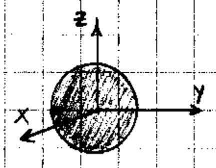
GUÍA 4

I. Problemas

1. (a)



distribución de cargas esféricamente simétrica

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$$

No depende de los ángulos $\rightarrow$

$$q_{\ell m} = \int Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\,\rho(r')\,r'^{\ell}\,d^3x'$$

$$q_{\ell m} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\cdot\frac{(-1)^m}{2^\ell\,\ell!}\,[1-\cos^2\theta']^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{\ell+m}}{d\cos^{\ell+m}\theta'}(\cos^2\theta'-1)^\ell\cdot\rho(r')\cdot r'^{\ell}$$

$$r'^2\cdot \mathrm{sen}\,\theta'\cdot dr'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$q_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,\frac{(-1)^m}{2^\ell\,\ell!}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{r_0}\mathrm{sen}^m\theta'\cdot\frac{d^{\ell+m}}{d\cos\theta'^{\,\ell+m}}(\mathrm{sen}^{2\ell}\theta')\cdot\rho(r')\cdot r'^{\ell}$$

$$r'^2\cdot\mathrm{sen}\,\theta'\cdot dr'\cdot d\theta'$$

El problema es la integral en θ pues queda

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell\,dx$$

sea m fijo $\rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si} \quad f(x) \text{ es impar}$$

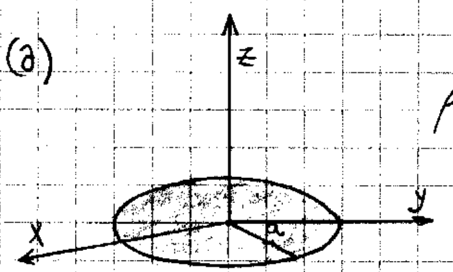
$X = \cos\theta$

$dx = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,d\theta$

$f(-x) = -f(x)$

2.

(a)



$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \sigma(r)\,\delta(z)$$

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sigma(r)\, r\, dr\, d\varphi$$

monopolo no nulo $\boxed{q = 2\pi \int_0^{a} \sigma(r)\, r\, dr}$

* dipolo

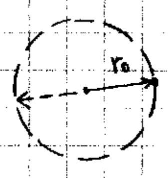
$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{x}'\, \rho(\vec{x}')\, d^3x' \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \iint [r'\cos\varphi'\,\hat{x} + r'\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,\hat{y}]\,\sigma(x,y)\, dx\, dy$$

$$\vec{p} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r'\cos\varphi'\,\sigma(r')\, r'\, dr'\, d\varphi'\,\hat{x} + \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r'\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,\sigma(r')\, r'\, dr'\, d\varphi'\,\hat{y}$$

pero $\rightarrow \int_0^{2\pi} \cos\varphi'\, d\varphi' = 0$ pero $\rightarrow \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\varphi'\, d\varphi' = 0$

dipolo $\boxed{\vec{p} = 0}$

Que el dipolo es nulo puede verse intuitivamente porque no hay desbalance de carga respecto del origen del disco.



A un r_0 cualquiera un diferencial de carga dq ubicado en (φ_0, r_0) tiene un diferencial de carga dq ubicado en el punto $(\varphi_0 + \pi, r_0)$ y al ser de igual signo no produce desbalance.

* Cuadripolo

$$Q_{ij} = \int (3x_i'x_j' - \delta_{ij} r^2)\,\rho(\vec{x}')\, d^3x'$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{xz} = 0 \\ Q_{yz} = 0 \end{array}\right\} \text{ pues } z' = 0 \text{ y } \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} Q_{zx} = 0 \\ Q_{zy} = 0 \end{array}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$Q_{xx} = \iint [3x'^2 - (x'^2 + y'^2)]\,\sigma(x', y')\, dx'\, dy'$$

$$= \iint (3r'^2\cos^2\varphi' - r'^2)\,\sigma(r)\, r'\, dr'\, d\varphi'$$

$$3\sigma \iint \cos^2\varphi'\, r'^3\, dr\, d\varphi - \sigma \iint r^3\, dr\, d\varphi = \frac{3\sigma}{4} a^4 \pi - \frac{\sigma a^4}{4} 2\pi = \frac{a^4 \sigma \pi}{4}$$

$$Q_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 3r'^2 \cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,\sigma(r)\, r'\, dr'\, d\varphi'$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\varphi'\, d\varphi'$$

$$-\int_1^1 u\, du = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

supongo σ constante

$$Q_{zz} = -\int (x'^2 + y'^2)\,\sigma(x', y')\, dx'\, dy' = -\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r'^3\,\sigma(r')\, dr'\, d\varphi' = -\frac{a^4}{\cancel{4}_{2}}\,\sigma\,\cancel{2}\pi$$

$$\boxed{Q_{zz} = -\frac{a^4 \cdot \sigma \cdot \pi}{2}} \qquad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

$$Q_{zz} = -\frac{a^2}{2} \cdot q$$

Como hay eje de simetría de revolución en $\hat{z}$ $\Rightarrow$ cualesquiera $\hat{x}, \hat{y}$ $\perp$ a $\hat{z}$ y entre sí darán $Q_{xx} = Q_{yy}$

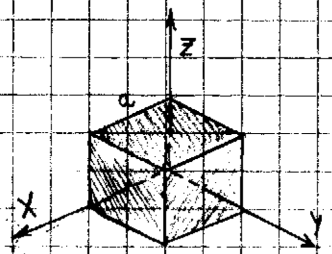
$$Q_{xx} + Q_{yy} = -Q_{zz}$$

$$2 Q_{xx} = a^4 \sigma \pi$$

$$\boxed{Q_{xx} = a^4 \frac{\sigma \pi}{4}} \quad y \quad \boxed{Q_{yy} = a^4 \frac{\sigma \pi}{4}}$$

Los ejes principales son los ilustrados

(b)



ρ constante

$$q = \int \rho \, dV = \rho \cdot a^3$$

monopolo $\boxed{q = a^3 \rho}$

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{x}' \rho(\vec{x}') \, dV' \rightarrow \vec{p} = \int_V (x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}) \rho \, dx' dy' dz'$$

$$p_x = \int\int\int_{-a/2}^{+a/2} x' \, dx' \, dy' \, dz = a^2 \int_{-a/2}^{+a/2} x' \, dx' = 0 \quad \text{ídem } p_y, p_z \Rightarrow$$

dipolo $\boxed{\vec{p} = 0}$

$$Q_{xx} = \int_{V'} (3x^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint (2x^2 - y^2 - z^2) \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$= \rho a^2 \, 2 \, \frac{1}{3} \, \frac{2a^3}{8} - \rho a^2 \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} 2 - \rho a^2 \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} 2 = \left(\frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{12} - \frac{a^5}{12}\right) \rho = 0$$

No tiene un desbalance de cargas a lo largo de los ejes: es totalmente simétrico desde el punto de vista que lo que ocurre en un eje ocurre en otro cualquiera

$$Q_{yy} = \iiint (2y^2 - x^2 - z^2) \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$= 2 \rho a^2 \frac{1}{3} \frac{a^3 2}{8} - \rho \frac{1}{3} a^2 \frac{a^3 2}{8} - \rho a^2 \frac{1}{3} 2 \frac{a^3}{8} = \rho \left(\frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{12} - \frac{a^5}{12}\right) = 0$$

$$Q_{xy} = \iiint x \cdot y \cdot \rho \cdot dx \, dy \, dz = a \rho \int y \, dy \int_{-a/2}^{+a/2} x \, dx = 0$$

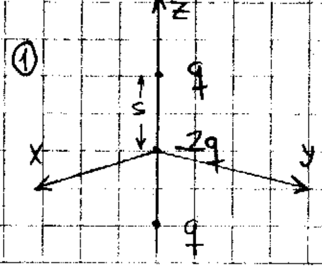
$Q_{yx} = 0$; $Q_{xz} = Q_{zx} = 0$

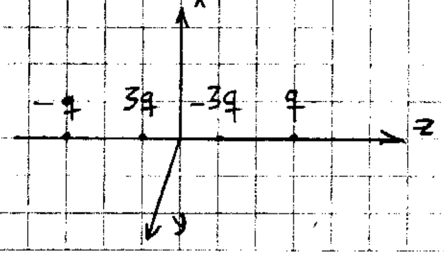
$Q_{yz} = Q_{zy} = 0$

cuadripolo $\boxed{\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{0}}$

Sus ejes principales son los ilustrados

(c)





① monopolo $\boxed{q=0}$ No tiene carga neta

dipolo $\vec{p} = (s.q - s.q)\hat{z} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}=0}$ no hay desbalance de carga

cuadrupolo $\hat{z}$ es eje de simetría de revolución $\Rightarrow$ $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ de la figura son ejes principales

$$Q_{zz} = (3s^2 - s^2).q + (3s^2 - s^2)q = \boxed{4s^2 q}$$

$$Q_{xx} = -s^2 q + -s^2 q = -2s^2 q$$

$$Q_{zz} = -2Q_{xx} = -2Q_{yy}$$

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -2s^2q & 0 & 0 \\ 0 & -2s^2q & 0 \\ 0 & 0 & 4s^2q \end{pmatrix}$$

② monopolo $q = -q + 3q - 3q + q = \boxed{0}$ No tiene carga neta

dipolo $\vec{p} = +q.\frac{3}{2}s\hat{z} + 3q\left(-\frac{s}{2}\right)\hat{z} - 3q\frac{s}{2}\hat{z} + q.\frac{3}{2}s\hat{z}$

$$\vec{p} = 3qs\hat{z} - 3qs\hat{z} = \boxed{0}$$ No hay desbalance de carga

cuadrupolo $\hat{z}$ es eje de simetría de revolución $\Rightarrow$ $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ así elegidos son ejes principales

$$Q_{xx} = +\left(\frac{3s}{2}\right)^2 q - \left(\frac{s}{2}\right)^2 3q + \left(\frac{s}{2}\right)^2 3q - \left(\frac{3s}{2}\right)^2 q = 0$$

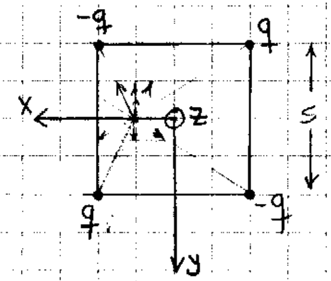
Para Q_{yy} es el mismo cálculo $\rightarrow$ $Q_{yy} = 0$

$$Q_{zz} = 2\left(\frac{3s}{2}\right)^2(-q) + 2\left(\frac{s}{2}\right)^2 3q + 2\left(\frac{s}{2}\right)^2(-3q) + 2\left(\frac{3s}{2}\right)^2 q = 0$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{Q} = 0}$$

El cuadrupolar es nulo porque no hay desbalance respecto del origen en $\hat{z}$. La carga en $z>0$ es igual pero de signo contrario a la de $z<0$

(d)



Respecto de un punto no en el origen hay un desbalance

$\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$

monopolo $\boxed{q=0}$ No hay carga neta

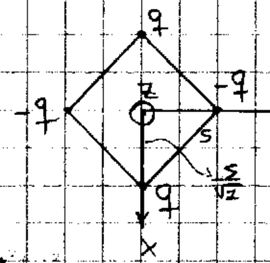
$$\vec{p} = q\left(\frac{s}{2}\hat{x} + \frac{s}{2}\hat{y}\right) + q\left(-\frac{s}{2}\hat{x} - \frac{s}{2}\hat{y}\right) - q\left(-\frac{s}{2}\hat{x} + \frac{s}{2}\hat{y}\right) + -q\left(\frac{s}{2}\hat{x} + -\frac{s}{2}\hat{y}\right)$$

$\boxed{\vec{p} = 0}$ no hay desbalance respecto al origen

Hay un plano de reflexión en zx, zy

$$Q_{zz} = -\frac{s^2}{2}q - \frac{s^2}{2}(-q) - \frac{s^2}{2}(q) - \frac{s^2}{2}(-q) = 0$$

Como $\vec{p}=0$ puedo cambiar el origen para el cálculo del cuadripolo



$s^2 = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2$

Se puede ver que los términos cuadripolares no serán nulos porque hay carga en los ejes

$$Q_{xx} = \left[3\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\right]q - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2(-q)$$

$$\left[3\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\right]q - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2(-q) =$$

$$= \cancel{2}\frac{s^2}{\cancel{2}}q + \cancel{2}\frac{s^2}{\cancel{2}}q + \frac{s^2}{2}q + \frac{s^2}{2}q = 3s^2q$$

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 3s^2q & 0 & 0 \\ 0 & -3s^2q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

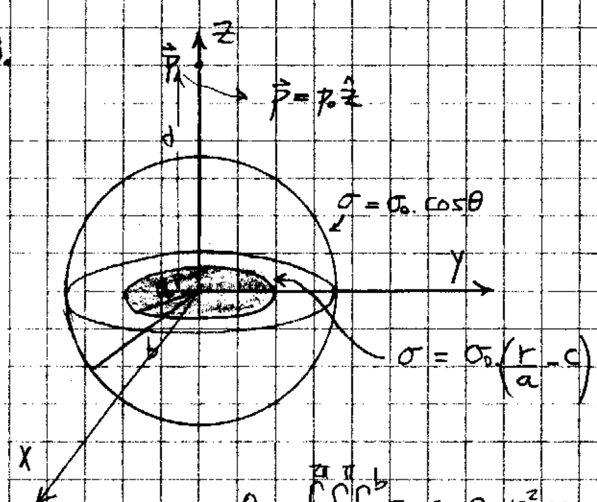
$\boxed{Q_{xx} = 3s^2q} \rightarrow \boxed{Q_{yy} = -3s^2q}$

$$Q_{xy} = -\frac{s^2}{2}q - \frac{s^2}{2}(-q) - \frac{s^2}{2}q - \frac{s^2}{2}(-q) = 0$$

$Q_{yx} = 0$

Q_{xz}, Q_{yz} tienen la misma forma

3.



* En primer lugar requerimos monopolo nulo:

$$q = Q_{esfera} + Q_{disco} + Q_{dipolo} =$$

$$q = 0 + \sigma_0 2\pi a^2\left[\frac{1}{3} - \frac{c}{2}\right] + 0$$

$$q = 0 \iff \frac{1}{3} = \frac{c}{2} \rightarrow \boxed{c = \frac{2}{3}}$$

$$Q_{esf.} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{b} \sigma_0 \cos\theta \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, \delta(r-b)\, dr\, d\theta\, d\varphi = \sigma_0 b^2 2\pi \int_0^{\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

sustitución $\operatorname{sen}\theta = u$, $\cos\theta\, d\theta = du$ $\quad \int_0^0 u\, du = 0$

$$Q_{disco} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sigma_0\left(\frac{r}{a} - c\right) r\, \delta(z)\, dr\, d\theta\, dz$$

$$Q_{disco} = \sigma_0 2\pi\left[-c\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\cancel{a}}\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{3}\right] = \sigma_0 2\pi\left(\frac{a^2}{3} - c\frac{a^2}{2}\right)$$

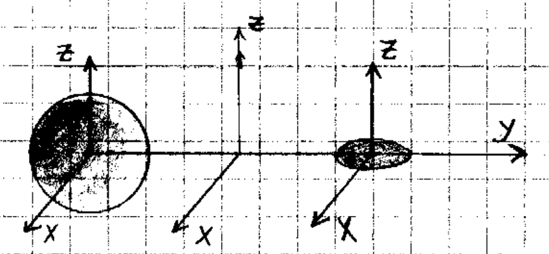
$$Q^{neta}_{dipolo} = 0$$

El momento dipolar de toda la distribución no depende del origen de coordenadas, pero el de cada parte podría depender

* Ahora buscaremos dipolar nulo.

$$\vec{p} = \int_V \vec{x}' \rho(\vec{x}')\, dv'$$

Podemos superponer los momentos dipolares de c/u de las tres distribuciones para calcular el total.



La esfera tiene monopolo nulo $Q_{esfera} = 0$ → puede evaluar el momento dipolar desde donde quiera

$$\vec{p} = \iiint \vec{x}' \cdot \sigma_0 \cos\theta \cdot \delta(r-b)\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\vec{p} = \iiint r^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi \cos\theta \, \delta(r-b)\, \sigma_0 \, dr \, d\theta \, d\varphi \, \hat{x} \quad \to 0 \text{ pues } \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi$$

$$+ \iiint r^3 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \, \delta(r-b) \, \sigma_0 \, dr \, d\theta \, d\varphi \, \hat{y} \quad \to 0 \text{ pues } \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$+ \iiint r^3 \cos^2\theta \, \sigma_0 \, \delta(r-b) \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \, \hat{z}$$

$$\vec{p} = \sigma_0 b^3 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\sigma_0 b^3 2\pi \int_1^{-1} u^2 \, du = \sigma_0 b^3 \frac{2\pi}{3} \cdot 2 \, \hat{z}$$

$\cos\theta = u$

$-\operatorname{sen}\theta \, d\theta = du$

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi b^3 \sigma_0 \, \hat{z}$$

El disco (con c definido como lo hicimos) tiene carga neta nula. El disco tiene simetría de revolución, pues la σ es función del r únicamente, ⇒ $\vec{p} = p\,\hat{z}$

$$\vec{p} = \iiint \vec{x}' \cdot \sigma_0 \left(\frac{r}{a} - \frac{2}{3}\right) \delta(z) \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$\vec{p} = \iiint z\,\hat{z} \cdot \sigma_0 \left(\frac{r}{a} - \frac{2}{3}\right) r \, \delta(z) \, dr \, d\varphi \, dz = 0 \quad \text{pues la } \delta \text{ de Dirac la mata}$$

El dipolo tiene $\vec{p} = p_0 \hat{z}$ → si $\boxed{p_0 = -\frac{4}{3}\pi b^3 \sigma_0}$ estamos en lo pedido

* <u>Cálculo del momento cuadripolar</u> y dipolo

Tanto disco como esfera tienen simetría de revolución en φ ⇒ los ejes principales son los ilustrados, con ellos el tensor sale diagonalizado, además vale que cualesquiera ejes $\hat{x}, \hat{y}$ ⊥ a $\hat{z}$ y ⊥ entre sí son principales ⇒

$Q_{xx} = Q_{yy}$ ⇒ $Q_{xx} = -\frac{Q_{zz}}{2} = Q_{yy}$

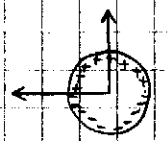
$$Q_{ij} = \int_{V'} (3 x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2) \, \rho \, dV'$$

$$Q_{zz}^{esfera} = \iiint (3r^2\cos^2\theta - r^2) \cdot \sigma_0 \cos\theta \, \delta(r-b) \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q_{zz} = \iint (3b^2\cos^2\theta - b^2) \, \sigma_0 \cos\theta \, b^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q_{zz} = \iint 3b^4 \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \, \sigma_0 \, d\theta \, d\varphi + \iint -b^4 \sigma_0 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Intuición



Podemos ver que en la dirección de los ejes no hay carga neta $\Rightarrow$ debe ser $Q_{zz} = Q_{yy} = Q_{xx} = 0$

$$Q_{zz} = 3b^4\sigma_0 2\pi \int_0^\pi \cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta - b^4\sigma_0 2\pi \int_0^\pi \cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$\cos\theta = u$
$\text{sen}\,\theta\,d\theta = du$

$$-\underbrace{\int_1^{-1} u^3\,du}_{=0} \qquad \underbrace{\int_1^{-1} u\,du}_{=0}$$

$$Q_{zz}^{esfera} = 0 \rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} = 0$$

No aporta al momento cuadripolar de la distribución

$$Q_{zz}^{disco} = \iiint (3z^2 - r^2)\,\sigma_0\left(\frac{r}{a} - \frac{z}{3}\right) r\,\delta(z)\,dr\,d\varphi\,dz$$

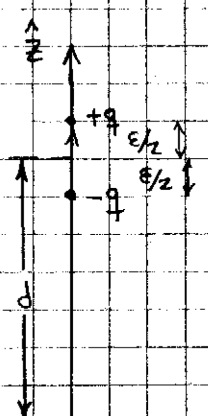
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a -r^3\sigma_0\left(\frac{r}{a} - \frac{z}{3}\right) dr\,d\varphi$$

$$= -\sigma_0 2\pi\left[\int_0^a \frac{r^4}{a}\,dr - \int_0^a \frac{z}{3} r^3\,dr\right]$$

$$Q_{zz} = -\sigma_0 2\pi\left[\frac{1}{\cancel{a}\cdot 5} a^{\cancel{5}\,4} - \frac{z}{3}\frac{a^4}{5}\right]$$

$$Q_{zz} = -\sigma_0 a^4 \frac{2\pi}{30} = -\sigma_0\frac{a^4\pi}{15}$$

$$Q_{yy} = Q_{xx} = \sigma_0\frac{a^4\pi}{30}$$



$$p_0\hat{z} = q\cdot\varepsilon\,\hat{z} \quad \text{con} \begin{cases}\varepsilon\to 0\\ q\to\infty\end{cases} \quad q\cdot\varepsilon \to p_0$$

$$Q_{ij} = \sum_{\ell}^{2}\left(3x_i^\ell x_j^\ell - \delta_{ij} r_\ell^2\right) q_\ell$$

$$Q_{zz}^{dipolo} = \left[3\left(d - \varepsilon/2\right)^2 - \left(d - \varepsilon/2\right)^2\right](-q) +$$

$$\left[3\left(d + \varepsilon/2\right)^2 - \left(d + \varepsilon/2\right)^2\right](q)$$

$$Q_{zz} = 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} - d\cancel{2}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right)(-q) + 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + d\cancel{2}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right)(q)$$

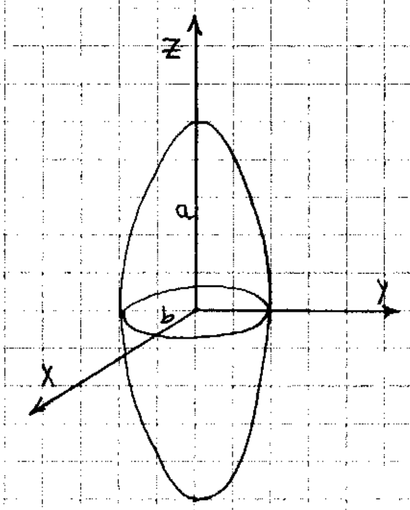
$$Q_{zz} = \cancel{-2d^2q} \cancel{-\frac{\varepsilon^2 q}{2}} + 2d\varepsilon q + \cancel{2d^2q} + \cancel{\frac{\varepsilon^2 q}{2}} + 2d\varepsilon q$$

$$Q_{zz} = 4d\varepsilon q \qquad \lim_{\varepsilon q \to p_0} 4d\varepsilon q = 4dp_0$$

$$Q_{zz} = 4dp_0 - \sigma_0\frac{a^4\pi}{15} = 4d\frac{4}{3}\pi b^3\sigma_0 - \sigma_0 a^4\frac{\pi}{15} = \boxed{-\sigma_0\pi\left[\frac{a^4}{15} + \frac{16}{3}db^3\right] = Q_{zz}}$$

5.

(a)



$\rho(\vec{r}) = \rho_0$ en el elipsoide

$Q = Z.e \qquad \rho = \dfrac{Z.e}{\frac{4}{3}\pi a b^2}$

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ elipsoide en el origen

$$Q_{ij} = \int_{V'} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2).\rho\, dV'$$

$$Q_{xx} = \int_V [3x^2 - (x^2+y^2+z^2)]\rho . dx.dy.dz$$

$u^2+v^2+w^2=1$

$x = u.b$
$y = v.b$
$z = w.a$

$dx = b.du$

$$Q_{xx} = \int_V [3\,u^2 b^2 - (u^2b^2 + v^2b^2 + w^2a^2)]\rho\, \underline{du.dv.dw}\, ab^2$$

$$Q_{xx} = \rho . a b^2 \int\int\int (2u^2b^2 - v^2b^2 - w^2a^2).\, du.dv.dw$$

$$Q_{xx} = \rho.a.b^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \mathrm{sen}\,\theta.\,(2\cos^2\theta.\cos^2\varphi.b^2 - \mathrm{sen}^2\theta.\,\mathrm{sen}^2\varphi\, b^2 - \cos^2\theta\, a^2)\, d\theta.d\varphi$$

$$Q_{xx} = \rho.a.b^2 \Big[\int\int 2\cos^2\theta.\cos^2\varphi\, b^2 \mathrm{sen}\,\theta - \int\int \mathrm{sen}^3\theta.\,\mathrm{sen}^2\varphi\, b^2 - \int\int \mathrm{sen}\,\theta\, \cos^2\theta\, a^2 \Big]$$

$$- b^2\pi \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3\theta . d\theta \quad + 2\pi a^2 \int_1^{-1} u^2 . du \Big]$$

$$Q_{xx} = \rho.a.b^2 \Big[2\pi b^2 . \frac{4}{3} \qquad - b^2\pi.\frac{4}{3} \quad - \frac{4}{3}\pi a^2 \Big]$$

$$Q_{xx} = \rho a b^2 \left(\frac{4}{3}\pi b^2 - \frac{4}{3}\pi a^2\right) = \boxed{\frac{4}{3}\rho.a.b^2(b-a)(b+a)}$$

simetría de revolución en $\hat{z}$ $\rightarrow$

$Q_{zz} = -Q_{xx} - Q_{yy}$
$Q_{zz} = -2Q_{xx}$

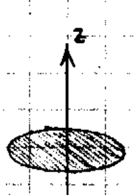
$$Q_{yy} = \frac{4}{3}\rho\, a b^2 (b-a)(b+a)$$

$$Q_{zz} = -\frac{8}{3}\rho a b^2 (b-a).(b+a)$$

$$Q_{zz} = -\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{3}}\frac{Z e\, \cancel{ab^2}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\pi \cancel{ab^2}}(b-a)(b+a)$$

$$\boxed{Q_{zz} = -\frac{2Ze}{\pi}(b-a)(b+a)}$$

(b)



$b > a \rightarrow Q_{zz} < 0$

Como Q_{zz} es negativo la concentración de carga tiene estructura de OVNI

(c) $R = \left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$Q_{zz} = -\frac{2}{\pi} Ze\,(b-a)\,2R$$

$$Q_{zz} = \frac{4R^2Ze}{\pi}\left(\frac{a-b}{R}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{Q_{zz}}{e}\right)\cdot\frac{1}{Z}\cdot\frac{\pi}{4}\frac{1}{R^2} = \left(\frac{a-b}{R}\right)} \approx \boxed{0{,}063}$$

Esto es una medida del achatamiento del núcleo

(d)

$$\vec{F} = q.\vec{E} = q.-\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}(\phi.q) = -\vec{\nabla}U$$

La "interacción"

$$\vec{F} = \int_V \rho.\vec{E}\,dV \Rightarrow \underset{\text{de interacción}}{\text{energía}} \rightarrow U = \int_{V'} \rho(\vec{x}')\,\phi(\vec{x}).\,dV'$$

si $\phi(\vec{x}')$ no varía mucho en V' puede representarse con una serie:

$$\phi(\vec{x}') = \phi(0) + \vec{x}'.\vec{\nabla}\phi\Big|_0 + \frac{1}{2}\vec{x}'^{\,t}\,H(\phi)\,\vec{x}'$$

el hessiano de $\phi(\vec{x}')$

$$\phi(x_i) = \phi(0) + x_i.\partial_i\phi + \frac{1}{2}x_ix_j\partial_i\partial_j\phi$$

$$U = \phi(0)\int_V \rho(\vec{x}')\,dV' - \int_{V'}\rho(\vec{x}').\vec{x}.\vec{E}(0).\,dV + \frac{1}{2}\int\rho(\vec{x})\,x_ix_j\,\partial_i\partial_j\phi$$

$$U = \phi(0).q - \vec{p}.\vec{E}(0) - \int\left(\frac{1}{6}\right).\left[3x_ix_j - |\vec{x}|^2.\delta_{ij}\right]\partial_iE_j.\rho.dV$$

* Parte cuadrupolar

$$-\frac{1}{6}\sum_i^3 Q_{ii}\,\partial_iE_j$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{ij}^3 Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{1}{6}\left[Q_{xx}.\frac{\partial E_x}{\partial x} + Q_{yy}.\frac{\partial E_y}{\partial y} + Q_{zz}.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{2}Q_{zz}.\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{1}{2}Q_{zz}\frac{\partial E_y}{\partial y} + Q_{zz}.\frac{\partial E_z}{\partial z}\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}^{=1}\right]$$

$$-\partial_j\phi = E_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_ix_j\partial_i\partial_j\phi = -x_ix_j\partial_iE_j$$

$$= -x_ix_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i} \Rightarrow \underbrace{-x_ix_j\sum_{ij}\delta_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}}_{-x_ix_j\,\vec{\nabla}.\vec{E}} = 0$$

lejos de las fuentes

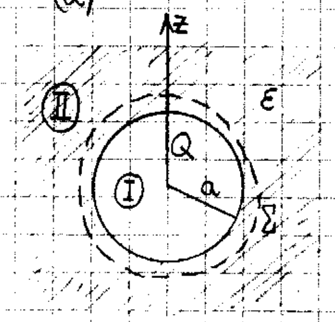
le multiplico por 3 y divido en 3, sumo $|\vec{x}|^2\delta_{ij}$ que agrega cero

$$-\frac{1}{2\,3}\left[3x_ix_j - |\vec{x}|^2\delta_{ij}\right]\frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}Q_{zz}.\vec{\nabla}.\vec{E} + \frac{3}{2}Q_{zz}.\partial_zE_z\right) \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{4}Q_{zz}\partial_zE_z = U}$$

inter. cuadrupolo y campo

6. (a)



Tiene simetría azimutal (en $\hat{z}$) y esférica

Como es una esfera conductora la Q se ubica en la superficie con una σ uniforme dada la simetría esférica total.

fuentes de $\vec{D}$ $\quad \sigma_L$ $\qquad \vec{D} = D\hat{r}$

fuentes de $\vec{E}$ $\quad \sigma_p$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\int_{\Sigma} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi\, q_{neta} = 4\pi Q$$

$$D_2\, \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi} Q$$

$$D_2 = \frac{Q}{r^2} = \varepsilon . E \rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon . r^2} = \frac{\sigma . 4\pi a^2}{\varepsilon . r^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{II} & \vec{D} = \frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon . r^2}\hat{r} \\ \text{I} & \vec{D} = \vec{E} = 0 \end{array}}$$

La esfera generará una σ_p en el dieléctrico

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n} = 4\pi\sigma_L$$

$$D^2_{\hat{r}} - D^1_{\hat{r}} = 4\pi\sigma_L$$

$$\varepsilon E_{2\hat{r}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{E_{1\hat{r}}}} = 4\pi\sigma_L$$

$$\varepsilon E_2 = 4\pi\sigma_L$$

$$E_2 = \frac{4\pi\sigma_L}{\varepsilon}$$

$$\frac{Q}{\cancel{\varepsilon}. a^2} = \frac{4\pi\sigma_L}{\cancel{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\frac{Q}{4\pi a^2} = \sigma_L}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \chi$$

$$\vec{P} = \chi\vec{E} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\right).\vec{E}$$

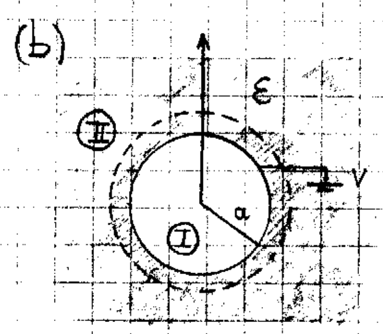
$$\boxed{\vec{P} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\right).\frac{Q}{\varepsilon . r^2}\hat{r} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

$$\sigma_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\hat{n}$$

$$\sigma_p = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\hat{r}$$

$$\boxed{\sigma_p = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}}$$

(b)



El dato ahora es que el potencial en el contorno vale V fijo $\Rightarrow$ la σ_L se acomodará para dar ese V.

$$\int_{\Sigma} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi\, Q_L^{NETA}$$

la carga que envía la batería para que $\phi(r=a) = V$

$$\varepsilon . E . \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi}\, Q_L^{neta}$$

$$\varepsilon\left(\frac{-\partial\phi}{\partial r}\right) r^2 = Q_L^n$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{Q_L^n}{\varepsilon . r^2}$$

$$\phi = -\int \frac{Q_L^n}{\varepsilon . r^2}\, dr = \frac{Q_L^n}{\varepsilon . r}$$

uso la constante del ϕ como 0 $\quad \phi(r\to\infty) = 0$

$$\phi\big|_{r=a} = \frac{Q_L^n}{\varepsilon . a}$$

$$V = \frac{Q_L^n}{\varepsilon . a} \rightarrow \boxed{Q_L^n = V . \varepsilon . a}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{II} & \vec{D} = \frac{V . \varepsilon . a}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{E} = \frac{V . a}{r^2}\hat{r} \\ \text{I} & \vec{D} = \vec{E} = 0 \end{array}}$$

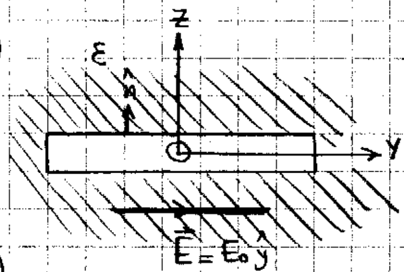
$$\boxed{\vec{P} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\right)\frac{V . a}{r^2}\hat{r}}$$

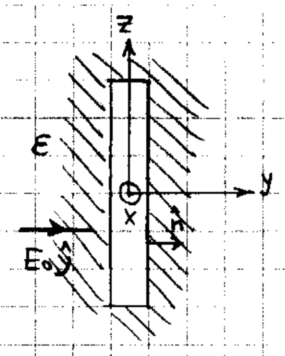
$$\boxed{\sigma_L = \frac{V . \varepsilon}{4\pi a}}$$

$$\boxed{\sigma_p = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\right)\frac{V}{a}}$$

El kid de la cuestión es que cambia la Q enviada por la batería para llevar al conductor a ser un equipotencial con V.
En este caso depende linealmente de ε con lo cual varía la forma funcional de los campos. En el primer caso la Q era fija; por eso no intervenía ε en el V.

8.
(a)





i)

$$E_{\hat{t}}^{diele.} = E_{\hat{t}}^{cav.}$$

$$\boxed{\vec{E}_{cav.} = E_0\hat{y}}$$

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi}E_0\hat{y} \qquad \sigma_p = -\vec{P}\cdot\hat{n}$$

$$\boxed{\sigma_p = 0}$$

ii)

$\sigma_L = 0$ en la cavidad y en el dieléctrico

$$D_{\hat{n}}^{diel} = D_{\hat{n}}^{cav.}$$

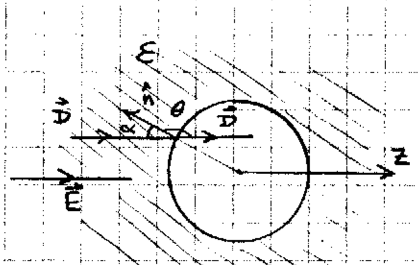
$$\varepsilon E_0 = E$$

$$\boxed{\vec{E} = \varepsilon E_0\hat{y}}$$

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi}E_0\hat{y}$$

$$\boxed{\sigma_p = -\left(\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)E_0}$$

(b)



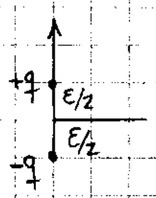
tiene simetría de revolución en $\hat{z}$

$$D_{\hat{n}}^{diel} = D_{\hat{n}}^{cav}$$

$$\varepsilon E_0 \cos\theta = E$$

II. Preguntas Conceptuales

1. (a)



$$Q_{zz} = \left(3\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)q + \left(3\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)(-q)$$

$$Q_{zz} = 0$$

$\boxed{\text{Es nulo si se halla en el origen}}$

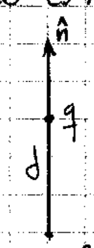
Si no está en el origen hay que calcularlo, si está a una distancia d del origen en $\hat{z}$ es

$$Q_{zz} = 4 d p_0 \qquad \text{donde} \quad p_0 = q.\varepsilon$$

(b) $\vec{p}(\text{carga puntual}) = 0$ si está en el origen

$\vec{p} = \vec{x}'\, q$ si no está en el origen

El cuadrupolo es nulo si se halla en el origen, pero si está desplazada hay que hacer el cálculo:

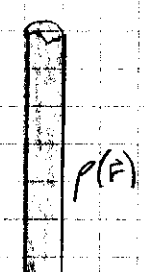


$$Q_{zz} = (3d^2 - d^2)q = 2d^2 q$$

(c) Dependen de donde se halle situada la carga o el dipolo.
La idea es que si se sitúan de modo de dar carga nula en un eje $\Rightarrow$ cuadrupolo en ese eje es nulo

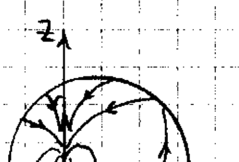
Si se sitúa de modo de que la carga no tiene desbalance
$\Rightarrow$ el dipolo es nulo

2.



(a) No será nulo el $\begin{cases} \text{monopolo} \\ \text{dipolo} \\ \text{cuadrupolo} \end{cases}$

en general porque la densidad arbitraria rompe la simetría.
Además al ser una distribución infinita no vale el desarrollo para el potencial.



(b) La carga total será nula por estar a tierra la esfera
En este caso el $\vec{p}$ no depende del origen de coordenadas; con lo cual podría mostrar que al ser nulo en el origen es nulo en general.

Luego el cuadripolo puede calcularse con el dipolo centrado y dado que en ese caso la σ inducida tiene simetría azimutal $\Rightarrow$ no depende de φ y dará cuadrupolo nulo pues a lo largo de los ejes principales la carga neta es nula

3.

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

si $\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\mu} + 4\pi\vec{M}$$

$$\vec{B}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 4\pi\vec{M}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{4\pi\mu}{\mu - 1}\right)\vec{M}$$

No está bien porque en un imán permanente $\vec{M} \neq \chi_m \vec{H}$ y $\Rightarrow$ $\vec{B} \neq \mu\vec{H}$ con lo cual no hay relación lineal entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$.