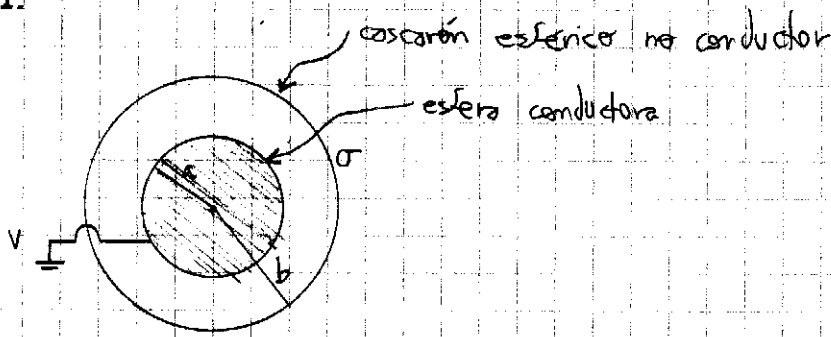


GUÍA 2

I. Problemas

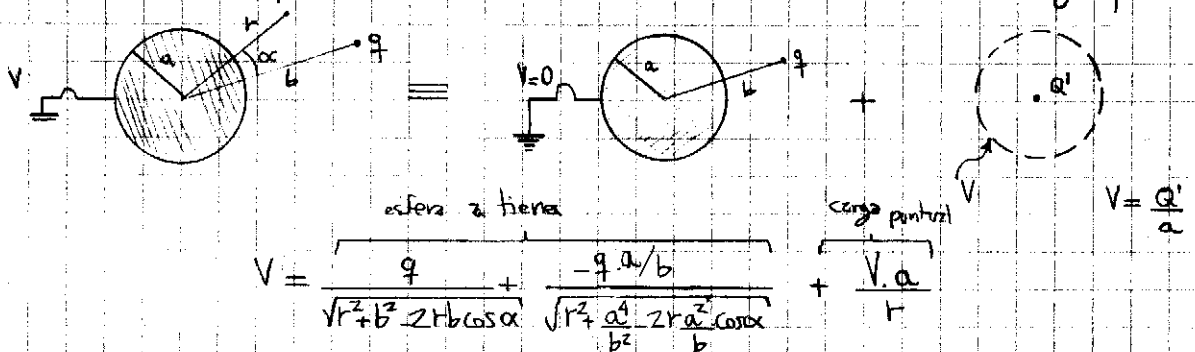
1.



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2}$$

sigma es uniforme

a. Partimos del problema de una esfera conductora a V con una carga q externa



$$V = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \alpha}} + \frac{-q \cdot a/b}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{b^2} - 2ra \frac{a}{b} \cos \alpha}} + \frac{V \cdot a}{r}$$

Ahora habría que superponer muchas cargas situadas a radio b de tal manera de generar una corteza esférica discreta de cargas q y una corteza imagen de cargas q' .

$$V = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \alpha_i)^{1/2}} - \frac{q \cdot a/b}{(r^2 + \frac{a^2}{b^2} - 2ra \frac{a}{b} \cos \alpha_i)^{1/2}} \right) + \frac{V \cdot a}{r}$$

Si $N \rightarrow \infty$ podemos hacer la $\Sigma \rightarrow \iint$ y como $\cos \alpha_i = f(\theta, \varphi)$ será

$$V(r, \theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\sin \theta' \cdot b^2 \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{[r^2 + b^2 - 2r \cdot b \cdot f(\theta, \varphi)]^{1/2}} - \frac{\sin \theta' \cdot (a/b)^2 \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{[r^2 + \frac{a^2}{b^2} - 2ra \frac{a}{b} \cdot f(\theta, \varphi)]^{1/2}} \right\} + \frac{V \cdot a}{r}$$

donde $f(\theta, \theta', \varphi, \varphi') = [(\sin \theta \cdot \sin \theta') [\cos(\varphi - \varphi')] + \cos \theta \cdot \cos \theta']$

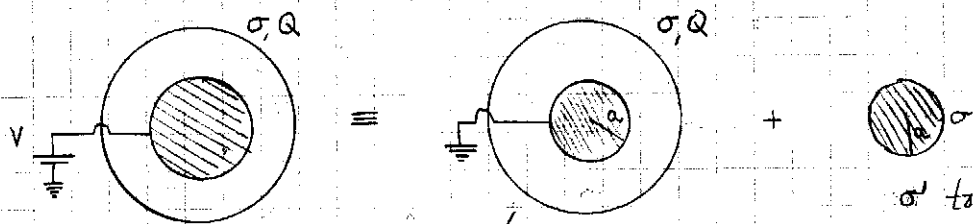
con θ, φ ángulos del punto P

θ', φ' ángulos de la recta radial que contiene a bq y q' (imagen)
(se integra sobre ellos)

En la primera integral se integra sobre la corteza externa de radio b (estos son las coordenadas primadas) y en la segunda sobre la corteza interna imagen de radio (a^2/b) (estos serán las coordenadas primadas aquí).

* CÁLCULO DE CARGA

A la hora de hacer el cálculo usaremos superposición de casos ya resueltos.



Ya lo he resuelto

σ' tal que $V(r=a) = V(\text{dato})$

$$V = \frac{4\pi a^2 \sigma'}{4\pi a}$$

$$\sigma' = \frac{V}{4\pi a}$$

$$\begin{aligned} r < a & V = 0 \\ a < r < b & V = 4\pi\sigma b - 4\pi\sigma ab \\ r > b & V = \frac{4\pi}{r}(b^2\sigma - ab\sigma') \end{aligned}$$

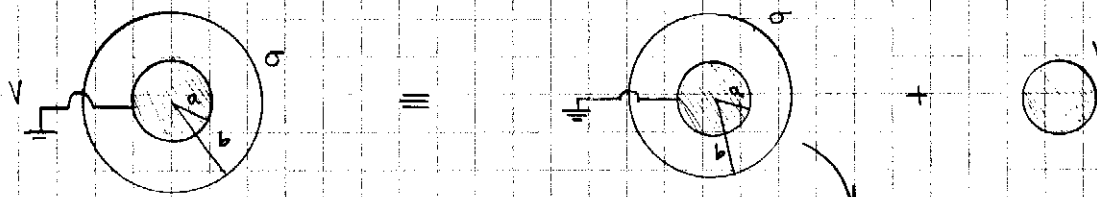
$$\begin{aligned} r < a & V = V(\text{dato}) \\ r > a & V = \frac{4\pi a^2 \sigma'}{r} = \frac{V a}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r < a & V(r) = V \\ a < r < b & V(r) = 4\pi\sigma b - 4\pi\sigma ab + \frac{V a}{r} + C_1 \\ r > b & V(r) = \frac{4\pi}{r}(b^2\sigma - ab\sigma) + \frac{V a}{r} + C_2 \end{aligned} \quad \begin{cases} V(a) = 4\pi\sigma b - 4\pi\sigma a + V \\ V(b) = 4\pi b\sigma - 4\pi\sigma a + \frac{V a}{b} \\ V(b) = 4\pi b\sigma - 4\pi a\sigma + \frac{V a}{b} \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} V & r < a \\ \frac{4\pi\sigma b}{r}(r-a) + \frac{V a}{r} & a < r < b \\ \frac{4\pi\sigma b}{r}(b-a) + \frac{V a}{r} & r > b \end{cases}$$

b.

2. a. Se utiliza el método de Green



Conozco el ϕ sobre la superficie cerrada

$$V(r=a) = 0$$

$$V(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$\phi|_s = 0$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho \cdot G \cdot dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_s \cdot \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

$$G_s = \frac{1}{|\vec{r}-b\hat{r}|} + \frac{a/b}{|\vec{r}-\frac{a^2}{b}\hat{r}|}$$

carga puntual una imagen

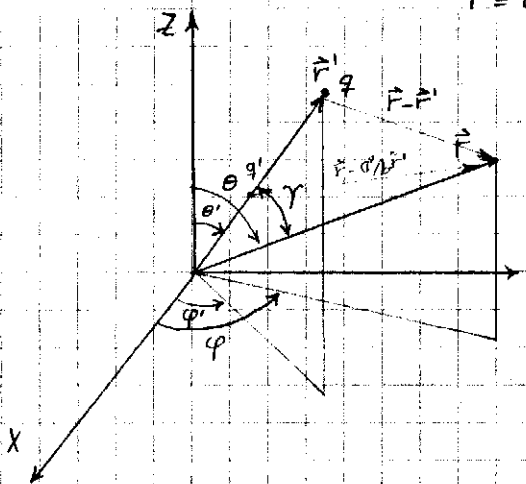
$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(r-b)$$

$$Q = \int_0^{2a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma \delta(r-b) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= 2\sigma b^2 2\pi = 4\pi\sigma b^2$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \sigma \delta(r-b) \cdot G_b \cdot dV$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} \sigma \delta(r'-b) \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{a/b}{|\vec{r}-\frac{a^2}{b}\hat{r}'|} \right) dV'$$



Green puede leerse como:

$$\left(\frac{1}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos\gamma)^{1/2}} + \frac{a}{b} \frac{1}{(r^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2ra^2 \cos\gamma)^{1/2}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos\gamma)^{1/2}} - \frac{a}{b} \frac{1}{(\frac{b^2 r^2}{a^2} + a^2 - 2rb \cos\gamma)^{1/2}} \right)$$

$$\phi_{vol}(\vec{r}) = \int_V \sigma \delta(r-b) \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{a}{b} \frac{1}{|\frac{a^2}{b}\hat{r}'-\vec{r}'|} \right) dV'$$

separamos b: integral

$$\left| \vec{r} - \frac{a^2}{b}\hat{r}' \right| = \left| \vec{r} - \frac{a^2}{b^2}\hat{r}' \right| = \left| \frac{a^2}{b^2}\hat{r}' - \vec{r} \right| = \left| \frac{a^2}{b^2}\hat{r}' - \vec{r}' \right|$$

$\vec{r}' = b\hat{r}'$ cuando
 propiedad del valor absoluto
 por simetría
 $G_b(\vec{r}, \vec{r}') = G_{\frac{a^2}{b}}(\vec{r}', \vec{r})$

$$\phi_{vol}(\vec{r}) = \int_{V'} \sigma \delta(r'-b) \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \int_0^{2a} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma \delta(r'-b) \cdot \frac{1}{(r'^2 + b^2 - 2r'b \cos\gamma)^{1/2}} r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$\phi_{vol.1} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma \cdot b^2 \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi')^{3/2}}$$

$$\phi_{vol.1} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma \cdot b^2 \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{[r^2 + b^2 - 2rb (\sin \theta \cdot \sin \theta' (\cos[\varphi - \varphi']) + \cos \theta \cdot \cos \theta')]^{3/2}}$$

Podemos tomar para $\vec{r} = r\hat{z}$ pues hay simetría radial; entonces:

$$\sin \theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1$$

$$\phi_{vol.1} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma \cdot b^2 \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta')^{3/2}} = \frac{\sigma b^2 \cdot 2\pi}{2rb} \int_0^{\pi} \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi \sigma b}{r} \cdot u^{1/2} \Big|_{r^2+b^2-2rb}^{r^2+b^2+2rb} = \frac{2\pi \sigma b}{r} (\sqrt{r^2+b^2+2rb} - \sqrt{r^2+b^2-2rb}) =$$

$$\phi_{vol.1} = \frac{2\pi \sigma b}{r} (|r+b| - |r-b|) \Rightarrow \phi_{vol.1} = \begin{cases} \frac{2\pi \sigma b}{r} (r+b - |r-b|) = 4\pi \sigma b & r < b \\ \frac{2\pi \sigma b}{r} (r+b - r+b) = 4\pi \sigma \frac{b^2}{r} & r > b \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{sen} = -\text{cos} \\ \int_0^{\pi} = -[(-1) - (1)] = 2 \end{cases}$

$$\phi_{vol.2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\sigma b^2 \cdot \sin \theta' \cdot d\theta' \cdot d\varphi'}{(b^2 + a^2 - 2rb \cos \theta')^{3/2}} = -\frac{\sigma b^2 \cdot 2\pi}{2rb} \int_0^{\pi} \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{\sigma b 2\pi}{r} (\sqrt{\frac{b^2+a^2+2rb}{a^2}} - \sqrt{\frac{b^2+a^2-2rb}{a^2}})$$

$\frac{b^2+a^2-2rb \cos \theta' = u}{2rb \sin \theta' \cdot d\theta' = du}$

Ambar integrados son el potencial de una corteza cargada con σ y radio b y el de una corteza con $-\sigma$ y radio $(a, b) \Rightarrow$

$$\phi_{vol} = \begin{cases} a < r < b & \phi = 4\pi \sigma b - \frac{4\pi \sigma a \cdot b}{r} \\ r > b & \phi = 4\pi \sigma \frac{b^2}{r} - \frac{4\pi \sigma a \cdot b}{r} \end{cases}$$

$\frac{-q/b}{|r - a/b|} = \frac{a/b}{|r - a/b|}$

$\frac{-2\sigma b a}{r} (|\frac{br+a}{a}| - |\frac{br-a}{a}|)$

$(a < r < b) \rightarrow \frac{2\sigma b a}{r} = -4\pi \sigma a b$

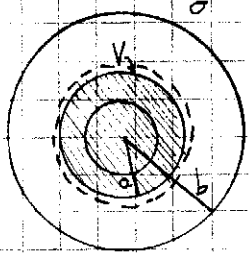
Si la esfera estuviese a V en lugar de a tierra \downarrow

$$\phi_{sup} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi |s| \cdot \frac{2\sigma}{2r'} \cdot dS' = -\frac{V}{4\pi} \oint_S \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') 4\pi$$

$$\oint_S \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}^2 \phi \cdot dV = \int_V 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot dV$$

$$\phi_{sup} = \frac{V \cdot a}{r}$$



$r \rightarrow \infty$

teorema de Gauss para Green

es la carga neta de la función ϕ

(la correspondiente a la integral)

es una carga sin unidades (adimensional)

$\frac{br}{a} > \frac{br-a}{a}$

$\frac{br}{a} > \frac{b^2}{a} > a$

\Rightarrow es igual

$(r > b)$

$= -\frac{4\pi \sigma a \cdot b}{r}$

b. El método de Green emplea una función:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

que cumple: $\nabla^2 G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$, $\nabla^2 F = 0$

y donde F refleja el potencial (unitario) de las imágenes necesarias para determinar la solución del problema con los contornos y tierra.

Los diferentes valores del potencial en esos contornos serán tenidos en cuenta por la integral:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n'} dS$$

Luego la función de Green refiere a una dada "geometría" de problema y por esa razón es bastante general.

El método de imágenes permite, en casos sencillos, hallar la función de Green para una dada geometría.

c. Para el problema del punto a se tenía:

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \sigma \delta(r'-b) \frac{r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma)^{3/2}}$$

potencial de una corteza con σ y radio b

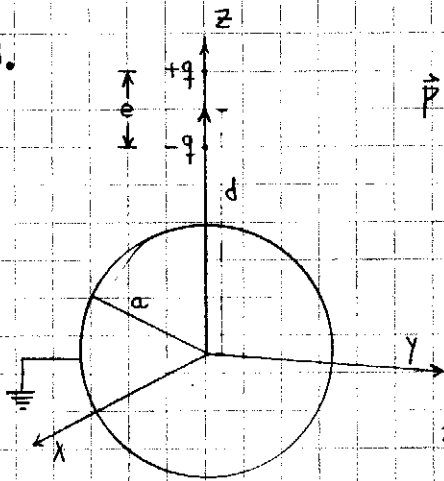
$$- \iiint_V \frac{\sigma \delta(r'-b) r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{(r^2 + r'^2/a^2 + a^2 - 2rr' \cos\gamma)^{3/2}}$$

↑ Potencial de una corteza con $-\sigma$ y radio $\sqrt{a \cdot b}$ (imagen)

$$- \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_S \frac{\partial G}{\partial n'} dS$$

↑ potencial de una carga puntual que en $r=a$ es V

3.



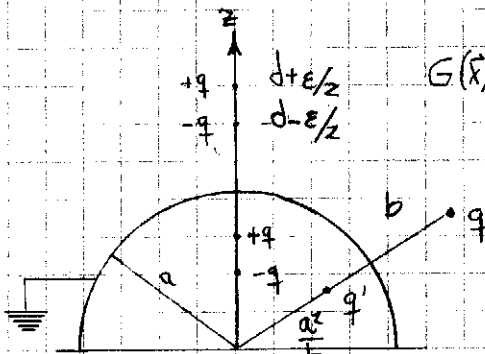
$$\vec{p} = p_0 \hat{z} = q \cdot e$$

donde $\begin{cases} q \rightarrow +\infty \\ e \rightarrow 0 \end{cases}$ con $q \cdot e \rightarrow p$

Green para una esfera de radio a

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{-a}{r' |\vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|}$$

representa a todas las imágenes



$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) - q \delta(\vec{r} - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho \cdot G \cdot dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi \cdot \frac{\partial G}{\partial n'} \cdot dS$$

$$q' = -\frac{q}{b}$$

$$d' = \frac{a^2}{b}$$

$$\frac{a^2}{b} < a$$

$$a > b$$

$$= \int_V \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [q \delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) - q \delta(\vec{r}' - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})] \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{r' |\vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|} \right) r'^2 \sin \theta' \cdot dr' \cdot d\theta' \cdot d\phi'$$

$$= \int_V q [\delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) - \delta(\vec{r}' - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})] \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' - \int_V q [\delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) - \delta(\vec{r}' - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})] \cdot \frac{1}{\frac{r'}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|} \cdot dV'$$

* integral ①

$$= \int_V \frac{q \delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_V \frac{q \delta(\vec{r}' - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{-q}{|\vec{r} - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}|} - \frac{q}{|\vec{r} - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}|}$$

$$= \frac{q}{\sqrt{r^2 + (d + \frac{\epsilon}{2})^2 - 2r(d + \frac{\epsilon}{2}) \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + (d - \frac{\epsilon}{2})^2 - 2r(d - \frac{\epsilon}{2}) \cos \theta}}$$

$$\delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z}) =$$

$$\frac{\delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\theta - \theta')}{r'^2 \sin \theta'}$$

$$\frac{\delta(0) \delta(0) \delta(\theta - \theta')}{r'^2 \sin \theta'} \cdot r'^2 \sin \theta' \cdot dr' \cdot d\theta' \cdot d\phi'$$

$$\frac{1}{r'^2 \sin \theta'}$$

* integral ②

$$= - \int_V \frac{q [\delta(\vec{r}' - (d + \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})] \cdot dV'}{\frac{r'}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|} + \int_V \frac{q [\delta(\vec{r}' - (d - \frac{\epsilon}{2}) \hat{z})] \cdot dV'}{\frac{r'}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|}$$

$$= \frac{-q}{\frac{(d + \frac{\epsilon}{2})}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{(d + \frac{\epsilon}{2})} \hat{z}|} + \frac{q}{\frac{(d - \frac{\epsilon}{2})}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{(d - \frac{\epsilon}{2})} \hat{z}|}$$

$$= \frac{+q \cdot \frac{a}{(d+\epsilon/2)}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{(d+\epsilon/2)^2} - 2r \frac{a^2}{(d+\epsilon/2)} \cos \theta}} + \frac{q \cdot \frac{a}{(d-\epsilon/2)}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{(d-\epsilon/2)^2} - 2r \frac{a^2}{(d-\epsilon/2)} \cos \theta}}$$

$$= \frac{-q}{\sqrt{\left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 \frac{r^2}{a^2} + a^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta}} + \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{d-\epsilon}{2}\right)^2 \frac{r^2}{a^2} + a^2 - 2r \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right) \cos \theta}}$$

Como $\phi(r=a) = 0$, por ser esfera a tierra, $\Rightarrow \phi_s = 0 \Rightarrow$

$$\phi(\vec{r}) = \text{integral (1)} + \text{integral (2)} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \phi_1 + \phi_2$$

* Ahora habría que hacer un Taylor en términos de ϵ para los denominadores

$$\left(r^2 + \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{-1/2} = \left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{-1/2} + \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\left(r^2 + \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{1/2}}\right)\right) \Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon$$

$$= \frac{1}{\left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{Z} \frac{(d - r \cos \theta)}{\left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{3/2}} \cdot \epsilon$$

$$\left(r^2 + \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{\left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{1/2}} + \frac{1}{Z} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\left(r^2 + \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{1/2}}\right)\right]}{\left(r^2 + \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d-\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{1/2}} \Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon$$

$$= \frac{1}{\left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{Z} \frac{(-d + r \cos \theta)}{\left(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta\right)^{3/2}} \cdot \epsilon$$

$$\phi_1(\vec{r}) = q \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \hat{\beta}|} - \frac{1}{Z} \frac{(d - r \cos \theta)}{|\vec{r} - \hat{\beta}|^3} \right) \cdot \epsilon - q \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \hat{\beta}|} - \frac{1}{Z} \frac{(r \cos \theta - d)}{|\vec{r} - \hat{\beta}|^3} \right) \cdot \epsilon$$

$$\left(\frac{r^2}{a^2} \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 + a^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} d^2 + a^2 - 2rd \cos \theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{Z} \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 + a^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{1/2}}\right)}{\left(\frac{r^2}{a^2} \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right)^2 + a^2 - 2r \left(\frac{d+\epsilon}{2}\right) \cos \theta\right)^{1/2}} \Big|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} d^2 + a^2 - 2rd \cos \theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{Z} \frac{\left(\frac{r^2}{a^2} d - r \cos \theta\right)}{\left(\frac{r^2}{a^2} d^2 + a^2 - 2rd \cos \theta\right)^{3/2}} \cdot \epsilon$$

$$\phi_2(\vec{r}) = -q \cdot \left(\frac{1}{\frac{d}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}|} - \frac{1}{Z} \frac{[d(r^2/a^2) - r \cos \theta]}{\frac{d^3}{a^3} \left|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}\right|^3} \right) \cdot \epsilon$$

$$+ q \cdot \left(\frac{1}{\frac{d}{a} |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}|} - \frac{1}{Z} \frac{[r \cos \theta - d(r^2/a^2)]}{\frac{d^3}{a^3} \left|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}\right|^3} \right) \cdot \epsilon$$

$$\phi(\vec{r}) = -q \cdot \frac{(d - r \cos \theta)}{|\vec{r} - \hat{\beta}|^3} \cdot \epsilon - q \cdot \frac{(r \cos \theta - d(r^2/a^2))}{\frac{d^3}{a^3} \left|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}\right|^3} \cdot \epsilon$$

$$\phi(\vec{r}) = q \cdot \epsilon \left[\frac{r \cos \theta}{|\vec{r} - \hat{\beta}|^3} - \frac{d}{|\vec{r} - \hat{\beta}|^3} - \frac{r \cos \theta}{\frac{d^3}{a^3} \left|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}\right|^3} + \frac{d(r^2/a^2)}{\frac{d^3}{a^3} \left|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \hat{\beta}\right|^3} \right]$$

$$\phi(\vec{r}) = q \cdot \epsilon \left[\frac{(r \cos \theta - d)}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} - \frac{(r a^3 \cos \theta / d^3)}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} + \frac{r^2 a / d^2}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} \right]$$

$$\frac{a^2}{d} \vec{d} = \frac{a^2}{d^2} \vec{d} \Rightarrow q \in \mathbb{Z} \rightarrow p \Rightarrow$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{p \cdot (r \cos \theta - d)}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} - \frac{p \cdot (r a^3 \cos \theta)}{d^3 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} + \frac{p \cdot r^2 a}{d^2 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3}$$

Però com $\vec{p} = p \hat{z}$, $\vec{d} = d \hat{z}$

$$\frac{p \cdot r \cos \theta - p \cdot d}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} - \frac{p \cdot r a^3 \cos \theta}{d^3 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} + \frac{p \cdot r \cdot r a}{d^2 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r} - \vec{p} \cdot \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + \frac{p \cdot a}{d^2} \left(\frac{-r a^2 \cos \theta + r^2}{d} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} +$$

$$+ \frac{p \cdot a}{d^2} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} \left(\frac{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^2 + r a^2 \cos \theta}{d} - \left(\frac{a^2}{d} \right)^2 \right)$$

$$+ \frac{p \cdot a}{d^2} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} + \frac{p \cdot a}{d^3} \frac{[a^2 \vec{r} \cdot \hat{z} - (a^4/d) \hat{z}]}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3}$$

En forma vectorial
més elegant

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{d})}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + \frac{p \cdot a}{d^2} \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3} + \frac{\vec{p} \cdot a \cdot a^2 (\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d})}{d^3 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

= 0 \rightarrow com era de esperar per simetria

$$\vec{E} \hat{r} = - \left(\frac{p \cos \theta |\vec{r} - \vec{d}|^3 - p (r \cos \theta - d) 3 |\vec{r} - \vec{d}|^2 (r - z \cos \theta \cdot d)}{|\vec{r} - \vec{d}|^6} \right)$$

$$\frac{(-p a^3 \cos \theta + 3 p r a d) d^3 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^3 - (-p a^3 \cos \theta + p r a^2 d) 3 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^2 (r - 2 \frac{a^2}{d} \cos \theta \cdot d)}{d^6 |\vec{r} - \frac{a^2}{d} \vec{d}|^6}$$

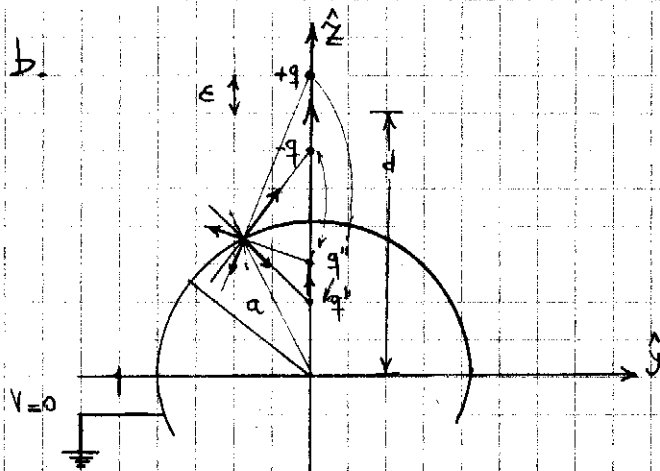
$$|\vec{r} - \vec{d}| = \sqrt{r^2 + d^2 - 2 r d \cos \theta}$$

$$\text{en } r=a \rightarrow (a^2 + d^2 - 2 a d \cos \theta)^{1/2}$$

$$E_r|_{r=a} = - \frac{p \cdot \cos \theta}{(a^2 + d^2 - 2 a d \cos \theta)^{3/2}} + \frac{p (a \cos \theta - d) \cdot 3 \cdot 2 (a - \cos \theta \cdot d)}{(a^2 + d^2 - 2 a d \cos \theta)^2}$$

$$+ \frac{(p a^3 \cos \theta - 3 p a^2 d)}{d^3 (a^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2 \frac{a^3}{d} \cos \theta)^{3/2}} + \frac{(-p a^4 \cos \theta + p a^3 d) \cdot 3 \cdot 2 \cdot (a - \frac{a^2}{d} \cos \theta)}{d^3 (a^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2 \frac{a^3}{d} \cos \theta)^2}$$

b.



observación: el dipolo imagen resulta con la misma orientación

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - (d+\epsilon)\hat{z}|} - \frac{q}{|\vec{r} - (d-\epsilon)\hat{z}|} + \frac{-q \cdot \frac{a}{(d+\epsilon)}}{|\vec{r} - \frac{a^2}{(d+\epsilon)}\hat{z}|} + \frac{q \cdot \frac{a}{(d-\epsilon)}}{|\vec{r} - \frac{a^2}{(d-\epsilon)}\hat{z}|}$$

$$\phi(\vec{r}) = q \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - (d+\epsilon)\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} - (d-\epsilon)\hat{z}|} - \frac{1}{\frac{(d+\epsilon)}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{(d+\epsilon)}\hat{z} \right|} + \frac{1}{\frac{(d-\epsilon)}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{(d-\epsilon)}\hat{z} \right|} \right)$$

Apartir de aquí si hacemos el desarrollo de Taylor a primer orden de ϵ se llega al resultado anterior. Obviamente coinciden.

c.

$$4\pi\sigma = E_n \quad (\text{a la salida de un conductor})$$

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{r=a}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{r=a}$$

Usamos el resultado de la parte a.

el signo (-) es el del ϕ que ya se puso

$$\sigma = +\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-P \cdot \cos\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} + \frac{6P(a\cos\theta - d)(a - \cos\theta \cdot d)}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^2} + \frac{P \cdot a^2 (a \cdot \cos\theta - Zd)}{d^3 \left(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{2a^3 \cdot \cos\theta}{d} \right)^{3/2}} + \frac{6Pa^4 (1 - (a/d)\cos\theta)(-a\cos\theta + d)}{d^3 \left(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - \frac{2a^3 \cdot \cos\theta}{d} \right)^2} \right]$$

$$\sigma = +\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-P \cdot \cos\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} + \frac{P \cdot a^2 (a \cdot \cos\theta - Zd)}{d^3 \left(\frac{a^2}{d^2} \right)^{3/2} (d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} - \frac{6P \cdot d (a/d \cos\theta - 1)(a - \cos\theta \cdot d)}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^2} + \frac{6Pa^4 (1 - (a/d)\cos\theta)(d - a\cos\theta)}{d^3 \left(\frac{a^3}{d^2} \right) (d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta)^2} \right]$$

$$\sigma = +\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-a^3 P \cdot \cos\theta + a^3 P \cdot \cos\theta - 2Pa^3 \cdot d}{a^3 (d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta)^{3/2}} - \frac{6Pa^4 \left(\frac{a}{d} \cos\theta - 1 \right) (a - \cos\theta \cdot d) + 6Pa^4 (1 - a/d \cos\theta) (d - a \cos\theta)}{a^4 (a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^2} \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-Zp a^2 d}{a^3 (a^2 + d^2 - Z a d \cos \theta)^{3/2}} + \frac{6p a^4 [1 - (\frac{a}{d}) \cos \theta] [a - \cos \theta d + d - a \cos \theta]}{d^4 (a^2 + d^2 - Z a d \cos \theta)^2} \right]$$

d. El momento monopolar sale barato si se mira en la expresión del potencial $\phi(r)$ en forma elegante; de allí simplemente:

$$Q = \frac{a \cdot p}{d^2}$$

Para el momento dipolar

$$\vec{P}_T = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

$$\vec{P}_T = q \left(\frac{d+\epsilon}{2} \right) + -q \left(\frac{d-\epsilon}{2} \right) + \frac{q^3}{d^3} \vec{P} + \left(\frac{a \cdot p}{d^2} \right) \left(\frac{a^2 d}{d} \right)$$

$$\vec{P}_T = q \vec{d} + q \frac{\epsilon}{2} - q \vec{d} + q \frac{\epsilon}{2} + \frac{q^3}{d^3} \vec{P}$$

$$\vec{P}_T = \vec{P} + \frac{a^3}{d^3} \vec{P} + \frac{a^3}{d^3} \vec{P}$$

$$\vec{P}_T = \vec{P} \left(1 + \frac{a^3}{d^3} \right)$$

Contribución de la esfera al momento dipolar

Para el momento cuadrupolar

Dada la simetría los ejes principales son \hat{z} y \hat{x}, \hat{y} . Luego se tiene

$$\{Q_{ij}\} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

Por la simetría de giro entorno a $\hat{z} \Rightarrow Q_{xx} = Q_{yy} \Rightarrow$
(no depende de φ ni ϕ)

$$Q_{zz} = -2Q_{xx}$$

$$Q_{xx} = \left(3 \cdot 0 - \left(\frac{d+\epsilon}{2} \right)^2 \cdot q \right) + \left(3 \cdot 0 + \left(\frac{d-\epsilon}{2} \right)^2 \cdot q \right) = -q \frac{d^2}{4} - q \frac{\epsilon^2}{4} - q \frac{\epsilon^2}{4} + q \frac{d^2}{4} - q \frac{d\epsilon}{4} + q \frac{\epsilon^2}{4}$$

$$= -Zq d \epsilon = -Zpd$$

cargas puntuales (dipolo)

$$Q_{xx} = \text{monopolo imagen} + \left(\frac{a^2}{d} \right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot p}{d^2} \right) = + \frac{a^5 p}{d^4}$$

$$Q_{xx} =$$

NOTA

El cuadrupolo del monopolo y el dipolo imagen lo obtenemos por simple inspección comparativa.

$$Q_{xx} \text{ dipolo imagen} = -2 \cdot \left(p \cdot \frac{a^3}{d^3} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{d} \right) = -2p \cdot \frac{a^5}{d^4}$$

↑
 (Plac dipolo imagen) (Plac dipolo imagen)

$$Q_{xx}^{\text{total}} = -2pd + p \cdot \frac{a^5}{d^4} - 2p \cdot \frac{a^5}{d^4}$$

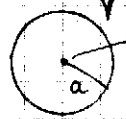
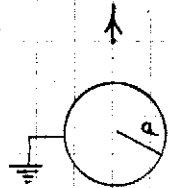
$$Q_{xx} = -2pd - p \cdot \frac{a^5}{d^4} =$$

$$Q_{xx} = -2pd \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^5}{d^5} \right)$$

$$Q_{yy} = Q_{xx}$$

$$Q_{zz} = 4pd \left(1 - \frac{a^5}{2d^5} \right)$$

e. Si la esfera estuviese aislada y descargada alcanzará un potencial V en su superficie por ser la esfera conductora. Se puede resolver por superposición. Como:



El V se puede lograr con una carga q' en el centro.

$$\frac{q'}{r} = \frac{a^2/d}{r}$$

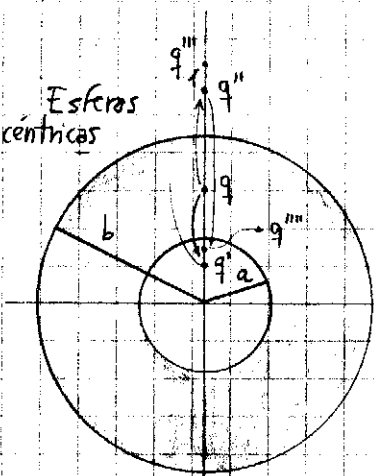
Esto es válido para puntos fuera de la esfera

$$r > a$$

El potencial sufre un incremento de $\Delta V = \frac{a^2/d}{r}$ y el campo $\Delta E = \frac{a^2/d}{r^2}$

4.

Esferas concéntricas



Condiciones tipo Dirichlet entre dos esferas

$$\phi_{s_a} = V_1, \quad \phi_{s_b} = V_2$$

Entonces las imágenes estarán en $r < a$ ó bien en $r > b$ hallándose en $a < r < b$ (la región cerrada donde quiere conocerse el potencial) \cup solamente la carga de prueba

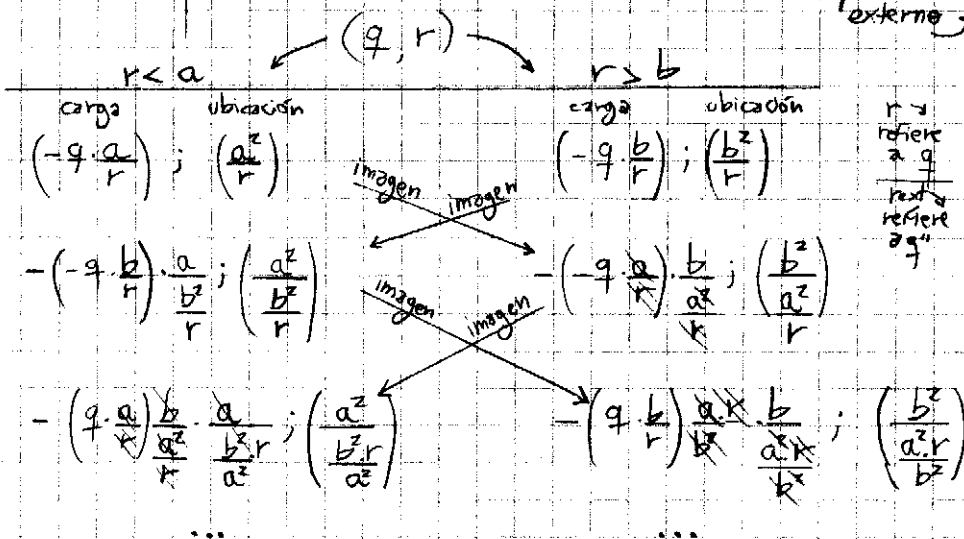
podemos invertir para el problema externo $q = -q'' \cdot \frac{b}{r_{ext}}$

$$q'' = -q \cdot \frac{r_{ext}}{b}$$

$$r = \frac{b^2}{r_{ext}}$$

$$q'' = -q \cdot \frac{b}{r}$$

$$r_{ext} = \frac{b^2}{r}$$



$r \rightarrow$ refiere a q
 $r_{ext} \rightarrow$ refiere a q'

$$r < a$$

$$-q \frac{a}{r}; \frac{a^2}{r}$$

$$q \frac{a}{b}; \frac{a^2 r}{b^2}$$

$$-q \frac{a^2}{b r}; \frac{a^4}{b^2 r} = \frac{a^2}{r} \frac{a^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{q}{a^2} \right) \frac{a^2 r}{b^2}; \frac{a^4}{b^2}$$

\downarrow
 $q \frac{a^2}{b^2}$

$$r > b$$

$$-q \frac{b}{r}; \frac{b^2}{r}$$

$$q \frac{b}{a}; \frac{b^2 r}{a^2}$$

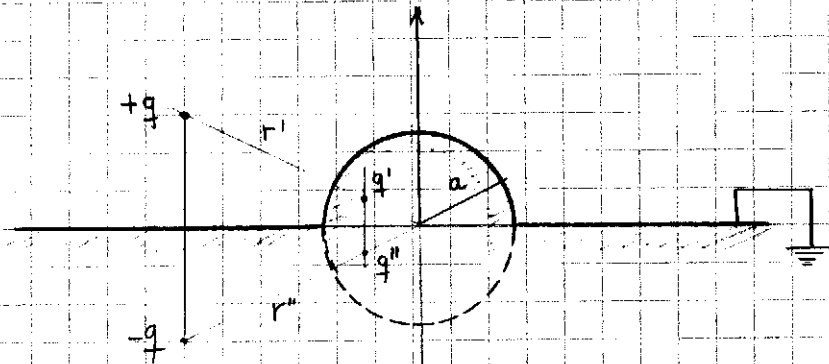
$$-q \frac{b^2}{a r}; \frac{b^4}{a^2 r}$$

$$q \frac{b^2}{a^2}; \frac{b^4}{a^2}$$

la q es unitaria

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'|} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\frac{a}{r} \left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left| \bar{r} - \frac{a^2}{r} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+2} \hat{r} \right|} + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{\left| \bar{r} - r \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+2} \hat{r} \right|} \right. \\ \left. - \frac{\frac{b}{r'} \left(\frac{b}{a}\right)^m}{\left| \bar{r} - \frac{b^2}{r'} \left(\frac{b}{a}\right)^{2m+2} \hat{r}' \right|} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}}{\left| \bar{r} - r' \left(\frac{b}{a}\right)^{2m+2} \hat{r}' \right|} \right)$$

5.



a. Es fácil hacerlo utilizando imágenes, en efecto situando una carga $-q$ arregla mos el plano a tierra, con q' arreglamos la esfera y q'' arregla q' a través del plano y $(-q)$ por la esfera.

$$G(\bar{x}, \bar{x}') = \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{1}{\frac{r'}{a} \left| \bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}' \right|} + \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}''|} + \frac{1}{\frac{r''}{a} \left| \bar{r} - \frac{a^2}{r''} \hat{r}'' \right|}$$

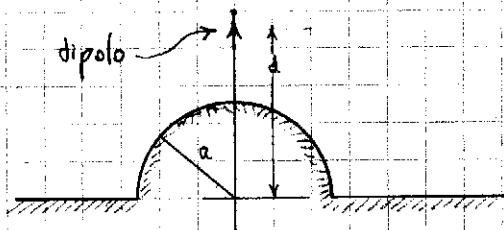
\uparrow imagen por $(+q)$ sobre la esfera \uparrow imagen de $(+q)$ por el plano \uparrow imagen de $(-q)$ por la esfera
 \uparrow imagen de q' por el plano

donde $|r''| = |r'|$

$$\bar{r}'' = (x', y', -z')$$

$$\bar{r}' = (x', y', z')$$

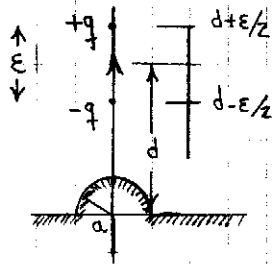
b.



$z r' \cos \theta$
 $r' \cos \theta = z$
 $r' \sin \theta = \sqrt{a^2 - z^2}$
 $r' = \frac{z}{\cos \theta}$
 $\sqrt{z^2 + (a^2 - z^2)} = a$
 $\sqrt{z^2 + a^2 \sin^2 \theta} = a$
 $z^2 + a^2 \sin^2 \theta = a^2$
 $z^2 = a^2 (1 - \sin^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta$
 $z = a \cos \theta$
 $r' = \frac{a \cos \theta}{\cos \theta} = a$
 $r'' = 2a \cos \theta$
 $r' = a$
 $r'' = 2a \cos \theta$
 $r' = a$
 $r'' = 2a \cos \theta$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_S \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \cdot dS$$

= 0 por estar a tierra la superficie



$$\rho(\vec{r}') = \left. \begin{aligned} & q \cdot \delta(z - [d + \epsilon/2]) \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \\ & - q \cdot \delta(z - [d - \epsilon/2]) \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \end{aligned} \right\} [1]$$

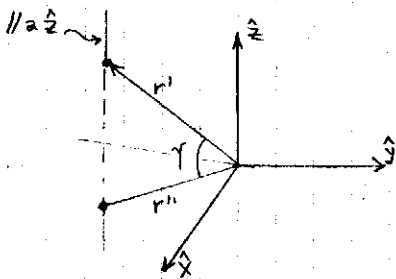
$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - (d + \frac{\epsilon}{2})\hat{z}|} - \frac{q}{|\vec{r} - (d - \frac{\epsilon}{2})\hat{z}|} - \frac{q}{\frac{(d + \epsilon/2)|\vec{r} - \frac{a^2}{(d + \epsilon/2)}\hat{z}|}{a}} + \frac{q}{\frac{(d - \epsilon/2)|\vec{r} - \frac{a^2}{(d - \epsilon/2)}\hat{z}|}{a}}$$

$$- \frac{q}{|\vec{r} + (d + \frac{\epsilon}{2})\hat{z}|} + \frac{q}{|\vec{r} + (d - \frac{\epsilon}{2})\hat{z}|} + \frac{q}{\frac{(d + \epsilon/2)|\vec{r} + \frac{a^2}{(d + \epsilon/2)}\hat{z}|}{a}} - \frac{q}{\frac{(d - \epsilon/2)|\vec{r} + \frac{a^2}{(d - \epsilon/2)}\hat{z}|}{a}}$$

Aquí $r'' = r'$ pero

$$\vec{r}' = r' \hat{z}$$

$$\vec{r}'' = -r' \hat{z}$$



Este camino es análogo a resolver por imágenes, pero se nos pide resolver por Green, entonces usaremos [1] y el límite con $\epsilon \rightarrow 0$

$$\rho(\vec{r}') = q \delta(\vec{r} - (d + \frac{\epsilon}{2})\hat{z}) - q \delta(\vec{r} - (d - \frac{\epsilon}{2})\hat{z})$$

$$\rho(\vec{r}'') \approx q \delta(\vec{r} - d\hat{z}) - q \delta(\vec{r} - d\hat{z})$$

$$+ q \cdot \vec{\nabla}_z \delta(\vec{r} - (d + \frac{\epsilon}{2})\hat{z}) \cdot \hat{z} \Big|_{\epsilon=0} - q \cdot \vec{\nabla}_z \delta(\vec{r} - (d - \frac{\epsilon}{2})\hat{z}) \cdot \hat{z} \Big|_{\epsilon=0}$$

$$\delta(\vec{r} - d\hat{z} - \frac{\epsilon}{2}\hat{z})$$

$$\approx q \cdot \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - d) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \hat{z} - q \cdot \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - d) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \hat{z}$$

$$\approx -q \cdot \hat{z} \cdot \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - d) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - d)$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV'$$

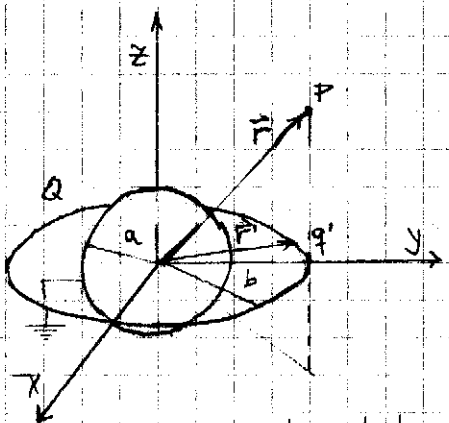
$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r}' - d) \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r G(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{r'=d}$$

$$\phi(\vec{r}) = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\frac{r'}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{z} \right|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \frac{1}{\frac{r''}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{r''} \hat{z} \right|} \right)$$

$$\frac{1}{\frac{r}{a} \left| \frac{a^2}{r} \hat{z} - \vec{r}' \right|} \ll \frac{1}{\frac{r}{a} \left| \vec{r}' - \frac{a^2}{r} \hat{z} \right|} \quad \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} + \frac{1}{\frac{r}{a} \left| \vec{r}'' - \frac{a^2}{r} \hat{z} \right|} = \frac{1}{\frac{r}{a} \left| \frac{a^2}{r} \hat{z} - \vec{r}'' \right|}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{a}{r} \cdot \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r}' - a^2/r^2 \vec{r})}{|\vec{r}' - a^2/r^2 \vec{r}|}$$

6.



Esta configuración tiene simetría de rotación en torno a \hat{z} (no depende de φ)

a. Utilizando el método de Green deberíamos hallar la función de Green apropiada a la geometría, que no es otra que la de la esfera.

$$G_p(P, P') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\frac{r'}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}' \right|}$$

rho de la distribución

$$\rho(\vec{r}) = \lambda \delta(r-b) \delta(z-0)$$

Así no va el jacobiano dividiendo porque no entra la δ angular

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \lambda \delta(r-b) \delta(z-0) r dr d\varphi dz$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho G dV = \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi_1 \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

nula en todos los contornos

$$Q = \lambda \cdot b \cdot 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi b}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \lambda \delta(r'-b) \delta(z') \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\frac{r'}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}' \right|} \right) r' dr' d\varphi' dz'$$

$\vec{r}' = b \hat{r}'$
 $|\vec{r}'| = b$
 \hat{r}' de coord. cilíndricas

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} b \lambda \left(\frac{1}{|\vec{r} - b \hat{r}'|} - \frac{1}{\frac{b}{a} \left| \vec{r} - \frac{a^2}{b} \hat{r}' \right|} \right) d\varphi'$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \lambda b \left(\frac{1}{\sqrt{(x-b \cos \varphi')^2 + (y-b \sin \varphi')^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{a^2}{b} \cos \varphi')^2 + (y-\frac{a^2}{b} \sin \varphi')^2 + z^2}} \right) d\varphi'$$

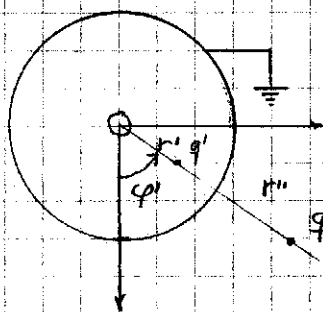
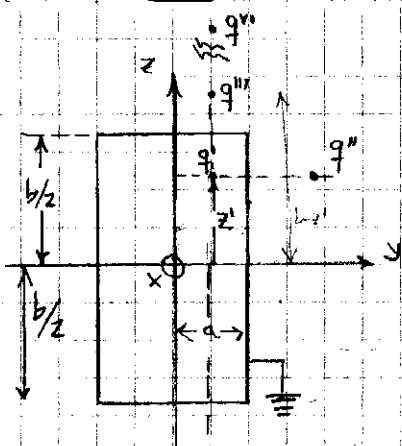
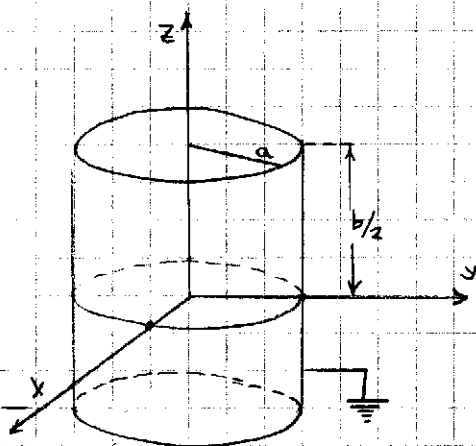
$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\lambda b}{\sqrt{x^2 + b^2 + y^2 + z^2 - 2x b \cos \varphi' - 2y b \sin \varphi'}} - \frac{\lambda a}{\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{b^2} + y^2 + z^2 - 2x \frac{a^2}{b} \cos \varphi' - 2y \frac{a^2}{b} \sin \varphi'}} \right) d\varphi'$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\lambda b}{\left(r^2 + b^2 + z^2 - 2b [r \cos \varphi \cos \varphi' - r \sin \varphi \sin \varphi'] \right)^{1/2}} - \frac{\lambda a}{\left(r^2 + \frac{a^4}{b^2} + z^2 - 2b [r \cos \varphi \cos \varphi' - r \sin \varphi \sin \varphi'] \right)^{1/2}} \right) d\varphi'$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\lambda b}{\left(r^2 + z^2 + b^2 - 2b r \cos(\varphi + \varphi') \right)^{1/2}} - \frac{\lambda a}{\left(r^2 + z^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2\frac{a^2}{b} r \cos(\varphi + \varphi') \right)^{1/2}} \right) d\varphi'$$

7.

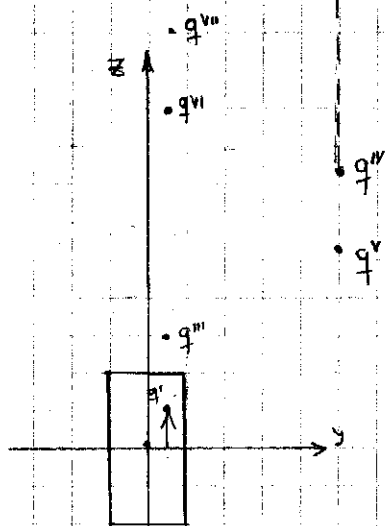
Cilindro de altura b y radio a a tierra.



Se tendrá una sucesión infinita de imágenes en el eje z .

$$q' = -q'' \frac{a}{r'}, \quad r'' = \frac{a^2}{r'}$$

$$q'' = -q' \frac{r'}{a}, \quad r''' = \frac{a^2}{r'}$$



Plano $z = -b/2$

Plano $z = b/2$

$$-q' = \frac{b}{z} - \left(\frac{z'+b}{z} \right) = \frac{z'-b}{-b-z'}$$

$$q' = \left[\frac{b}{z} + \left(\frac{z-z'}{z} \right) + \frac{b}{z} \right] - \frac{b}{z} = -\frac{z'+z'}{z}$$

$$-q', \quad \frac{b}{z} + \left(\frac{b-z'}{z} \right) = b$$

$$q'' = \left[-\frac{z'-b}{z} \right] + \frac{b}{z} + \frac{b}{z}$$

$$q'' = \left[-\frac{z'+z'}{z} \right] + \frac{b}{z} + \frac{b}{z}$$

$$q'' = \frac{z'+z'}{z}$$

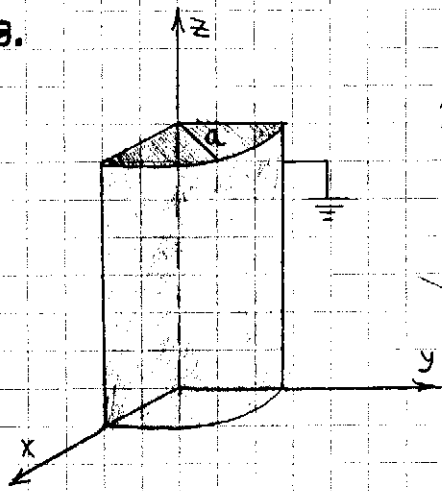
Luego, en vista de la recurrencia, se tendrá:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|\vec{r} - (x', y', (-1)^n (n.b - z'))|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|\vec{r} - (x', y', (-1)^n (n.b + z'))|}$$

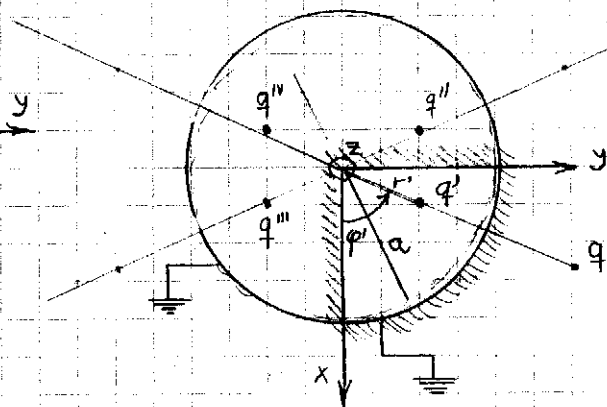
↑ imágenes por las tapas
↑ imagen por la sup. lateral

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \left(\frac{a^2}{r'} \cos \varphi' \hat{x} + \frac{a^2}{r'} \sin \varphi' \hat{y} + z' \hat{z} \right)|} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{|\vec{r} - (x', y', (-1)^n (n.b - z'))|} + \frac{1}{|\vec{r} - (x', y', (-1)^n (n.b + z'))|} \right)$$

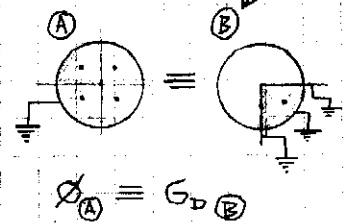
8.



1/4 de cilindro infinito (en \hat{z}) (no me preocupa por las tapas)
 $\phi \neq \phi(z)$ por la simetría de traslación en \hat{z}



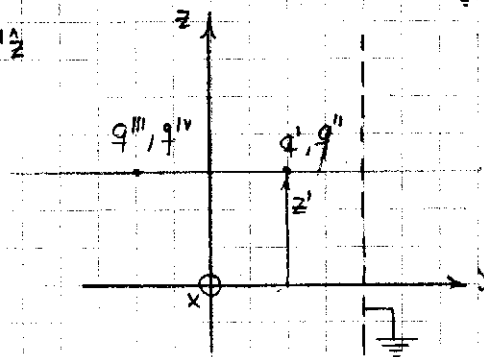
Considerare en cilindro completo infinito con cuatro cargas que reproducen dos planos a tierra



q' se halla ubicada en r', ϕ', z'

punto fuente $\rightarrow \vec{r} = r' \hat{r}' + z' \hat{z} = x' \hat{x} + y' \hat{y} + z' \hat{z}$

punto campo $\rightarrow \vec{r} = r \hat{r} + z \hat{z}$



III. Preguntas conceptuales

1. La función de Green es el potencial de una carga test unitaria más los potenciales de cargas imágenes (también unitarias) ubicadas fuera de la región de interés de modo de generar el potencial necesario para satisfacer las condiciones de potencial nulo en el contorno.
- 2,3. Para escribir la función de Green para cierta región es necesario, en general, situar imágenes fuera de la región interior (donde se quiere averiguar el potencial). Esas imágenes tendrán ubicaciones que dependan de la ubicación de la carga test (de vector \vec{r}'). Entonces la función de Green contiene términos que reflejan el po-

tencial aportada por las cargas imágenes necesarias para construir el contorno del problema.

5. Las cargas imágenes deben colocarse en la región exterior al recinto donde desea conocerse el potencial.
6. Los contornos serán equipotenciales una vez situadas las imágenes correctas.
7. La carga total de la distribución imagen será la carga inducida sobre el contorno.
- 4.