

Física Teórica 1.

Segundo Cuatrimestre 2004

Relatividad Especial. Formulación covariante del EM

- Dos sistemas inerciales S y S' tienen movimiento relativo con velocidad V . En O y O' (orígenes de S y S' respectivamente) hay sendos relojes que pasan uno frente al otro cuando $t = t' = 0$. El eje $O'x'$ de S' se mueve sobre el eje Ox de S . En las posiciones $x = -d$ y $x = d$ del eje Ox hay sendos relojes en reposo en el sistema S . Para sincronizar estos relojes con otro que se encuentra fijo a O , dos rayos de luz parten en $t = 0$ en ambas direcciones del eje Ox . Cada reloj tiene un mecanismo que le permite detectar el rayo de luz, y cuando se produce la detección cada reloj se dispone automáticamente en la hora $t = d/c$.

 - Según la noción de simultaneidad del sistema S' , ¿están los relojes fijos en $x = \pm d$ sincronizados entre sí y con el reloj O ? Responda: i) usando que en todos los sistemas de referencia la velocidad de la luz es c , ii) usando las transformaciones de Lorentz. ¿En qué instantes llegan los rayos de luz a cada reloj en el sistema S' ?
 - ¿Qué hora marca el reloj fijo en $x = d$ cuando el reloj O' pasa frente a él? ¿Qué hora marca el reloj O' en ese evento?
 - El intervalo entre las dos llegadas de la luz a $x = d$ y a $x = -d$ ¿es espacial o temporal? ¿Cuánto vale?
- Los rayos cósmicos que provienen del espacio exterior inciden sobre las capas altas de la atmósfera produciendo partículas elementales llamadas muones. Los muones son inestables. En el laboratorio se comprueba que muones no relativistas decaen con una vida media $\tau = 2,2 \times 10^{-6}$ s, es decir que el número de muones de una muestra decrece como $N(t) = N(t=0) e^{-t/\tau}$. En la cima de una montaña, a 1907 m s.n.m., se detectaron 563 muones por hora, moviéndose en dirección a la Tierra con velocidad $0,9952 c$. Al nivel del mar se detectaron 424 muones por hora. Teniendo en cuenta que los muones tardan $6,39 \times 10^{-6}$ s en realizar ese recorrido, ¿es compatible el resultado experimental con la Teoría de la Relatividad?
- A las doce del mediodía una nave espacial pasa frente a la Tierra con una velocidad de $0.8 c$. Los tripulantes de la nave sincronizan sus relojes con los terrestres disponiéndolos en la hora 12:00.

 - A las 12:30 *pm* según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra en reposo relativo a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?
 - ¿Cuál es la distancia propia entre la Tierra y la estación?
 - A las 12:30 *pm*, hora de la nave, se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuál es la hora de la Tierra cuando se recibe la señal?
 - Si desde la Tierra se contesta inmediatamente, ¿Cuándo se recibirá la respuesta (hora de la nave)?

4. En el día de Año Nuevo de 2014, un astronauta (A) parte de la Tierra con una velocidad de $0.8c$ y viaja hacia la estrella más cercana $-\alpha$ Centauro, que se encuentra a una distancia de 4 años-luz, medida en el sistema de referencia de la Tierra. Una vez que ha llegado a la estrella regresa inmediatamente a la Tierra a la misma velocidad, llegando al punto de partida el día de Año Nuevo de 2024, tiempo terrestre. El astronauta tiene un hermano (B) que permanece en la Tierra y acuerdan ambos felicitarse mutuamente el Año Nuevo mediante señales de radio cada día de Año Nuevo hasta que el viajero regrese a casa.
- Comprobar que A manda sólo 6 mensajes (incluyendo el que manda el último día de su viaje), mientras B manda 10. ¿Qué significa esto en términos de las edades de los hermanos cuando se reencuentran?
 - Dibujar el diagrama de espacio-tiempo del viaje de A trazado en el sistema de referencia de la Tierra. (señalar las escalas tanto de x como de ct en años-luz.) Trazar también las líneas de universo de todas las señales de radio que transmite B . Verificar con el auxilio del diagrama que A (el astronauta) ha recibido sólo una señal hasta el momento de su vuelta y que recibe las otras nueve durante el viaje de retorno.
 - Trazar otro diagrama de espacio-tiempo, también en el sistema de referencia de la Tierra, mostrando las líneas de universo del astronauta y de todas las señales que él emite. Verificar que su hermano recibe un mensaje cada tres años de tiempo terrestre durante los nueve primeros años siguientes a la partida de su hermano y recibe a continuación tres mensajes más a lo largo del último año, haciendo un total de 6.
 - Interpretar estos resultados en términos del efecto Doppler.
 - ¿Qué edad tiene cada gemelo cuando se invierte la velocidad del cohete? Considere esta cuestión justo antes y justo después del comienzo del retorno.
5. Un espejo se mueve con velocidad V en una dirección perpendicular al mismo. Un fotón de energía E incide sobre el mismo en una dirección que forma un ángulo θ con la velocidad del espejo. Obtenga la dirección y la energía del fotón reflejado.
6. Conciba una situación donde las expresiones clásica y relativista del efecto Doppler predigan corrimientos opuestos. Ayuda: desarrolle la fórmula relativista a segundo orden en V/c .
7. Una fuente de luz que se mueve con velocidad \mathbf{V} emite luz en forma isotrópica en su sistema propio. Muestre que el haz de luz que en el sistema propio se emite hacia el hemisferio delantero será visto desde el laboratorio concentrado en un cono de ángulo $\alpha = \arcsin(1 - V^2/c^2)^{1/2}$ cuyo eje es colineal con la velocidad \mathbf{V} .
8. Demostrar que la aniquilación de un par electrón-positrón en un único fotón es incompatible con la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. Sabiendo que la energía en reposo de un electrón es de 0,511 MeV, determine cuál deberían ser las energías mínimas de un par de fotones de igual frecuencia para crear un par electrón-positrón.

9. En 1923, Arthur Compton mostró que rayos X dispersados por electrones libres tienen menos energía después de ese proceso (*efecto Compton*). Analice la colisión entre un fotón de frecuencia ν y un electrón inicialmente en reposo, y determine la frecuencia final del fotón sabiendo que fue dispersado en un ángulo θ . Muestre que la luz visible ($\lambda \sim 5500 \text{ \AA}$) no experimenta cambio apreciable de frecuencia.
10. La reacción $\mathbf{p}^+ + n \rightarrow \mathbf{k}^+ + \Lambda^0$ (pion +neutrón \rightarrow kaón + lambda), requiere que la energía de los reactivos supere un valor umbral. En efecto: $m_{\mathbf{p}^+} c^2 = 140 \text{ MeV}$, $m_n c^2 = 940 \text{ MeV}$, $m_{\mathbf{k}^+} c^2 = 494 \text{ MeV}$ y $m_{\Lambda^0} c^2 = 1116 \text{ MeV}$, es decir que la suma de las masas de los productos es mayor que la de los reactivos.
- (a) En el sistema donde el neutrón está en reposo, calcule la energía mínima del pion para que la reacción ocurra.
- (b) En el sistema donde el neutrón está en reposo, el kaón es detectado con energía $E_{\mathbf{k}^+}$ y con $\mathbf{p}_{\mathbf{k}^+}$ perpendicular a $\mathbf{p}_{\mathbf{p}^+}$. ¿Cuál fue la energía del pion?
11. (a) Transformando el campo coulombiano, halle los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} debidos a una carga q que se mueve con velocidad V .
- (b) Sean dos cargas que se mueven con velocidad constante sobre trayectorias mutuamente perpendiculares. Usando el resultado del inciso (a) determine las fuerzas de Lorentz sobre cada carga en el instante en que una carga cruza la trayectoria de la otra. Compruebe que las fuerzas no son iguales y opuestas. ¿Qué sucede con la conservación de la cantidad de movimiento?
12. Es fácil probar partiendo de las transformaciones de Lorentz de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} que las magnitudes $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $(E^2 - B^2)$ son invariantes (por otra parte, en el lenguaje covariante resulta ${}^*F_{ij} F^{ij} = 4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, $F_{ij} F^{ij} = {}^*F_{ij} {}^*F^{ij} = 2(E^2 - B^2)$, donde ${}^*F_{ij}$ es el *dual* del tensor de campo: ${}^*F_{ij} \equiv (1/2) \epsilon_{ijkl} F^{kl}$).
- (a) Muestre que si \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares en un evento, lo son cualquiera sea el sistema de referencia considerado.
- (b) Pruebe que si $E > B$ en un evento, lo son cualquiera sea el sistema de referencia considerado.
13. Demuestre que si \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares y $E^2 - B^2 \neq 0$ en un evento, entonces existen sistemas de referencia donde o se anula \mathbf{B} (caso $E^2 > B^2$) o se anula \mathbf{E} (caso $E^2 < B^2$) en dicho evento. Muestre que la solución no es única.
- Este resultado puede verse como un caso particular de un resultado más general: salvo cuando ambos invariantes son nulos, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se vuelven colineales en el sistema de referencia que se mueve con la velocidad \mathbf{V} que satisface la ecuación $\mathbf{V} / (1 + V^2 c^{-2}) = c \mathbf{E} \times \mathbf{B} / (E^2 + B^2)$. Esto significa que existe un sistema de referencia donde el vector de Poynting es nulo (esto no vale para una onda plana, porque en ese caso ambos invariantes se anulan).
14. Un cilindro de longitud infinita tiene densidad uniforme de carga y por él circula, además, una corriente uniforme paralela al eje del cilindro.

- (a) Encontrar *el* sistema de referencia en el cual hay sólo campo magnético o eléctrico. ¿Por qué es único?
- (b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.
15. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.
- (a) Calcular los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra de dos maneras distintas: 1) a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, 2) por transformación directa de los campos.
- (b) Ahora se tienen dos barras como la anterior dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza *por unidad de longitud* con que se atraen en un sistema de referencia que se mueve paralelo a las barras S' es la misma que en el sistema S fijo a las barras, por dos métodos: 1) en base a las interacciones electrostáticas y magnetostáticas en S' , más las leyes de transformación de los campos, 2) utilizando la relación entre el cuadrivector

$$f^i \equiv c^{-1} F^i_k j^k$$

y la fuerza de Lorentz por unidad de volumen.

- (c) Como “yapa” del punto anterior obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.
16. Un dipolo magnético puntual se mueve con velocidad V respecto de un sistema de referencia S . En el sistema donde el dipolo está en reposo, el cuadrivector potencial tiene componentes:

$$A^0 = 0, \quad \mathbf{A} = r_o^{-3} \mathbf{m}_o \times \mathbf{r}_o.$$

Demostrar que a primer orden en \mathbf{b} en el sistema S la configuración posee un momento dipolar eléctrico $\mathbf{p} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{m}_o$.

17. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido a lo largo del eje x . Usar como condición inicial $p_x = 0 = p_z$ y $p_y = p_o$. Demostrar que en el límite no-relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.
18. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un campo magnético uniforme y estático.
19. Encontrar la ecuación de la trayectoria para una partícula relativista que se mueve en un fondo electromagnético uniforme y estático, tal que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico. Considerar los tres casos posibles: a) $E > B$; b) $E < B$; c) $E = B$. *Sugerencia:* En los casos a) y b) hacer transformaciones de Lorentz adecuadas para reducir el problema a los ejercicios

anteriores.

20. ¿Es invariante la fase de una onda plana?. Siendo la respuesta afirmativa, encuentre el significado físico de la fase. Concluya que puede definirse un *cuadrivector de onda* ($c^{-1} \omega, \mathbf{k}$). Obtenga la expresión del efecto Doppler relativista para un rayo de luz a partir de la transformación de este cuadrivector.

Preguntas Conceptuales

1. ¿Es posible que una partícula viaje con velocidad mayor que c ?
2. Un faro rota uniformemente con velocidad angular ω , emitiendo una señal luminosa. Si tomamos 2 puntos a y b muy alejados del faro, la señal pasa de a a b a velocidad mayor que c . ¿Contradice esto la Relatividad?
3. ¿Es compatible con la Relatividad la existencia de cuerpos perfectamente rígidos?
4. ¿En qué caso se conserva y en qué caso no, la dirección de una barra al hacer una transformación de Lorentz?
5. En un sistema de referencia S , el intervalo entre dos eventos dados es de tipo espacial. ¿Es posible encontrar un sistema S' tal que el intervalo entre los mismos eventos sea de tipo temporal?
6. ¿Puede un fotón desintegrarse en 2 fotones?, ¿y en un par electrón-positrón?. ¿Puede un pion neutro desintegrarse en 2 fotones?
7. ¿Por qué en Relatividad no tiene sentido hablar de campo eléctrico o magnético, sino del campo electromagnético?
8. En el caso de una carga en movimiento, si uno compara las líneas de campo eléctrico vistas desde el sistema S' en el que la carga está en reposo, con las líneas de campo vistas desde S , se ve que en este último caso las líneas se encuentran comprimidas en la dirección del movimiento. ¿No se contradice esto con el hecho que \mathbf{E}_{\parallel} es invariante?
9. ¿Cómo podrían escribirse las leyes de conservación de la energía y del impulso en electromagnetismo de manera covariante?
10. ¿Qué relación hay entre la masa nula del fotón, la invariancia de gauge del electromagnetismo, y el alcance de la fuerza electrostática????