (forma general)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$-\int_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$-E_\varphi 2\pi r = -\frac{1}{c} i\frac{4\pi}{c} n I_0 e^{i\omega t} i\omega\pi a^2$$

$$-E_\varphi = \frac{4\pi}{c^2}\frac{n I_0 \omega}{2\pi r} e^{i\omega t}\pi a^2$$

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = \begin{cases} +\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega r\, e^{i\omega t}\hat{\varphi} & r<a \\ +\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega \frac{a^2}{r} e^{i\omega t}\hat{\varphi} & r>a \end{cases}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(1)}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(1)}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}^{(1)} = 0}$$

* Orden Dos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(2)}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(2)}}_{=0} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{(1)}$$

$r<a$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega r\, i\omega\, e^{i\omega t}\,\hat{\varphi}$$

$r>a$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega \frac{a^2}{r}\, i\omega\, e^{i\omega t}\,\hat{\varphi}$$

* $r<a$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{2\pi}{c^3} n I_0 \omega^2 r\, i e^{i\omega t}$$

$$B_z = -\frac{\pi}{c^3} n I_0 \omega^2 r^2\, i e^{i\omega t}$$

* $r>a$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{2\pi}{c^3} n I_0 \omega^2 \frac{a^2}{r}\, i e^{i\omega t}$$

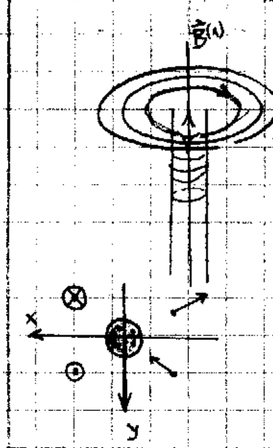
$$B_z = -\frac{2\pi}{c^3} n I_0 \omega^2 a^2 (\ln r)$$

$$\vec{B}^{(2)} = \begin{cases} -i\frac{\pi}{c^3} n I_0 \omega^2 e^{i\omega t} r^2 & r<a \\ -i\frac{\pi 2}{c^3} n I_0 \omega^2 e^{i\omega t} \ln r & r>a \end{cases}$$

Al tomar parte real en estas expresiones nos queda la parte temporal sen(ωt)

* forma de $\vec{E}^{(1)}$

$\vec{E}^{(1)}$ tiene como origen $\vec{B}^{(0)}$ que es en $\hat{z}$



* simetría de traslación en $\hat{z}$
* Rotación en φ

$$\vec{E} = \vec{E}(r)$$

* Reflexión en ZX, ZY

$E_z=0$
$E_r=0$

$$\vec{E} = E(r)\hat{\varphi}$$

* Versor Derivado

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\text{sen}\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\right]$$

$$-\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\hat{x} - \text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi}\,\hat{y}$$

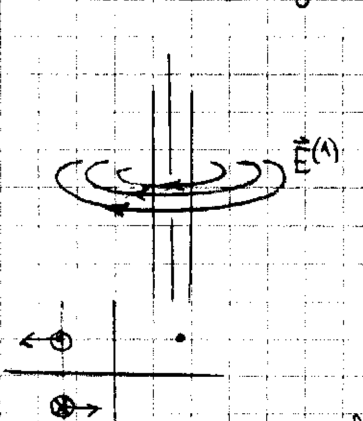
$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varphi}) = -\hat{r}\,\dot{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{(2)}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(2)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}^{(1)}}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\vec{E}^{(2)} = 0}$$

$\vec{B}^{(2)}$ tiene como origen a $\vec{E}^{(1)}$



* rotación en φ

$\vec{B} \neq \vec{B}(\varphi)$

* traslación en $\hat{z}$

$\vec{B} \neq \vec{B}(z)$

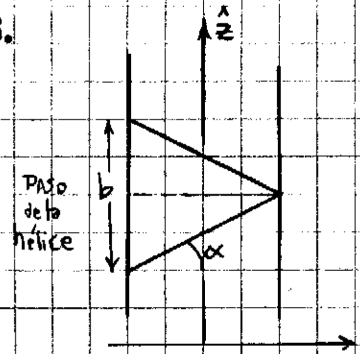
* Reflexión en XY

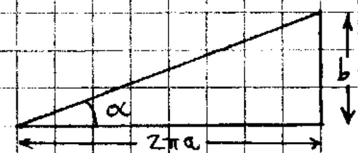
$B_r=0$
$B_\varphi=0$

$$\vec{B} = B(r)\hat{z}$$

* forma de $\vec{B}^{(2)}$

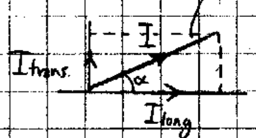
3.





$$\tan\alpha = \frac{b}{2\pi a}$$

$$n = \frac{N}{L} \qquad \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{2\pi a}\right)$$

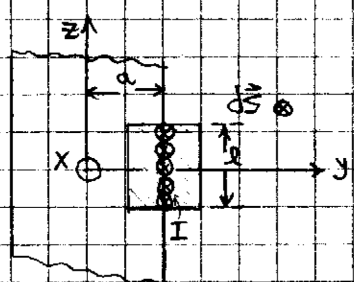


$$\to I_o \cos\omega t = \operatorname{Re}\{I_o\, e^{i\omega t}\}$$

(a)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{longitudinal:} & I_o\, e^{i\omega t} \cdot \cos\alpha \\ \text{transversal:} & I_o\, e^{i\omega t} \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}}$$

(b)

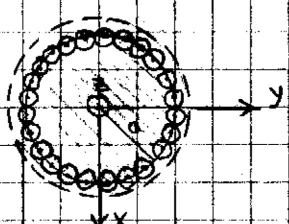


* longitudinal

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$I_\ell = \iint g_\ell\, \delta(y-a)\, dy\, dz$$

$$I_o\, e^{i\omega t} \cos\alpha \cdot n \cdot \cancel{\ell} = g_\ell\, \cancel{\ell} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_{long} = n\, I_o \cos\alpha\, e^{i\omega t}\, \delta(r-a)\, \hat{\varphi}$$



* transversal

$$I_t = \iint g_t\, \delta(r-a) \cdot r\, d\varphi\, dr$$

$$I_o\, e^{i\omega t} \operatorname{sen}\alpha = g_t \cdot a\, 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$\vec{J}_{transv.} = \frac{I_o \operatorname{sen}\alpha \cdot e^{i\omega t}}{2\pi a}\, \delta(r-a)\, \hat{z}$$

* Análisis de $\vec{J}$

long.	transv.
$\vec{J}^{(0)} = n\, I_o \cos\alpha\, e^{i\omega t} \cdot \delta(r-a)$	$\vec{J}^{(0)} = \frac{I_o \operatorname{sen}\alpha}{2\pi a}\, e^{i\omega t} \cdot \delta(r-a)$
$\vec{J}^{(1)} = 0$	$\vec{J}^{(1)} = 0$
$\vec{J}^{(2)} = 0$	$\vec{J}^{(2)} = 0$

* Orden Cero

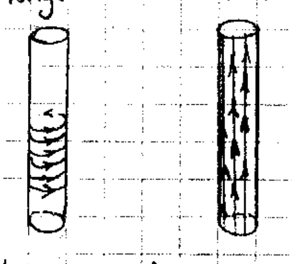
$$\vec{\nabla}.\vec{E}^{(0)} = 4\pi\rho^{(0)} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(0)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}^{(0)} = 0}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B}^{(0)} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\left(n I_0 \cos\alpha\, e^{i\omega t}.\delta(r-a)\,\hat{\varphi} + \frac{I_0 \operatorname{sen}\alpha}{2\pi a} e^{i\omega t}\delta(r-a)\,\hat{z}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r} = \dfrac{4\pi}{c} n I_0 \cos\alpha\,.\delta(r-a) e^{i\omega t} & \text{longitudinal} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.B_\varphi) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_r}{\partial \varphi} = \dfrac{4\pi}{c} I_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{2\pi a} e^{i\omega t}.\delta(r-a) & \text{transversal} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}$$

Forma de los campos

long. tranr



* traslación en $\hat{z}$ "
$\vec{B} \neq B(z)$
* Rotación en φ "
$\vec{B} \neq B(\varphi)$
* Reflexión en XY * Reflexión en XZ, YZ
$\vec{B} = B(r)\,\hat{z}$ $\qquad \vec{B} = B(r)\,\hat{\varphi}$

longitudinal

$$-\int \frac{\partial B_z}{\partial r}.dr = \int \frac{4\pi}{c} n I_0\, \delta(r-a)\, e^{i\omega t}.\cos\alpha.dr$$

R... sime... tr...

$$B_z = -\frac{4\pi}{c} n I_0 \cos\alpha\, e^{i\omega t} \qquad r<a$$
$$B_z = 0 \qquad r>a$$

transversal

$$\int \frac{\partial}{\partial r}(r.B_\varphi)dr = \int \frac{4\pi}{c} I_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\pi a}\delta(r-a)\, r\, e^{i\omega t} dr$$

$\downarrow r>a$

$$B_\varphi = \frac{\cancel{4}2\cancel{\pi}}{\cancel{2\pi}c} I_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{r} e^{i\omega t}$$

Aquí por la integral correspondería una constante aditiva pero δ de Dirac la mata

$$B_\varphi = \frac{2 I_0}{r.c}\operatorname{sen}\alpha . e^{i\omega t}$$

$B_\varphi = 0 \rightarrow$ si $r<a$

porque no concatena I y dada la simetría la ley de Ampere así lo confirma

$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} g$

Se cumple el contorno con

$$\vec{B}^{(0)} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{c} n I_0 \cos\alpha\, e^{i\omega t}.\hat{z} & r<a \\[2ex] \dfrac{2I_0}{r.c}.\operatorname{sen}\alpha . e^{i\omega t}.\hat{\varphi} & r>a \end{cases}$$

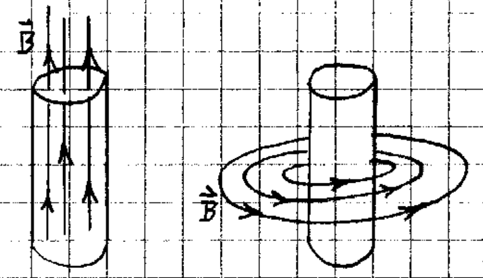
* Orden Uno

$$\vec{\nabla}.\vec{B}^{(1)} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(1)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}^{(1)} = 0}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E}^{(1)} = 4\pi\rho^{(1)} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}^{(0)})$$

$$r<a \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = \frac{4\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha\, e^{i\omega t}\, i\omega\, \hat{z}$$
$$r>a \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = -\frac{2I_0}{rc^2}\operatorname{sen}\alpha\left[e^{i\omega t}.i\omega.\hat{\varphi}\right]$$

forma de los campos



$r<a$
- simetría de rotación en $\hat{\varphi}$
- traslación en $\hat{z}$

$\vec{E} = \vec{E}(r)$
- Reflexiones

$\vec{E} = E(r)\hat{\varphi}$

$r>a$
- simetría de rotación en $\hat{\varphi}$
- traslación en $\hat{z}$

$\vec{E} = \vec{E}(r)$
- reflexiones

$\vec{E} = E(r)\hat{z}$

$r<a$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.E_\varphi) = \frac{4\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha . e^{i\omega t} i\omega$$

$$r.E_\varphi = \frac{4\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha \, e^{i\omega t} i\omega \int r\,dr$$

$$E_\varphi = \frac{2\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha \, e^{i\omega t} i\omega . r$$

$r>a$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(E_z) = -\frac{2 I_0}{r.c^2} \operatorname{sen}\alpha \, i\omega . e^{i\omega t}$$

$$E_z = \frac{2 I_0}{c^2} \operatorname{sen}\alpha \, i\omega \, e^{i\omega t} \ln r$$

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha \, i\omega . r . e^{i\omega t} \hat{\varphi} & r<a \\ \frac{2 I_0}{c^2} \operatorname{sen}\alpha . i\omega \ln r . e^{i\omega t} \hat{z} & r>a \end{cases}}$$

* Orden Dos

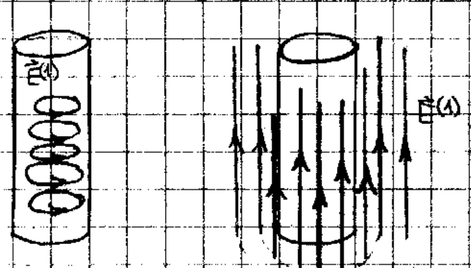
$$\vec{\nabla}.\vec{E}^{(2)} = 4\pi\rho^{(2)} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(2)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}^{(1)}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}^{(2)} = 0}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}^{(2)} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(2)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}^{(1)}$$

$r<a \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{2\pi}{c^2} n I_0 \cos\alpha \, i\omega \left[i\omega \, e^{i\omega t}\hat{\varphi}\right]$

$r>a \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{2 I_0}{c^2} \operatorname{sen}\alpha . i\omega \ln r \,(i\omega) . e^{i\omega t}\hat{z}$

forma de los campos



$r<a$

$\vec{B} = B(r)\hat{z}$

$r>a$

$\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$

$$\int \ln r . r . dr = \ln r . \frac{r^2}{2} - \int \frac{r}{2} dr$$

$u = \ln r \quad dv = r$

$du = \frac{1}{r} \quad v = \frac{r^2}{2}$

$$= \ln r . \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4}$$

$r<a$

$$-\frac{\partial}{\partial r} B_z = -\frac{2\pi}{c^3} n I_0 \cos\alpha \, \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$B_z = \frac{2\pi}{c^3} n I_0 \cos\alpha \, \omega^2 r \, e^{i\omega t}$$

$r>a$

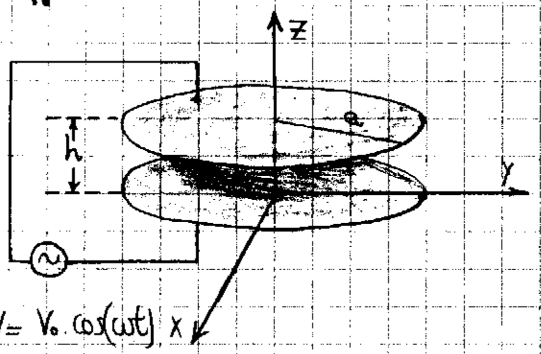
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r.B_\varphi] = -\frac{2 I_0}{c^3} \operatorname{sen}\alpha \, \omega^2 \ln r \, e^{i\omega t}$$

$$r.B_\varphi = -\frac{2 I_0}{c^3} \operatorname{sen}\alpha \, \omega^2 e^{i\omega t} \int \ln r . r . dr$$

$$B_\varphi = \frac{2 I_0}{c^3} \operatorname{sen}\alpha \, \omega^2 e^{i\omega t} \left(\frac{r^{\cancel{2}}}{4} - \ln r . \frac{r^{\cancel{2}}}{2}\right)$$

$$\boxed{\vec{B}^{(2)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{c^3} n I_0 \cos\alpha \, \omega^2 e^{i\omega t} . r \\ \frac{2 I_0}{c^3} \operatorname{sen}\alpha \, \omega^2 e^{i\omega t} . r \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln r\right) \end{cases}}$$

4.



$h \ll a$

Queremos ver el campo eléctrico y magnético entre las placas del condensador

$V = V_0 \cos(\omega t)$

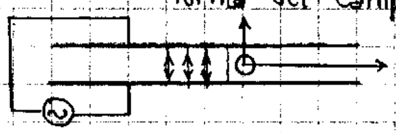
No hay $\vec{J}$ (corrientes libres entre las placas)

* Orden Cero

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(0)} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}^{(0)} = 0}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(0)} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho^{(0)}$ → hay carga en las placas conductoras que generará el campo, en forma de una densidad superficial

— forma del campo —



Como $h \ll a$ podemos considerar aproximación de placas infinitas

- traslación en x, y
  $\vec{E} = \vec{E}(z)$
- reflexión en xy, zx, zy
  $\vec{E} = E(z)\hat{z}$

En particular sabemos por superposición que $E \neq E(z) \rightarrow E = (cte)$

$$V = \int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V = \int E_z \cdot dz$$

$$V_0 e^{i\omega t} = E_z h$$

$$\boxed{\vec{E}^{(0)} = \frac{V_0}{h}\cdot e^{i\omega t}\,\hat{z}}$$

* Orden Uno

la carga ρ es tal que su distribución es uniforme; su parte espacial no varía respecto a $\omega \Rightarrow \rho^{(1)} = \rho^{(0)} = 0$

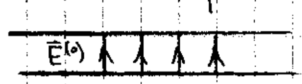
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{(1)} = 4\pi\rho^{(1)} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}^{(0)}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}^{(1)} = 0}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(1)} = 0$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(1)} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}^{(0)}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \frac{1}{c}\cdot\frac{V_0}{h}\, i\omega\, e^{i\omega t}\,\hat{z}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left[r\, B_\varphi\right] dr = \int \frac{V_0}{h.c}\cdot i\omega . r . e^{i\omega t} . dr$$

— forma del campo —



$\vec{B}^{(1)}$ debe ser en $\hat{\varphi}$

- rotación en φ
- traslación en r
  $B(z)\,\hat{\varphi}$
- reflexión en zx, zy

$$r . B_\varphi = \frac{V_0}{h.c}\, i\omega\, \frac{r^2}{2} . e^{i\omega t}$$

$$B_\varphi = \frac{V_0}{h.c}\, \frac{i\omega r}{2}\, e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\vec{B}^{(1)} = \frac{V_0}{2hc}\, i\omega\, e^{i\omega t}\, r\,\hat{\varphi}}$$

* Orden Dos

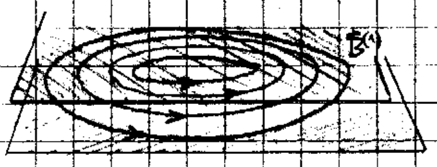
$$\vec{\nabla}.\vec{B}^{(2)}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}^{(2)}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(2)}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}^{(1)}}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{B}^{(2)}=0}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E}^{(2)}=4\pi\rho^{(2)}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(2)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}^{(1)}}{\partial t}$$

por igual justificación que antes $\rho^{(2)}=0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(2)}=-\frac{V_0}{2hc^2}r.(i\omega)^2e^{i\omega t}\hat{\varphi}$$

forma del campo



$\vec{E}^{(2)}$ tiene como origen $\vec{B}^{(1)}$

- rotación en $\hat{\varphi}$ $\rightarrow$ $\vec{E}^{(1)}=E^{(1)}_{(r)}\hat{z}$

$$\frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial r}=+\frac{V_0}{2hc^2}r.\omega^2.e^{i\omega t}$$

$$E_z=-\frac{V_0}{2hc^2}\frac{r^2}{2}\omega^2e^{i\omega t}$$

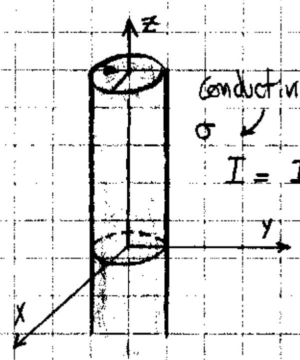
$$\boxed{\vec{E}^{(2)}=-\frac{V_0.\omega^2}{4hc^2}r^2.e^{i\omega t}\hat{z}}$$

* Relación con las funciones de Bessel

$$\vec{E}\equiv E^{(0)}+E^{(2)}$$

$$\vec{E}\cong\frac{V_0}{h}e^{i\omega t}\left[1-\frac{\omega^2}{4c^2}r^2+\dots\right]$$

5.



conductividad σ $\quad \mu = \varepsilon = 1$

$$I = I_0 \cos(\omega t) = I_0 e^{i\omega t}$$

Conductor NO-perfecto

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

la $\vec{J}$ va a depender del radio del conductor (porque esa es la dependencia de $\vec{E}$) y por simetría:
- rotación en φ (no depende de φ)
- traslación en z (no depende de z)

$$\vec{J} = J(r)\hat{z}$$

(a) * Orden Cero

$$\nabla \cdot \vec{B}^{(0)} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}^{(0)} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(0)} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{(0)} = 4\pi \rho^{(0)} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} f(r) \qquad [1]$$

$\rho = 0 \rightarrow \boxed{\vec{E}^{(0)} = cte}$

No hay densidad de carga en volumen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)}\Big|_{\hat{z}} = \frac{4\pi}{c} f(r)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) = \frac{4\pi}{c} J(r)$$

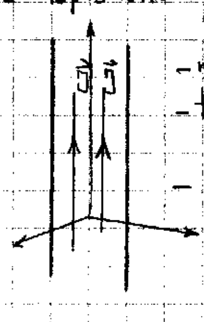
$$\frac{B_\varphi}{r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \cdot J(r)$$

$$I_0 e^{i\omega t} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \vec{J}(r)\, r\, dr\, d\varphi$$

No puedo despejar $J(r)$

forma del campo

$\vec{B}$ cumple una ecuación tipo laplaciana



- rotación en φ
- traslación en $\hat{z}$

$\vec{B} = \vec{B}(r)$

- reflexión en ZX, ZY

$\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$

OTRA VÍA

$r > a$

$$\int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_0 e^{i\omega t}$$

$$B_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I_0 e^{i\omega t}$$

$$B_\varphi = \frac{2I_0}{cr} e^{i\omega t}$$

$r > a \quad \boxed{\vec{B}^{(0)} = \frac{2I_0}{c\,r} e^{i\omega t}\hat{\varphi}}$

usando ley de Ampere

$r < a$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E}^{(0)}$$

esto vale solamente dentro del conductor

constante

$$\frac{B_\varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(B_\varphi) = \frac{4\pi}{c}\sigma E_0$$

→ de acá no se puede despejar

$$\int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\sigma E_0 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$B^{(0)} 2\pi r = \frac{2\pi}{c} \cancel{2\pi r}\, \sigma E_0 r$$

$r < a \quad B^{(0)} = \frac{2\pi}{c}\sigma E_0 r$

$$\boxed{B^{(0)} = \frac{2\pi\sigma E_0}{c} r\, e^{i\omega t}\hat{\varphi}}$$

* contorno en $r = a$

$$\frac{2\pi\sigma E_0 a}{\cancel{c}} = \frac{2I_0}{\cancel{c}a}$$

$$E_0 \sigma \pi a^2 = I_0$$

$$J = \frac{I_0}{\pi a^2}$$

Esto parece sensato para orden "cero" estático

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$-\nabla^2\vec{E} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} i\omega \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\vec{E} = 0$$

buen conductor $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1$

$$\nabla^2\vec{E} + i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\vec{E} = 0$$

$$\delta^2 = \frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}$$

$$\nabla^2\vec{E} + \frac{2i}{\delta^2}\vec{E} = 0$$

Esto lleva a funciones de Bessel

* Orden Uno

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^{(1)} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}^{(1)} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(1)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}^{(0)}}{\partial t}$$

$r>a$

$$\overset{r>a}{\hat{\varphi}\left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)} = -\frac{1}{c}\cdot i\cdot\omega\cdot\frac{2I_0}{r.c}\,e^{-i\omega t}\,\hat{\varphi}$$

$E_r = 0$ por simetría $\Rightarrow$ $\vec{E}^{(1)} = E(r)\hat{z}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{i\omega 2I_0}{c^2.r}e^{-i\omega t}$$

$$E_z = \frac{i\omega 2I_0}{c^2}e^{-i\omega t}\ln r$$

$r<a$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}^{(1)} \qquad [1]$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\cdot\hat{z} = \frac{4\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\,\pi\sigma E_0}{c^2}r^2\,\hat{z}$$

$$\int\partial\, r B_\varphi = \int\frac{4\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\pi\sigma E_0}{c^2}r^3\,dr$$

$$r.B_\varphi = \frac{\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\pi\sigma E_0}{c^2}r^4$$

$$B_\varphi = \frac{\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\pi\sigma E_0}{c^2}r^3$$

$$r>a \quad \boxed{\vec{B}^{(1)} = \frac{\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\pi\sigma E_0}{c^2}r^3.e^{-i\omega t}\,\hat{\varphi}}$$

$r<a$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c}\cdot i\omega\cdot\frac{2\pi\sigma E_0.r}{c}$$

$$E_z = \frac{i\omega}{c^2}\,\frac{\cancel{2}\pi\sigma E_0}{\cancel{2}}r^2$$

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = i\omega\,\frac{\pi\sigma E_0}{c^2}r^2e^{-i\omega t}\hat{z}} \quad r<a$$

$$\boxed{\vec{E}^{(1)} = i\omega\,\frac{2I_0}{c^2}\ln r\,e^{-i\omega t}\,\hat{z}} \quad r>a$$

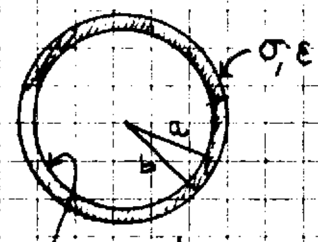
de [1] podemos usar en forma equivalente:

$$\int_\Gamma \vec{B}^{(1)}\cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi\sigma}{c}\int_S \vec{E}^{(1)}\cdot d\vec{S}$$

$$B_\varphi^{(1)}\cdot\cancel{2\pi r} = \frac{\cancel{4}^{2}\pi\sigma}{c}\;\frac{i\omega\,\pi\sigma E_0}{c^2}\,\frac{r^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4}}\,\cancel{2\pi}$$

$$B_\varphi^{(1)} = \frac{\pi\sigma}{c}\,\frac{i\omega\pi\sigma E_0}{c^2}r^3$$

6.



Σ: densidad superficial de carga uniforme

(a) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = 4\pi \rho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Lo que es esperable que suceda es que la carga vaya hacia la superficie y quede distribuida allí uniformemente

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

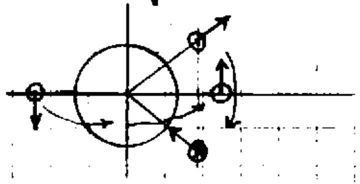
Dada la simetría de rotación en φ, θ de la bola el campo $\vec{E}$ debe ser radial.
Lo mismo cabe decir de $\vec{J}$ debido a la relación:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

La simetría de $\vec{J}, \vec{E}$ debe mantenerse en el tiempo puesto que no hay causa que la haga variar

* simetría de rotación φ, θ
* reflexión en xy, zx, zy

Para el campo $\vec{B}$ se tiene:



* reflexión en xy ∧ rotación en $\hat{\theta} \to B_r = 0$
* reflexión en xy ∧ rotación en $\hat{\theta} \to B_\varphi = 0$
* reflexión en zx ∧ rotación en $\hat{\varphi} \to B_\theta = 0$

$$\vec{B} = 0 \longrightarrow \begin{array}{l}\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\end{array}$$

$$0 = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

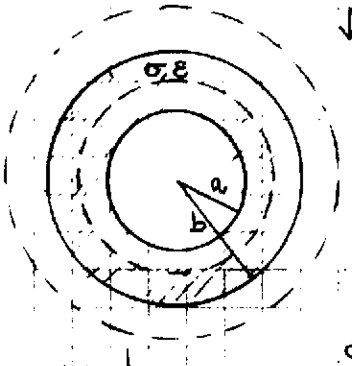
$$0 = \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma \vec{E} = 0$$

$$E_r = E_{0r} \cdot e^{kt}$$
$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = E_{0r} \cdot e^{kt} \cdot k$$

$$k + 4\pi\sigma = 0$$
$$k = -4\pi\sigma$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0(r) \cdot e^{-4\pi\sigma \cdot t}\, \hat{r}}$$
$$\boxed{\vec{J} = E_0(r)\, e^{-4\pi\sigma \cdot t} \cdot \sigma\, \hat{r}}$$



Suposición: la simetría se conserva en todo el proceso de acomodación de las cargas

La parte espacial debe comportarse así

* $r > b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot \overbrace{\Sigma \cdot 4\pi a^2}^{\text{carga neta encerrada (se conserva)}}$$

$$E \cdot \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi}\, \Sigma\, 4\pi a^2$$
$$E = \Sigma \frac{4\pi a^2}{r^2}$$

$$E(r=b) = \Sigma \frac{4\pi a^2}{b^2} = \frac{4}{3}\frac{\rho \pi}{\varepsilon}\left(b - \frac{a^3}{b^2}\right)$$

* $a < r < b$

$$\varepsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)$$

$$E \cdot \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi} \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)$$

$$E = \frac{4}{3}\frac{\rho \pi}{\varepsilon}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)$$

$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = 0$ * $r > b$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \varepsilon \vec{E} = 0$$

* $a < r < b$

$$-\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma . 4\pi}{\varepsilon} \rho = 0 \qquad \rho = \rho_0 . e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}$$

$$\rho_0 . e^{kt} \rightarrow \qquad \rho_0 e^{kt}\left(k + \frac{\sigma 4\pi}{\varepsilon}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} . \left(\frac{4\pi}{\varepsilon\, 3} \rho \left[r - \frac{a^3}{r^2}\right] . e^{-4\pi\sigma t} \hat{r}\right) = 4\pi \rho$$

tomando la parte espacial

$$\frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} . \frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r^2}\, \rho . \left(\frac{r^3 - a^3}{\cancel{r^2}}\right)\right] = 4\pi \rho(r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} . (r^3 - a^3) + \cancel{\rho . 3r^2} = \cancel{\rho . 3r^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} (r^3 - a^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = (\text{cte respecto a } r)$$

$$\rho(t=0) = \rho_0 . = \Sigma . \delta(r - a)$$

$$\boxed{\rho = \Sigma . \delta(r-a) . e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t}}$$

$a < r < b$ $\quad \vec{E} = \frac{4}{3}\pi \frac{\rho}{\varepsilon} \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right) . e^{-4\pi\sigma t} \hat{r}$

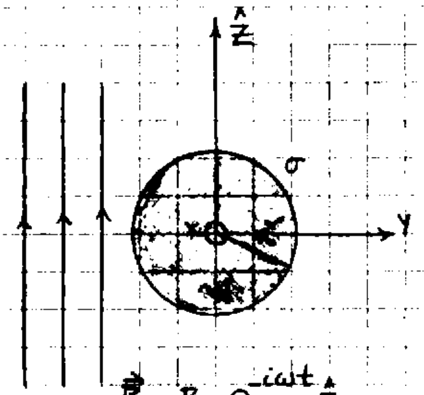
$r > b$ $\quad \vec{E} = \Sigma . \frac{4\pi a^2}{r^2} . e^{-4\pi\sigma t} \hat{r}$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma . \frac{4}{3}\pi \frac{\rho}{\varepsilon} \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right) . e^{-4\pi\sigma t} \hat{r}}$$

(b)

$$\vec{J} . \vec{E} = \sigma \left(\frac{4}{3}\pi \frac{1}{\varepsilon} \Sigma . \delta(r-a) . e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t} . \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right) e^{-4\pi\sigma t}\right)^2$$

7.



Ω $\vec B$ es uniforme espacialmente $\rightarrow$

$$B_e = (cte) \rightarrow$$

$$\vec B \approx B_e\, e^{-i\omega t} + \omega\,\underbrace{\frac{\partial B_e}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} . e^{-i\omega t}}_{=0} + \dots$$

* Orden Cero

$$\vec\nabla\cdot\varepsilon\vec E^{(0)} = 4\pi\rho^{(0)} = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec E^{(0)} = 0 \rightarrow \boxed{\vec E^{(0)} = 0}$$

$$\vec\nabla\cdot\vec B^{(0)} = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec B^{(0)} = \frac{4\pi}{c}\vec J^{(0)} = 0 \Rightarrow \vec B^{(0)} = (cte)$$

A orden cero el campo no se entera de la presencia de la esfera

$$\boxed{\vec B^{(0)} = B_e . e^{-i\omega t}\,\hat z}$$

* Orden Uno

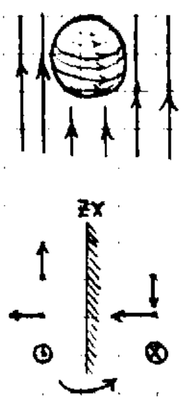
$$\vec\nabla\cdot\vec B^{(1)} = 0 \qquad \vec\nabla\times\vec B^{(1)} = \frac{4\pi}{c}\vec J^{(1)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E^{(0)}}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{\vec B^{(1)} = 0}$$

$$\vec\nabla\cdot\varepsilon\vec E^{(1)} = 4\pi\rho^{(1)} = 0$$

$$\vec\nabla\times\vec E^{(1)} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(B_e\, e^{-i\omega t}\right)\hat z$$

$$\vec\nabla\times\vec E^{(1)} = +\frac{1}{c}\, i\omega\, B_e\, e^{-i\omega t}\,\hat z$$

forma de $\vec E^{(1)}$



* simetría de rotación en φ
$\vec E^{(1)} \neq \vec E(\varphi)$

* reflexión en ZX, ZY
$\vec E^{(1)} = E(z,r)\,\hat\varphi$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r . E_\varphi^{(1)}\right) = \frac{i\omega}{c}\, B_e\, e^{-i\omega t}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left[r . E_\varphi^{(1)}\right] dr = \int -\frac{i\omega}{c} . r . B_e . e^{-i\omega t} . dr$$

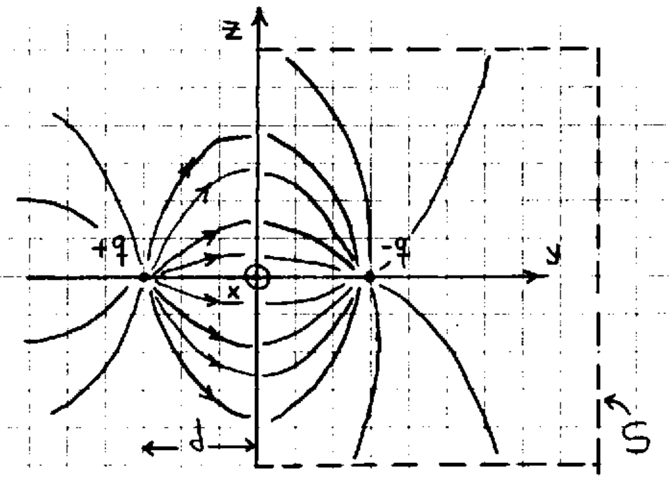
$$r . E_\varphi^{(1)} = -\frac{i\omega}{c}\,\frac{r^2}{2}\, B_e . e^{-i\omega t}$$

$$E_\varphi^{(1)}(r) = -\frac{i\omega}{2c} . r . B_e . e^{-i\omega t}$$

$$\vec J . \hat\varphi = -\frac{i\omega}{2c}\,\sigma\, r\, B_e . e^{-i\omega t}$$

corrientes en $\hat\varphi$

10. (a)



Tomamos dos cargas de signos opuestos y queremos evaluar:

$$\vec{F} = \oiint_S \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{S}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E_\varepsilon^2\right)$$

Tensor de Maxwell (solo campo $\vec{E}$)

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{(x^2+(y+d)^2+z^2)^{3/2}}(x, y+d, z) + \frac{-q}{(x^2+(y-d)^2+z^2)^{3/2}}(x, y-d, z)$$

$$\vec{E}(x,0,z) = \frac{q}{(x^2+d^2+z^2)^{3/2}}(x, d, z) + \frac{-q}{(x^2+d^2+z^2)^{3/2}}(x, -d, z)$$

$$\vec{E}(x,0,z) = \frac{q}{(x^2+d^2+z^2)^{3/2}}\, 2d\ \hat{y}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -E_y^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_y^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_y^2}{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dx.dz \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{S} = -dS\ \hat{y} = -dx.dz\ \hat{y}$$

$$\vec{F} = \oiint_{S_{TOTAL}} \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{S} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T\ dx.dz\ \hat{y} = -\frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_y^2}{2}\, dx.dz\ \hat{y}$$

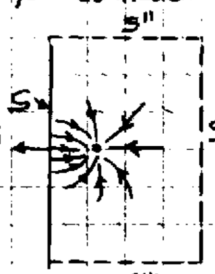
$$\vec{F} = -\frac{1}{\frac{8\pi}{2}}\hat{y}\ q^2\, \cancel{4}\, d^2 . \underbrace{\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx.dz}{(x^2+d^2+z^2)^3}}_{\text{cilíndricas en } xz} = -\frac{q^2 d^2}{2\pi}\hat{y}\cdot\frac{\pi}{2d^4} = -\frac{q^2}{4d^2}\hat{y}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{r.dr.d\varphi}{(r^2+d^2)^3} = \frac{1}{2}\int_{d^2}^{+\infty}\frac{2\pi.du}{u^3} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\Big|_{d^2}^{\infty} = -\frac{\pi}{2}\left(0 - \frac{1}{d^4}\right) = \frac{\pi}{2d^4}$$

$r^2+d^2 = u$

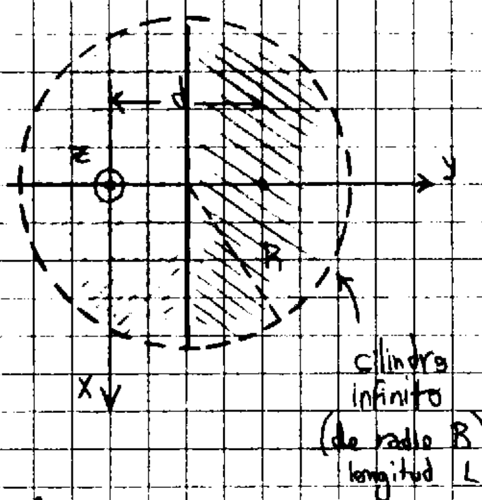
$2r\,dr = du$

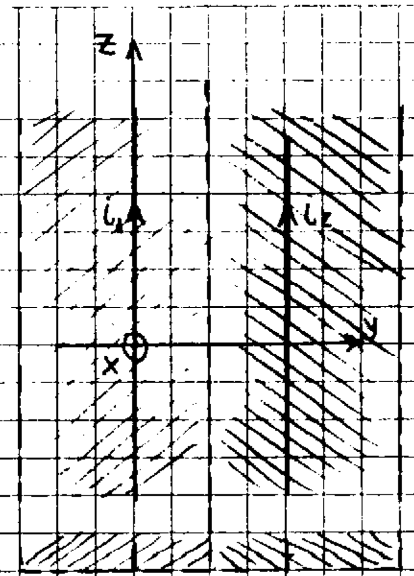
Hacemos tender la caja a infinito en sus lados, con lo cual el flujo sobre S', S'', S''' es nulo porque el integrando E^2 se debilita como $1/r^4$ y la superficie crece solo como r^2 ⇒ me quedo solo con el flujo sobre S



$$\boxed{\vec{F} = -\frac{q^2}{4d^2}\hat{y}}$$

(b)



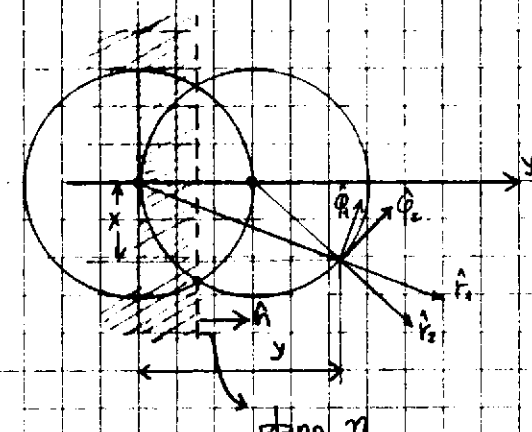


tapa inferior del cilindro (en $-\infty$)

tensor de Maxwell $\rightarrow$ $$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon E_i E_j + \frac{B_i}{\mu}B_j - \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right)\delta_{ij}\right)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2 I_1}{c\, r_1}\hat{\varphi}_1 = \frac{2 i_1}{c}\cdot(-\operatorname{sen}\varphi_1 \hat{x} + \cos\varphi_1 \hat{y})\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{2 i_2}{c}\cdot(-\operatorname{sen}\varphi_2 \hat{x} + \cos\varphi_2 \hat{y})\cdot\frac{1}{(x^2+(y-d)^2)^{1/2}}$$



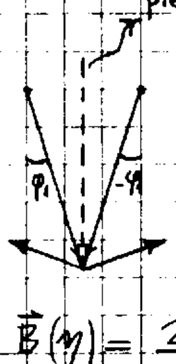
$$\varphi_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{si } y = d/2$$

$$\varphi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{y-d}{x}\right)$$

$$\varphi_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{d/2}{x}\right) =$$

$$\varphi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{-d/2}{x}\right) = -\varphi_1$$

el flujo sobre el lateral se va a cero cuando el radio $R\to\infty$



defino $\varphi_1 = \varphi$

$$\vec{B}_1(\eta) = \frac{2 i_1}{c}\left(-\operatorname{sen}\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$\vec{B}_2(\eta) = \frac{2 i_2}{c}\left(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\right)\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$\vec{B}(\eta) = \frac{2}{c}\,\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}\left[(-i_1+i_2)\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\hat{x} + (i_1+i_2)\cos\varphi\cdot\hat{y}\right]$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}(B_x^2+B_y^2) & B_x\cdot B_y & 0 \\ B_y\cdot B_x & B_y^2 - \frac{1}{2}(B_x^2+B_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(B_x^2+B_y^2) \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{8\pi} \cdot \begin{pmatrix} B_x^2 - B_y^2 & 2B_xB_y & 0 \\ 2B_yB_x & B_y^2 - B_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -B_x^2 - B_y^2 \end{pmatrix} \qquad d\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ dx.dz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el plano η es

$$d\vec{S} = dx.dz\,\hat{y} \qquad \vec{F} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overleftrightarrow{T}.d\vec{S} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2B_xB_y\,dx\,dz}{8\pi}, \frac{(B_y^2 - B_x^2)\,dx\,dz}{8\pi}, 0\right)$$

$$B_y^2 = \left(\frac{2}{c}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}\cdot(i_1+i_2)\cos\varphi\right)^2 = \frac{4}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)}(i_1+i_2)^2\cdot\frac{x^2}{r^2} \to x^2+d^2/4$$

$$B_x^2 = \left(\frac{2}{c}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^{1/2}}(i_2-i_1)\,\text{sen}\varphi\right)^2 = \frac{4}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)}(i_2-i_1)^2\cdot\frac{y^2}{r^2} \begin{matrix}\to d^2/4 \\ \to x^2+d^2/4\end{matrix}$$

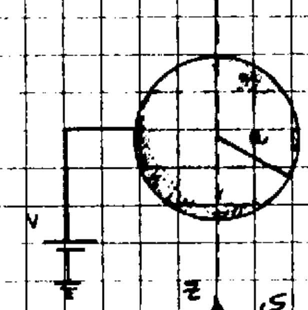
$$\vec{F} = \frac{1}{8\pi}\int_{-L}^{+L}\int_{-L}^{+L}\frac{4}{c^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^2}\left[(i_1+i_2)^2.x^2 - (i_2-i_1)^2.d^2/4\right]dx\,dz$$

$$\vec{F} = \iint\frac{4}{c^2\,8\pi}\frac{(i_1+i_2)^2\,x^2\,dx\,dz}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^2} - \iint\frac{4}{c^2.8\pi}(i_2-i_1)^2.\frac{d^2/4}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^2}dx\,dz$$

$$\vec{F} = \frac{2L}{8\pi}(i_1+i_2)^2.\frac{4}{c^2}.\int_{-L}^{+L}\frac{x^2}{(x^2+d^2/4)^2}dx - \frac{2L}{8\pi}(i_2-i_1)^2\frac{\cancel{4}}{c^2}.\frac{d^2}{\cancel{4}}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{\left(x^2+\frac{d^2}{4}\right)^2}$$

$$2\int_0^{+L}\left(\frac{x}{x^2+d^2/4}\right)^2.dx \qquad 2\int_0^{+L}\frac{dx}{(x^2+d^2/4)^2}$$

11.

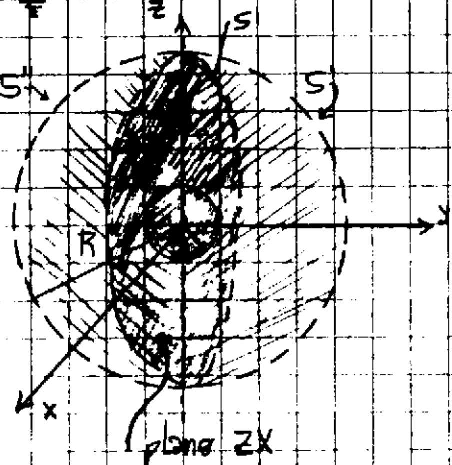


	ϕ	$\vec{E}$
$r<a$	V	0
$r>a$	$\frac{Va}{r}$	$\frac{Va}{r^2}\hat{r}$

$aV = Q_{neta}$ (esfera)

campo de la esfera a potencial V en todo el espacio $\sqrt{x^2+y^2+z^2} > a$

$$\vec{E} = \frac{V.a}{(x^2+y^2+z^2)}\left(\operatorname{sen}\theta.\cos\varphi\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$$



en el plano XZ es $\begin{cases}\varphi = 0\\ y = 0\end{cases}$ $\therefore$

$$\vec{E}(\varphi=0) = \frac{V.a}{(x^2+z^2)}\cdot\left(\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}}\,\hat{x} + \underbrace{\cos\theta}_{\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}}\,\hat{z}\right)$$

plano ZX

$$\vec{E}(x,0,z) = \frac{V.a}{(x^2+z^2)^{3/2}}\left(x\,\hat{x} + z\,\hat{z}\right)$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{E_x^2+E_z^2}{2} & 0 & E_xE_z \\ 0 & -\frac{E_x^2+E_z^2}{2} & 0 \\ E_zE_x & 0 & E_z^2-\frac{E_x^2+E_z^2}{2}\end{pmatrix} \qquad d\vec{S} = \begin{pmatrix}0\\ dx\,dz\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{T}.d\vec{S} = \left(0, -\left(\frac{E_x^2+E_z^2}{(4\pi)2}\right)dx\,dz, 0\right)$$

$$\vec{F} = -\iint \frac{1}{8\pi}\left[\frac{a^2V^2x^2}{(x^2+z^2)^3} + \frac{a^2V^2z^2}{(x^2+z^2)^3}\right]dx\,dz$$

límites complicados

$\sqrt{x^2+z^2} > a$

$x^2 > a^2 - z^2$

$x > |\sqrt{a^2-z^2}|$

$x < -|\sqrt{a^2-z^2}|$

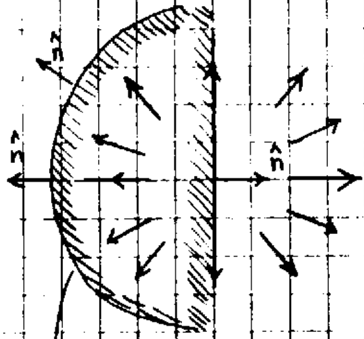
$z^2 > a - x^2$

$| < x < |\sqrt{a^2-z^2}|$

$$\vec{F} = -\frac{V^2a^2}{8\pi}\iint \frac{\cancel{(x^2+z^2)}}{(x^2+z^2)^{\cancel{3}\,2}}\,dx.dz$$

paso a cilíndricas

$$\int_0^{2\pi}\int_a^{\infty}\frac{\cancel{r}\,dr.d\varphi}{r^{\cancel{4}\,3}} = 2\pi.\frac{r^{-2}}{(-2)}\Bigg]_a^{\infty} = -\pi.-\frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a^2}$$



$$\vec{F} = -\frac{V^2\cancel{a^2}}{8\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{a^2}} = -\frac{V^2}{8}\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{V^2}{8}\hat{y}}$$

Fuerza sobre el hemisferio occidental de la bola

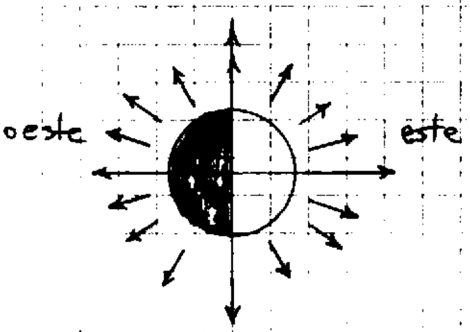
Sobre esta superficie el flujo es nulo porque el integrando en $\int\overleftrightarrow{T}d\vec{S}$ sale como $1/r^4$ y el área crece con r^2

Para comparar el resultado obtenido a partir de la fuerza de Lorentz, tenemos que evaluar la fuerza del campo eléctrico de un hemisferio sobre el otro hemisferio.

$$\vec{F} = \int_V dq \cdot \vec{E}$$

campo eléctrico

el hemisferio oeste



$$\sigma = \frac{Q}{\text{Area}} = \frac{V \cdot a}{4\pi a^2} = \frac{V}{4\pi a} \rightarrow \rho = \frac{V}{4\pi a}\,\delta(r-a)$$

carga en volumen

$$\vec{F} = \int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{a} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \; \frac{V}{4\pi a}\,\delta(r-a) \cdot \left[\frac{V \cdot a}{r^2}\left(\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \,\hat{y} + \cos\theta \,\hat{z}\right)\right]$$

$$\vec{F}\cdot\hat{y} = \iiint \frac{V^2 \cancel{a}}{4\pi \cancel{a}}\,\delta(r-a) \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

$$\vec{F}\cdot\hat{y} = \frac{V^2}{4\pi}(-2)\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\theta = -\frac{\cancel{2}V^2}{4\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} = \boxed{-\frac{V^2}{4}}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{x} = \frac{V^2}{4\pi}\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}\cos\varphi \, d\varphi}_{=0} \cdot \int \# = 0$$

$$\vec{F}\cdot\hat{z} = \frac{V^2}{4\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}_{=0} \cdot \int \# = 0$$

Como era evidente por simetría

Acá se ve que no da el mismo resultado evaluar la fuerza sobre la distribución utilizando el concepto de fuerza de Lorentz.

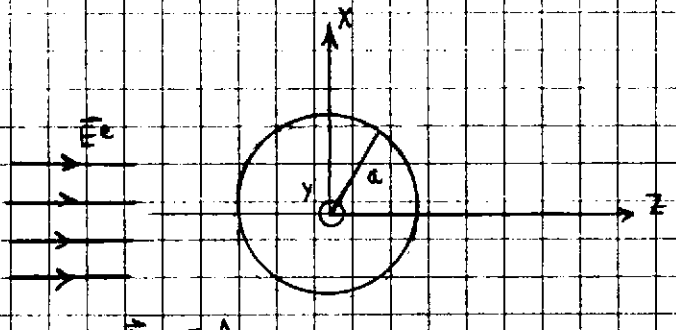
El problema es que en la expresión de $\vec{E}$ está metido el campo que hace el mismo hemisferio oeste sobre el cual queremos evaluar la fuerza.

En ese sentido estamos considerando la autofuerza del hemisferio oeste sobre sí mismo. Por ello aquí da una fuerza mayor que utilizando el flujo del tensor de Maxwell.

No hay modo, sencillo al menos, de restarle esta "autofuerza" al cálculo. Para estos casos es conveniente utilizar

$$\oiint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S}$$

12.



Tiene simetría de revolución en $\hat{z}$

$\vec{E}^e = E_0 \hat{z}$

Utilizamos expresión del potencial calculada por otros métodos

(a)

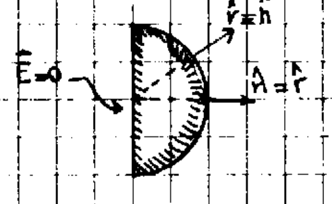
$$\phi(r,\theta) = -E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

$(r>a)$ $$\vec{E}(r,\theta) = \left(E_0\cos\theta + 2E_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(-E_0 r\,\text{sen}\,\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\text{sen}\,\theta\right)\hat{\theta}$$

No podemos tomar una superficie cerrada en el infinito (no conviene) porque el flujo de $\overleftrightarrow{T}$ no se va a anular allí debido a que hay E_0 en el infinito. Conviene una superficie coincidente con el hemisferio en cuestión

$$\vec{E}(r=a,\theta) = (3E_0\cos\theta)\hat{r} + 0\,\hat{\theta} = 3E_0\cos\theta\left\{(\text{sen}\,\theta.\cos\varphi)\hat{x} + (\text{sen}\,\theta.\text{sen}\,\varphi)\hat{y} + (\cos\theta)\hat{z}\right\}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{E_x^2+E_y^2+E_z^2}{2} & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & \frac{E_y^2-E_x^2-E_z^2}{2} & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & \frac{E_z^2-E_x^2-E_y^2}{2}\end{pmatrix}$$



$$d\vec{S} = a^2\,\text{sen}\,\theta.\,d\varphi.d\theta\ \hat{r}$$

$$d\vec{S} = a^2.\text{sen}\,\theta.\,d\varphi.\,d\theta\,(\text{sen}\,\theta.\cos\varphi\,\hat{x} + \text{sen}\,\theta.\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})$$

$$\vec{F} = \oint\!\!\oint_S \overleftrightarrow{T}.\,d\vec{S}$$ Sólo me interesa la componente en $\hat{z}$ de la fuerza

$$\vec{F}.\hat{z} = \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\left(E_zE_x\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + E_zE_y\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + \frac{E_z^2-E_x^2-E_y^2}{2}\cos\theta\right) a^2.\text{sen}\,\theta\ d\varphi.d\theta$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(9E_0^2\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi + 9E_0^2\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi + \left(\frac{9E_0^2\cos^4\theta - 9E_0^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi - 9E_0^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi}{2}\right)\right.$$

$\cdot\cos\theta$

$$\left[9E_0^2\cos^3\theta\,\text{sen}^2\theta + \left(\frac{9E_0^2\cos^4\theta - 9E_0^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{2}\right)\cos\theta\right]$$

$$\left[\text{sen}^2\theta.\,9E_0^2\cos^3\theta + \frac{9E_0^2\cos^3\theta}{2}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)\right]$$

$$F_{\hat{z}} = \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\left[9E_0^2\cos^3\theta\left(\cancel{\text{sen}^2\theta} + \frac{1}{2} - \cancel{\text{sen}^2\theta}\right)\right]a^2\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{9E_0^2a^2}{8\pi}\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{2\pi}\cos^3\theta.\,\text{sen}\,\theta.\,d\varphi.d\theta = \frac{9E_0^2a^2}{8\pi}.2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta.\,\text{sen}\,\theta.d\theta$$

$u=\cos\theta$

$du = -\text{sen}\,\theta.d\theta$

$$\int_1^0 u^3.du = \int_0^1 u^3.du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$F_{\hat{z}} = \frac{9E_0^2a^2\cancel{2\pi}}{\cancel{8\pi}_4}.\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{F_{\hat{z}} = \frac{9E_0^2a^2}{16}}$$

Fuerza que tiende a separar los dos hemisferios ▲

(b)

Si la esfera tiene carga Q la única variante es que se añade un término al potencial conservándose la simetría.
Razonablemente podemos pensar en que partimos de la situación (a) con las cargas en equilibrio (las libres) y al añadirle una carga Q se distribuye de modo uniforme:

$$\phi(r,\theta) = -E_0 \, r \cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2}\cos\theta + \frac{Q}{r}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = -\vec{\nabla}\phi(r,\theta) = \left(E_0 \cos\theta + 2 E_0 \frac{a^3}{r^3}\cos\theta + \frac{Q}{r^2}\right)\hat{r}$$

$$\frac{1}{r}\left(-E_0 \, r \operatorname{sen}\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{E}(r=a,\theta) = \left(3E_0 \cos\theta + \frac{Q}{a^2}\right)\hat{r}$$

$$\vec{E}(r=a,\theta) = \underbrace{\left(3E_0 \cos\theta + \frac{Q}{a^2}\right)}_{\equiv E'}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \, \hat{x} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z}\right)$$

Nuevamente, como en el punto (a), me interesa una sola componente de la fuerza (en $\hat{z}$) por lo tanto, reusando lo ya calculado:

$$\vec{F}\cdot\hat{z} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\left(E_z E_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + E_z E_y \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \cos\theta \cdot \frac{E_z^2 - E_x^2 - E_y^2}{2}\right) a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\vec{F}\cdot\hat{z} = \left(E'^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi \cos\theta + E'^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta + \frac{\cos\theta \, E'^2}{2}\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi\right)\right.$$

$$\vec{F}\cdot\hat{z} = \int\int \frac{1}{4\pi}\left[E'^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta + \frac{E'^2\cos\theta}{2}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\right)\right] a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int\int \frac{E'^2 \cos\theta}{4\pi}\left(\cancel{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{2} - \cancel{\operatorname{sen}^2\theta}\right) a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\frac{1}{8\pi} a^2 \int\int E'^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\vec{F}\cdot\hat{z} = \frac{a^2}{8\pi}\left[\int\int 3^2 E_0^2 \cos^2\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{Q}{a^2}\right)^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta \right.$$

Esta es la integral del punto (a)

$$\left. + \int\int 6 E_0 \cos\theta \cos\theta \operatorname{sen}\theta \frac{Q}{a^2} \, d\varphi \, d\theta \right]$$

$$\frac{2\pi Q^2}{a^4}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\int_0^1 u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1$$

$$= \frac{a^2}{8\pi}\left(9E_0^2 \frac{1}{\cancel{4}_2} 2\pi + 6E_0 \frac{Q}{a^2} \frac{1}{\cancel{3}_1} 2\pi + \frac{Q^2\pi}{a^4}\right)$$

$$-\int_1^0 u \, du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\vec{F}\cdot\hat{z} = \frac{9E_0^2 a^2}{16} + \frac{E_0 Q}{2} + \frac{Q^2}{8a^2}}$$

◄ Fuerza que tiende a separar los dos hemisferios

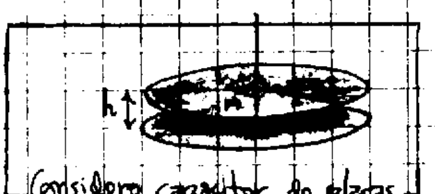
13.

Como despreciamos efectos de borde estaremos considerando la aproximación de placas infinitas.
Como se carga lentamente consideramos $\omega \sim 0$ (aproximación cuasiestacionaria)

Entre placas $\begin{cases} \vec{B}^{(0)} = 0 & \vec{E}^{(0)} = \dfrac{V_0}{h} e^{i\omega t} \hat{z} \\ \vec{B}^{(1)} = \dfrac{V_0}{2hc} i\omega e^{i\omega t} r \hat{\varphi} & \vec{E}^{(1)} = 0 \end{cases}$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \rightarrow \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{V_0}{h}\cos(\omega t)\hat{z} \times -\frac{V_0}{2hc}\omega \,\text{sen}(\omega t)\, r\hat{\varphi}\right]$$

$$\vec{S} = \frac{\cancel{c}}{4\pi}\frac{V_0^2}{h^2}\frac{1}{2\cancel{c}}\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)\,\omega r\,\hat{r}$$



Considero capacitor de placas circulares

$$\phi_{\vec{S}} = \int_{\text{lat.}} \vec{S}\cdot d\vec{S} \rightarrow \phi_{\vec{S}} = \frac{V_0^2}{\cancel{8\pi} h^{\cancel{2}}}\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)\,\omega\, a\, \cancel{h}\, \cancel{2\pi} a$$

sup. lateral

$$\boxed{\phi_{\vec{S}} = \frac{V_0^2}{4h}\,\omega\, a^2 \cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_0^2}{h^2}\cos^2(\omega t) + \frac{V_0^2}{4h^2c^2}\omega^2\,\text{sen}^2(\omega t)\, r^2\right)$$

$$U = \int_V u\, dV \rightarrow U = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h}\frac{V_0^2}{8\pi h^2}\left[\cos^2\omega t + \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\,\text{sen}^2(\omega t)\right] r\, dz\, dr\, d\varphi$$

$$U = \frac{V_0^2}{\cancel{8\pi} h^{\cancel{2}}}\cancel{h}\,\cancel{2\pi}\left(\cos^2(\omega t)\frac{a^2}{2} + \frac{\omega^2}{4c^2}\,\text{sen}^2(\omega t)\frac{a^3}{3}\right)$$

$$U = \frac{V_0^2}{4h}\left[\frac{a^2}{2}\cos^2(\omega t) + \underbrace{\frac{\omega^2 a^3}{12c^2}\,\text{sen}^2(\omega t)}_{\sim 0}\right]$$ pues $\omega \sim 0$ y $\frac{1}{c^2} \sim 0$

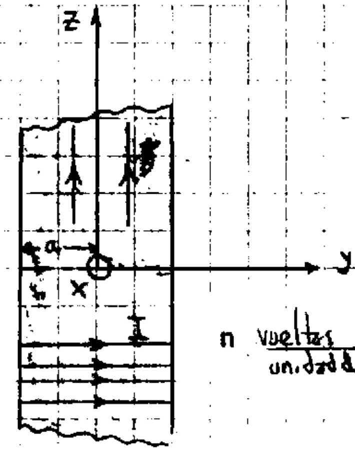
$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{V_0^2}{4\pi}\frac{a^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)\,\omega$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{V_0^2}{4\pi}a^2\,\omega\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\phi_{\vec{S}}$$

14.

Vamos a utilizar la aproximación de solenoide infinito



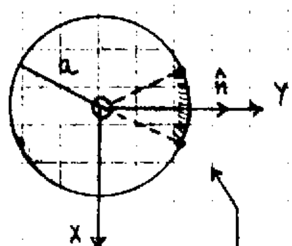
$n \; \frac{\text{vueltas}}{\text{unidad de L}}$

$\vec{B} = 0 \quad r > a$

$\vec{B} = \frac{4\pi}{c} n I \hat{z} \quad r < a$

$P = \frac{dF}{dS}$

Presión de radiación



Por simplicidad tomamos un elemento diferencial en la dirección $\hat{y}$

$$T_{ij} = \left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B\right)\frac{1}{4\pi}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -\frac{B_z^2}{2} & & 0 \\ & -\frac{B_z^2}{2} & \\ 0 & & \frac{B_z^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$d\vec{S} = dS\,\hat{y}$$

$$d\vec{S} = a . d\varphi . dz\,\hat{y}$$

$$\hat{y}.d\vec{F} = \hat{y}.\overleftrightarrow{T}.d\vec{S} = -\frac{B_z^2}{8\pi}.a.d\varphi.dz$$

$$\hat{y}.dF = \frac{-1}{8\pi}\,\frac{4^2\pi^2}{c^2}\,n^2 I^2 . dS$$

No me importa el signo (solo para saber que es en $-\hat{y}$ [hacia adentro]

$$\boxed{\frac{dF}{dS} = \frac{2\pi}{c^2} n^2 I^2}$$

* Supongamos ahora que $I = I_0 . \text{sen}(\omega t)$

Utilizaremos resultados del ejercicio ②, donde ya hemos calculado el cuasiestacionario para un solenoide infinito.

$$\vec{B}^{(0)} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} n I_0 \,\text{sen}(\omega t)\hat{z} & (r<a) \\ 0 & (r>a) \end{cases} \qquad \vec{B}^{(1)} = 0$$

se cambia el signo por ley de Lenz

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega\, r . \cos(\omega t)\hat{\varphi} & (r<a) \\ -\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega \frac{a^2}{r} . \cos(\omega t)\hat{\varphi} & (r>a) \end{cases}$$

$$\vec{E}^{(0)} = 0$$

densidad de energía

$$\mu = \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right) \rightarrow \mu_{solenoide} = \frac{1}{8\pi}\left(E^{(1)^2} + B^{(0)^2}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\underbrace{\frac{2\pi}{c^2} n I_0 \omega . r \cos(\omega t)}_{\sim 0}\right)^2 + \left(\frac{4\pi}{c} I_0 n \,.\, \text{sen}(\omega t)\right)^2\right]$$

$$\mu \cong \frac{1}{8\pi}\,\frac{16\pi^2}{c^2} I_0^2 n^2 \,\text{sen}^2(\omega t)$$

$$\frac{U}{L} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \mu \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{2\pi}{c^2} I^2 n^2 \,\text{sen}^2(\omega t)\, r \, d\varphi \, dr$$

$$\frac{U}{L} = 2\frac{\pi^2}{c^2} I^2 n^2 a^2 \,\text{sen}^2(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{L}\right) = \frac{2\pi^2}{c^2} I^2 n^2 a^2 . 2\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) . \omega$$

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}\left(\vec E \times \vec B\right) \rightarrow \vec S_{solenoide} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec E^{(1)} \times \vec B^{(0)}\right]$$

$$\vec S = \frac{-c}{4\pi} . \frac{2\pi}{c^2} n I \omega r \cos(\omega t) . \frac{4\pi}{c} n I \,\text{sen}(\omega t)\, \hat r$$

$$\vec S = -\frac{2\pi}{c^2} n^2 I^2 \omega . r . \text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$\text{flujo}\{\vec S\}_{lat} = \iint \vec S . d\vec S = -\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{+L} \frac{2\pi}{c^2} n^2 I^2 \omega r \,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) . \underbrace{a . d\varphi . dz}_{S}$$

$\vec S(r=a)$. Superficie lat $\hat r$

$$\text{flujo}\{\vec S\}_{lat} = -\frac{2\pi}{c^2} n^2 I^2 \omega a \,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) . a . 2\pi . L$$

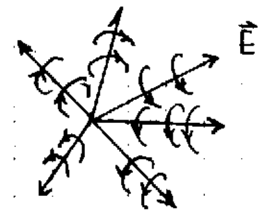
$$\frac{\phi_{\vec S\, lat}}{L} = -\frac{2\pi^2}{c^2} I^2 n^2 a^2\, 2\,\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t) . \omega$$

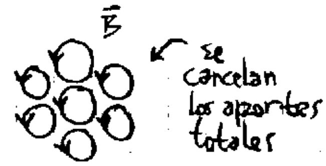
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{U}{L}\right) = -\phi_{\vec S}\left(\frac{sup.\,lat}{L}\right)}$$

Preguntas

1. Para el caso dinámico valen los mismos argumentos de simetría que en el caso estático siempre y cuando la variación en el tiempo no traiga aparejada variaciones en las fuentes de los campos.
Para los casos de $\begin{cases} \vec{B}, \vec{E}, \vec{J} \\ \vec{H}, \vec{D}, \vec{J} \end{cases}$ (Fuentes de campos $\vec{H}, \vec{D}$) significa que su dirección no puede sufrir alteración en el tiempo por el mero paso del tiempo.

3.
$$\vec{E}^{(0)} = E^{(0)}\,\hat{r} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [1]$$





$$\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(1)}\right)_{\hat{r}} = 0 = \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{(1)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t}$$

Rotor de $\vec{B}^{(1)}$ nulo (debido a que $\vec{B}^{(1)}$ es nulo) no significa $\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t} = 0$ pues la ecuación completa es [1] (ahí falla el razonamiento)

$\Rightarrow$ debe haber una corriente en $\hat{r}$ que verifica

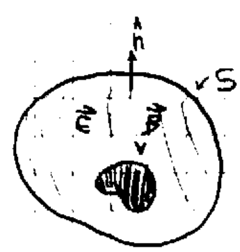
$$4\pi\,\vec{J}^{(1)} = -\frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial t}$$

Esta dificultad surgió en el problema 6

4. $\vec{E}^{(1)}$ tiene componentes que van como $\ln r$ en el exterior pero esto no es "antifísico" sino simplemente producto de haber considerado el solenoide infinito en su longitud.
Luego, como hay sources de campo en el infinito, el campo diverge en el infinito.
Obviamente No es correcto concluir que el campo diverge en el infinito porque No existen solenoides infinitos.

6.
$$\vec{F} = \int_V \left(\rho\,\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}\right) dV \qquad \vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{S}$$

Usando la fuerza de Lorentz debemos parametrizar la distribución y evaluar los campos en dicha parametrización $\Rightarrow$ la integral puede ser difícil.
Dependerá de cómo resulten $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el interior de V.



Usando el tensor de Maxwell debemos calcular el flujo de dicho tensor en una superficie que contenga al volumen V.
Según la forma de $\vec{E}, \vec{B}$ pueden existir superficies S donde sea fácil expresarlos y por ende el flujo pueda calcularse.

7. Si la distribución es finita ⇒ la podemos meter en el interior de una superficie S y puede evaluarse:

$$\vec{F} = \oiint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S}$$

Lo que hay que asegurar para que valga es que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi c}\int_V \vec{E} \times \vec{H} \cdot dV\right) = 0$$

(que no haya variación temporal de $\int \frac{\vec{S}}{c^2} dV$ puesto que de haberla debe restarse del flujo del tensor). Esto puede garantizarse viendo que los campos no dependen del tiempo o tomando un volumen de integración V apropiado.

8. Hay que tomar el campo eléctrico/magnético apuntando en uno de los ejes de coordenadas.
En ese caso tendremos un tensor diagonal.
Sabiendo esto convendrá elegir la superficie de integración de modo que en la mayor parte sea nulo $\vec{E} \cdot d\vec{S}$