

● Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

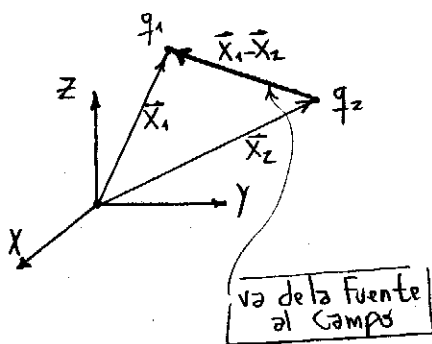
$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right]$$

[con ellas]

Son ecuaciones lineales \Rightarrow vale superposición (con \vec{E}, \vec{B} y cualquier vector relacionado linealmente)
 vectores $\begin{cases} \text{polares: tienen físicamente bien definidos el sentido} \\ \text{axiales: se les atribuye un sentido por convención.} \end{cases}$

Las ecuaciones son invariantes ante transformaciones del tipo: $\left\{ \begin{array}{l} \text{rotación} \\ \text{reflexión espacial (temporal)} \end{array} \right.$

● Electrostática



$$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

← Ley de Coulomb

sobre 1
debido a 2

De la ley de Coulomb definimos:

$$\vec{E}_{12}(\vec{x}_1) \equiv \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{x}_1 \equiv \vec{x} \\ q_1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

← Campo Eléctrico

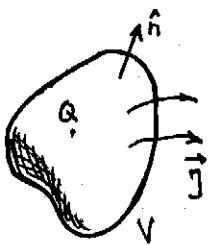
\vec{x} = punto campo

\vec{x}_i = punto fuente

continuo

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{V'} \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'$$

* Conservación de la carga



$$Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t} dV' = - \oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

el ves fijo ant

$$\int_V \frac{\partial \rho(\vec{x}')}{\partial t} dV' = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV' \Rightarrow$$

* volumen V

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

▲ continuidad de la carga

si la carga varía se debe a que sale en forma de flujo

se ve que vale experimentalmente

$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \rightarrow$ las líneas de \vec{J} no tienen principio ni fin

Interacción Magnética

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$ Corriente estacionaria (No hay acumulación de carga en ninguna parte)
 Las corrientes estacionarias producen efectos magnéticos dados por la Ley de Biot-Savart

Ley de Biot-Savart $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$

$\Gamma \equiv$ curva recorrida CCW

en un circuito

$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'$

En un volumen

transformación

$$\begin{aligned} & I d\vec{\ell} \times \vec{B} \\ & \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \\ & \cos \theta \cdot dS \cdot \vec{J} \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \\ & \vec{J} \times \vec{B} \cdot \cos \theta \cdot dS \cdot d\ell \\ & (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot (d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}) = \vec{J} \times \vec{B} \cdot dV \end{aligned}$$

$F = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma} I d\vec{\ell} \times \vec{B}$ fuerza sobre un circuito Γ

$F = \frac{1}{c} \int_V \vec{J} \times \vec{B} \cdot dV$ fuerza sobre un volumen V

* Fuerza de un circuito sobre otro

$F_{12} = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{\ell}_1 \times \left\{ \frac{1}{c} \oint_{\Gamma_2} \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right\} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_1 \times \left[d\vec{\ell}_2 \times \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right]$

sobre 1 debido a 2

$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_2 \left(d\vec{\ell}_1 \cdot \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) - \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)$

$\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{x}_2} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}_1} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$

$-\oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_2 \oint_{\Gamma_1} d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}_1} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$

= 0

por $\oint \vec{\nabla} \cdot d\vec{\ell} = 0$

$\therefore F_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$ vale lo mismo si intercambiamos Γ_1 con Γ_2 en la integración

\Rightarrow Con \dot{I} estacionaria vale PA & R [fuerzas iguales y de sentido opuestas]

Teorema de Helmholtz

Un campo vectorial está completamente determinado por su divergencia y rotor

Definición de un potencial electrostático [construcción]

$\vec{E} = \int_{V'} \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' = -\int_{V'} \rho(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'$

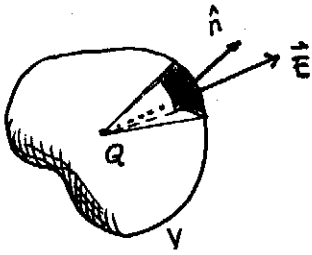
Integral de Poisson

$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \varphi(\vec{x})$

$\Rightarrow E$ es un grad $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ es conservativo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

ó lo que es lo mismo, \vec{E} es irrotacional

● Ley de Gauss



$$\vec{E} \cdot \hat{n} = q \frac{\cos \theta}{r^2}$$

ángulo sólido

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dS = q \frac{\cos \theta}{r^2} dS$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = q \cdot d\Omega$$

diferencial de ángulo sólido

$$\oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \int_S d\Omega \rightarrow$$

$\begin{cases} 0 & \text{carga exterior} \\ 4\pi & \text{carga interior} \end{cases}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_{i=1}^N q_i \text{ continuo teo. divergencia}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho \cdot dV \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V 4\pi \rho \cdot dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

Ley de Gauss

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot Q_n}$$

↑
carga neta dentro de S

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi) = -\nabla^2 \phi = 4\pi \rho$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -4\pi \rho}$$

Ecuación de Poisson

con cargas nulas →

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

Ecuación de Laplace

La solución del NH es suma del H+ particular. La carga está relacionada a la solución particular

● Gauges

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} : \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \#}$$

← el "gauge"

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$

Gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Poisson para magnetostática

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}}$$

NB

La operación $\vec{\nabla} \times$ y el producto vectorial cambian el carácter de los vectores
 polar → axial
 axial → polar

Electrostática	Magnetostática
$\vec{E} = \int_V \frac{\rho(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{ \vec{x} - \vec{x}' ^3} dV'$	$\vec{B} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{ \vec{x} - \vec{x}' ^3} dV'$
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_n$	$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I_c$
<p>LEY de GAUSS</p>	<p>LEY de AMPERE</p>
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{F} = \int_V \rho \cdot \vec{E} \cdot dV' + \frac{1}{c} \int_V \vec{J} \times \vec{B} \cdot dV'$$

▲ fuerza sobre una distribución de carga

● Delta de Dirac

$$\rho(\vec{x}') = q \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 0 & \vec{x} \neq \vec{x}' \\ \infty & \vec{x} = \vec{x}' \end{cases}$$

$$\int_{V'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \cdot dV' = 1$$

$[\delta(\vec{x} - \vec{x}')] = \frac{1}{l^3}$
 dimensiones

$$\int f(x) \cdot \delta(x - x_0) \cdot dx = f(x_0)$$

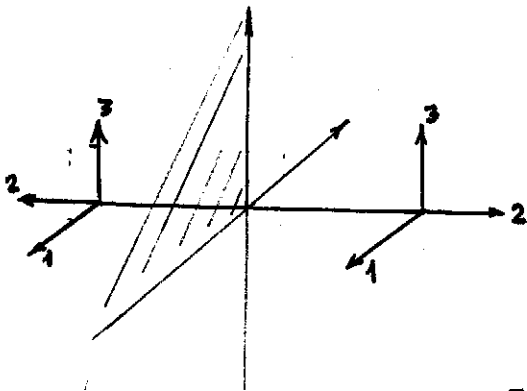
$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \delta(q_1 - q_1') \cdot \delta(q_2 - q_2') \cdot \delta(q_3 - q_3')$$

con q_1, q_2, q_3
 coordenadas
 curvilíneas generales

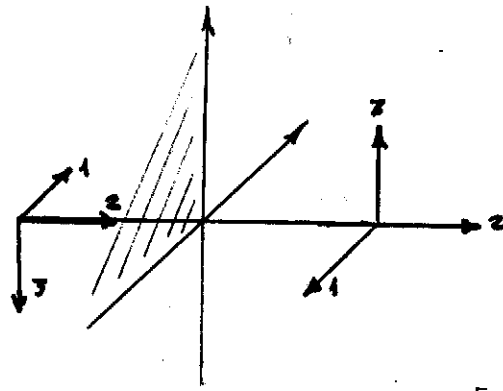
El Jacobiano
 de la transformacion

$$\int f(x) \cdot \delta'(x - x_0) \cdot dx = -f'(x_0)$$

● Reflexión



vector polar [Reflexión Especular]



vector axial «pseudovector» [Anti Reflexión Especular]

una reflexión más una rotación permite eliminar componentes de campo

una simetría más una rotación - traslación permite eliminar dependencias

Lo 1º que debe hacerse es escribir bien la \vec{J} a partir del dato de la corriente (que es el que se suele tener) mediante:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Para \vec{A} en general es más fácil usar:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

y despegar de aquí la ecuación diferencial que emplear

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV$$

● El Potencial Vector

Biot y Savart $\rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' = \vec{\nabla}_x \times \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \Rightarrow$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad [1]$$

Pero $\vec{A}' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ es tan buen potencial vector como \vec{A} pues $\vec{B} = \vec{\nabla}_x \vec{A} = \vec{\nabla}_x \vec{A}' \Rightarrow$ el potencial vector está definido a menos del gradiente de una función escalar.

Tomándole el rotor a [1] y considerando $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') = 0$ (corriente estacionaria) es

$$\vec{\nabla}_x \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\oiint_S \vec{\nabla}_x \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ampere \rightarrow $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I_\Gamma$ $I_\Gamma =$ corriente concatenada por el lazo Γ

$$\vec{\nabla}_x \vec{B} = \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ con gauge Coulomb}} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}} \quad \text{Poisson vectorial}$$

Magnetostática y electrostática son gobernadas por ecuaciones de Poisson para $\vec{A}, \varphi \Rightarrow$ el problema es resolverlas para luego hallar los campos por derivación.

● Unicidad de problemas de potencial

Si dos problemas satisfacen iguales condiciones de contorno \Rightarrow en el recinto encerrado por ese contorno tienen igual solución:

[1] $\varphi_1|_{\text{contorno}} = \varphi_2|_{\text{contorno}}$ pero $\varphi_1 \neq \varphi_2$ (en el interior de R) \Rightarrow

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} u) = u (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u) + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u$$

$$\vec{\nabla} \cdot u \vec{\nabla} u = u \nabla^2 u + (\vec{\nabla} u)^2$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot u \vec{\nabla} u \cdot dV = \int_V u \nabla^2 u + (\vec{\nabla} u)^2 \cdot dV = \oint_S u \cdot \vec{\nabla} u \cdot d\vec{S}$$

$$\int_V (\vec{\nabla} u)^2 \cdot dV = \oint_S u \cdot \vec{\nabla} u \cdot d\vec{S} = 0$$

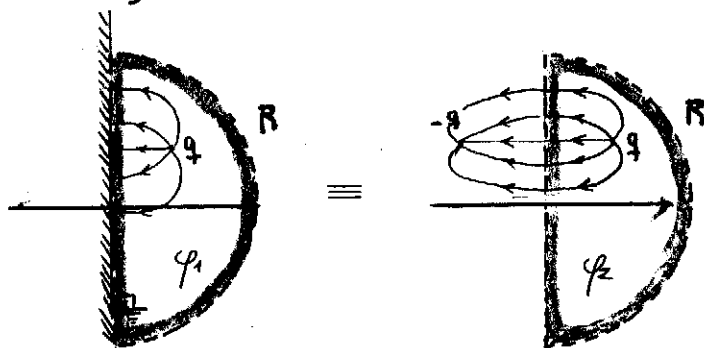
\rightarrow es $u|_{\text{contorno}} = 0$ por [1]

es $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\text{contorno}}$ derivada normal en el contorno $\Rightarrow \vec{\nabla} u = 0$

$$\vec{\nabla} \varphi_1 = \vec{\nabla} \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

amen de una constante

• Imágenes



Imágenes es un método gráfico de encontrar problemas equivalentes simulando con cargas extras [imágenes] las condiciones de contorno

Estos problemas satisfacen iguales condiciones de contorno en el recinto punteado \Rightarrow sus soluciones internas son la misma $\phi_1 = \phi_2$ por unicidad $(R \rightarrow \infty)$

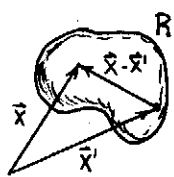
• Método de Green

El concepto del método de Green es evaluar el ϕ de una carga puntual ante cierta configuración de contornos conductores. Es una excitación elemental.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \\ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \phi \end{cases} \text{ restándolos } \Rightarrow$$

$$\int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] \cdot dV = \oint_S [\phi \cdot \vec{\nabla} \psi - \psi \cdot \vec{\nabla} \phi] \cdot d\vec{S}$$

← segunda identidad de Green



Int $\vec{x} \in R, \vec{x}' \in R$ (A)
Ext $\vec{x}' \notin R, \vec{x} \in R$ (B)

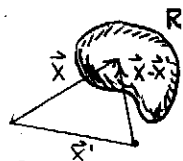
$$\vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

(A) $\psi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rightarrow \nabla^2 \psi = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

derivada en la superficie normal

$$-\phi(\vec{x}) 4\pi + \int_V \frac{4\pi \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

$$\phi(\vec{x}) = \underbrace{\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'}_{\text{cargas internas}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right] dS}_{\text{cargas fuera de R}}$$



condiciones tipo Dirichlet $\leftarrow \phi|_S$
condiciones tipo Von Neumann $\leftarrow \frac{\partial \phi}{\partial n}|_S$

$$\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS$$

la integral de superficie proviene de las cargas fuera de R que producen campo en el interior de R

si le cambiamos la normal es

$$\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right] dS$$

Hemos tomado $\psi = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ que verifica [1]; interpretándose ψ como el potencial de una carga puntual unitaria

Podemos tomar:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad [1]$$

$$G \equiv \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + f(\vec{x}, \vec{x}')$$

\rightarrow G es la función de Green

$$\nabla^2 G = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \nabla^2 f$$

con $\nabla^2 f(\vec{x}, \vec{x}') = 0$

f satisface Laplace (si el recinto no incluye a \vec{x}')

$f(\vec{x}, \vec{x}')$ representan lo/las imágenes necesarias para que G cumpla el contorno necesario $G|_S = 0$

● Funciones de Green

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \cdot dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right] \cdot dS \quad [1]$$

Para poder utilizar [1] necesito tener un solo tipo de condiciones de contorno \Rightarrow

Condiciones tipo Dirichlet

$$G_D: \quad \begin{cases} \nabla^2 G_D = -4\pi \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ G_D|_{\text{contorno de } \mathcal{R}} = 0 \end{cases} \quad \phi|_S \quad \leftarrow \text{el otro dato es}$$

equivale a reemplazar contorno por un conductor metálico puesto a tierra

$$\phi(\vec{x}) = \int_V G_D \cdot \rho \cdot dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_S \cdot \frac{\partial G_D}{\partial n} \cdot dS$$

Entonces G es el potencial de la configuración de conductores con el contorno puesto a tierra frente a una carga puntual con magnitud unitaria.

La función de Green da la geometría del problema

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv \vec{\nabla} \psi \cdot \hat{n}$$

Con ψ campo escalar



$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_S = -4\pi \sigma$$

$$\phi_2|_S = \phi_1|_S$$

Condiciones tipo Von Neumann

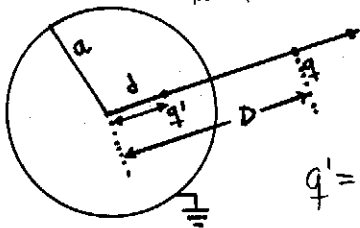
$$G_N: \quad \begin{cases} \vec{\nabla} G_N \cdot \hat{n} \Big|_S = -\frac{4\pi}{S} \\ \nabla^2 G_N = -4\pi \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{cases} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S \quad \leftarrow \text{el otro dato es}$$

$$\phi(\vec{x}) = \langle \phi \rangle_S + \int_V G_N \cdot \rho \cdot dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N \Big|_S \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S \cdot dS$$

* Green para el problema externo de una esfera (Dirichlet)

$$G = \frac{1}{|\vec{r} - D\hat{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{D}\hat{r}'|} \quad ; \quad G|_{r=a} = 0$$

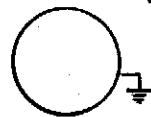
$\swarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}'|}$ $\swarrow F(\vec{x}, \vec{x}')$



$$q' = -q \cdot \frac{a}{D}$$

$$d = \frac{a^2}{D}$$

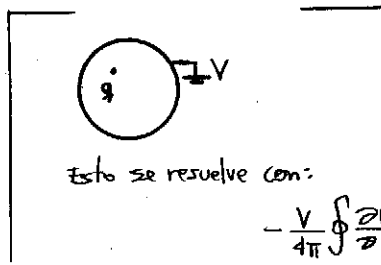
G_D es el potencial de esta configuración



y se evalúa teniendo en cuenta esta otra



que se resuelve usualmente por imágenes

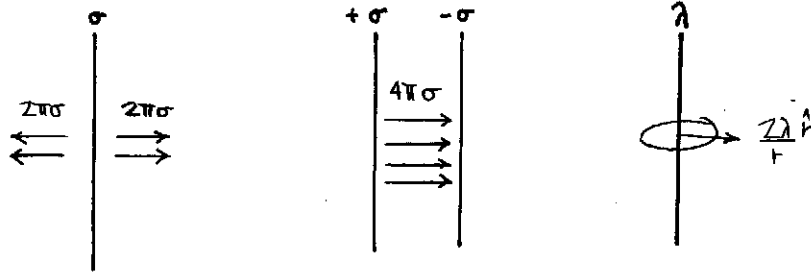


Esto se resuelve con:

$$-\frac{V}{4\pi} \oint \frac{\partial G}{\partial n} \cdot dS = -\frac{V}{4\pi} \oint \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} = -\frac{V}{4\pi} \int_V \nabla^2 G \cdot dV$$

$$= -\frac{V}{4\pi} (-4\pi) \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') \cdot dV = V$$

● Algunos Campos



NOTA

En distribuciones ∞ de carga la integral de Poisson diverge, pero esto se debe a que en realidad no existen distribuciones ∞ de carga.

● Notas Método de Green

función de Green libre (sin contornos) \rightarrow lleva directo a la integral de Poisson

$$\downarrow \quad \boxed{G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \int_V p \cdot G \cdot dV = \int_V \frac{p(\vec{x}') \cdot dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \leftarrow \text{Poisson}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\boxed{G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + f(\vec{x}, \vec{x}')$$

con $\nabla^2 f(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad \text{en } \vec{x} \neq \vec{x}'$

Para condiciones de Von Neumann se toma:

$$\boxed{\nabla G_n|_S = -\frac{4\pi}{S} = \frac{\partial G}{\partial n}|_S}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_S \cdot \nabla G_n \cdot \hat{n}|_S \cdot dS$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{S} \cdot \oint_S \phi|_S \cdot dS = \langle \phi \rangle_S$$

Valor promedio de ϕ en la superficie S

Se suele tomar la sup. $S \rightarrow \infty$ así es nulo $\langle \phi \rangle_S$

Se toma el volumen V rodeado por dos superficies una cerrada y finita y la otra en infinito \Rightarrow

$$\langle \phi \rangle_S = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

la integral

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \phi|_S \cdot \frac{\partial G}{\partial n}|_S \cdot dS \quad \text{no se puede anular con,}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0$$

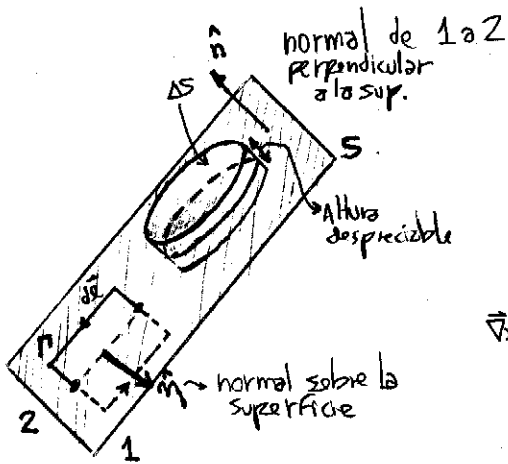
salvo que el volumen de integración no contenga a $\vec{x} = \vec{x}'$ en cuyo caso:



se excluye $\vec{x} = \vec{x}'$ de la integración

"El problema exterior"

● Condiciones de contorno



$$\hat{n} \times \hat{n}_\ell = \frac{d\vec{\ell}}{dl}$$

$$E_{z\hat{n}} - E_{1\hat{n}} = 4\pi\sigma \Rightarrow$$

$$E_{z\hat{t}} - E_{1\hat{t}} = 0$$

▼ Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_n$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \Delta S = 4\pi \sigma \cdot \Delta S$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{\ell} = (\vec{E}_2 + \vec{E}_1) \cdot \hat{n} \times \hat{n}_\ell \cdot dl$$

electrostática vale

$$0 = (\vec{E}_2 + \vec{E}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{n}_\ell)$$

$$0 = \hat{n}_\ell \cdot ((\vec{E}_2 + \vec{E}_1) \times \hat{n})$$

$$\Rightarrow \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

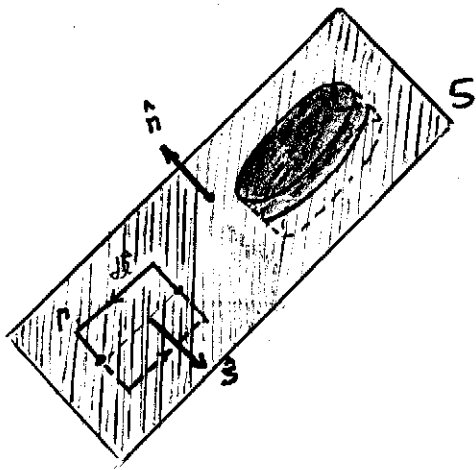
la componente tangencial es continua

$$-\nabla \phi_2 \cdot \hat{n} + \nabla \phi_1 \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\left\{ \nabla (\phi_1 - \phi_2) \right\} \cdot \hat{n} = \sigma$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\phi_1 - \phi_2)}{\partial n} = \sigma$$

densidad de carga inducida sobre la frontera entre medios



$$\hat{n} \times \hat{s} = \frac{d\vec{\ell}}{dl}$$

$$B_{z\hat{n}} - B_{1\hat{n}} = 0$$

$$H_{z\hat{t}} - H_{1\hat{t}} = \frac{4\pi}{c} g_L$$

$$\vec{J}_L \cdot d\vec{S} = \vec{g}_L \cdot d\vec{\ell}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L \rightarrow$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \vec{g}_L \cdot \hat{s} \cdot dl$$

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot d\vec{\ell}$$

altura de Γ tiende a cero

$$\frac{4\pi}{c} \vec{g}_L \cdot \hat{s} = (\vec{H}_2 + \vec{H}_1) \cdot (\hat{n} \times \hat{s}) \cdot dl$$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{g}_L \cdot \hat{s} dl = [(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n}] \cdot \hat{s} \cdot dl$$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{g}_L = \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

vale en general

• Desarrollo Multipolar

$$\phi(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}') \cdot dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Cuando la expresión es muy complicada podemos desarrollarla en una serie de potencias

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot Q + \frac{\vec{x} \cdot \vec{P}}{|\vec{x}|^3} + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} X_i X_j}{|\vec{x}|^5}$$

centrado en el origen de coordenadas

cuadrupolar: $\frac{1}{2} \frac{\vec{x}^T \cdot \vec{Q} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^5}$

momento dipolar $\vec{P} = \int_{V'} \vec{x}' \cdot \rho(\vec{x}') \cdot dV'$

momento monopolar [La carga total] $Q = \int_{V'} \rho(\vec{x}') \cdot dV'$

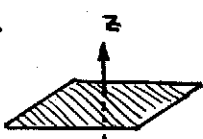
momento cuadrupolar $Q_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{x}') [3x_i x_j - \delta_{ij} |\vec{x}'|^2] \cdot dV'$

$Q_{ij} = Q_{ji}$

es simétrico por ser producto de vectores polares. Es siempre diagonalizable. Tiene traza nula $\Rightarrow Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$

- * momento cuadrupolar refleja apartamiento de la esfera perfecta
- * Los momentos dipolar y cuadrupolar indican desbalance de carga
- * Q_{ij} ($i \neq j$) mide desbalance lejos de los ejes

Una simetría de reflexión $\Rightarrow \vec{P} = 0$ plano



el P_z debe ser nulo (no hay desbalance)

$Q_{xx} = Q_{yy}$



simetría de revolución Q_{ij} puede darse con un solo número.

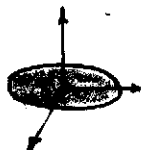


Esfera con ρ uniforme tiene todos los momentos multipolares nulos salvo el monopolar

momentos & simetrías

Si en una distribución dada los momentos multipolares hasta el orden $(l-1)$ son nulos \Rightarrow el momento multipolar de orden l no depende del origen de coordenadas

No tiene desbalance respecto del origen



discos uniform. cargado.

monopolo $\neq 0$
dipolo = 0 [respecto del origen]

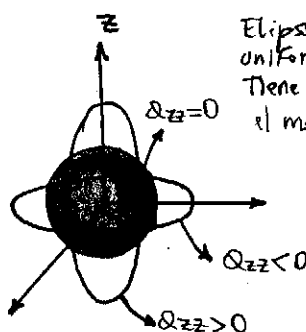


anillos cargados con carga opuesta

monopolo = 0
dipolo = 0 [respecto del origen y de cualquier otro punto]

Para átomos en general son monopolo, dipolo neutros \Rightarrow cuadrupolo se da con un solo número

Elipsoide con densidad de carga ρ uniforme. Tiene simetría de revolución \Rightarrow el mom. cuadrupolar es un número



$Q_{zz} = 0$ [una esfera no tiene desbalance] $\Rightarrow \vec{Q} = 0$

si mueves la distribución tendrás desbalance el disco pero no los anillos

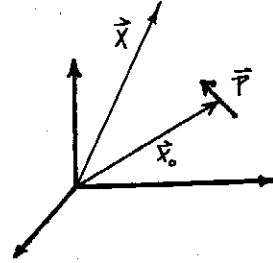
● Dipolo Eléctrico

$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ en el origen

Notar que \vec{p} no depende de \vec{x}

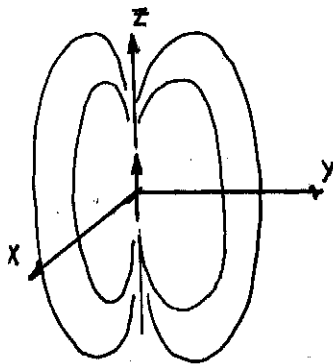
$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$ en \vec{x}_0

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} - \frac{\vec{p}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$



$$\hat{n} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

Dipolo centrado en el origen:



$$\phi(\vec{x}) = \frac{p \hat{z} \cdot r \hat{r}}{r^3} = \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2}$$

$$(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

▲ tiene simetría de revolución (no depende de $\hat{\phi}$)

● Líneas de Campo



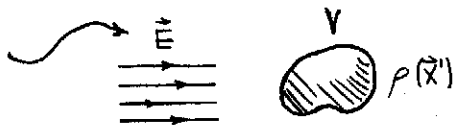
$d\vec{l}$ a través de una línea de campo $\rightarrow d\vec{l} \parallel \vec{E} \therefore \vec{E} \times d\vec{l} = 0$

La línea de campo sigue la dirección del campo

En el caso del dipolo no tendrán componente en $\hat{\phi}$ [como es de esperar]

● Interacción de campo externo con distribución de carga

tiene sus fuentes bien lejos



$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) \cdot dV$$

Fuerza sobre la distribución

\vec{E} no varía demasiado en V \Rightarrow una serie lo representa bien \Rightarrow

$$E^i(\vec{x}) \cong E^i + x_j \partial_j E^i + \frac{1}{2} x_j x_k \partial_j \partial_k E^i$$

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (lejos de fuentes)
 $\nabla \times \vec{E} = 0$ (irrotacional)

$$F_i = \int_V \rho E_i dV \cong E_i \int_V \rho dV + \int_V \rho x_j \partial_j E_i dV + \frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV$$

$$\cong E_i \cdot q + \underbrace{\int_V \rho x_j \partial_j E_i dV}_{\text{el grad. } E_i \text{ interactúa con el dipolo}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \rho x_j x_k \partial_j \partial_k E_i dV}_{\text{la div. } \vec{E} \text{ interactúa con el cuadrupolo}}$$

El campo interactúa con la carga

Un campo uniforme entonces no hace fuerza sobre un dipolo. Para un campo inhomogéneo:

El torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = q \vec{r} \times \vec{E}$$

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ tiende a orientar un dipolo según el campo \vec{E} (no lo logra por la agitación térmica)

$\vec{p} = q \cdot \vec{r}$ ← momento dipolar

energía de un dipolo

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{p}}_{=0} + \underbrace{\vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} + \underbrace{\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{p})}_{=0}$$

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Taylor de orden 2 con $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f|_{\vec{x}_0} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^t H f(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

● Capa Dipolar

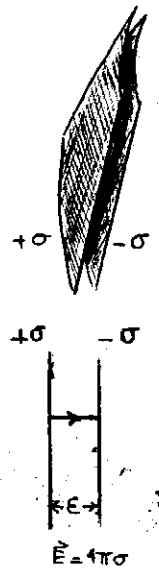
potencial de un dipolo

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

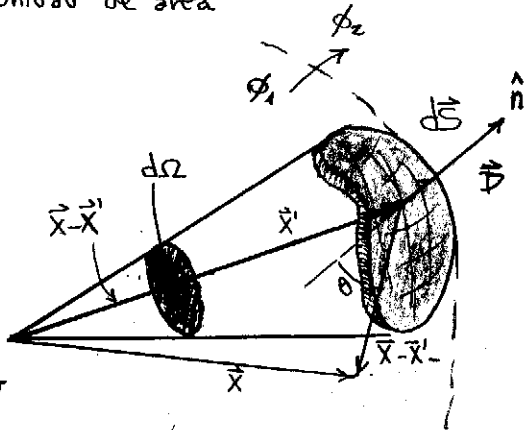
$$D = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \sigma \cdot \epsilon$$

potencial de una capa dipolar

$$\phi(\vec{x}) = \int_{S'} \frac{\vec{D}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS'$$



\vec{D} = momento dipolar por unidad de área

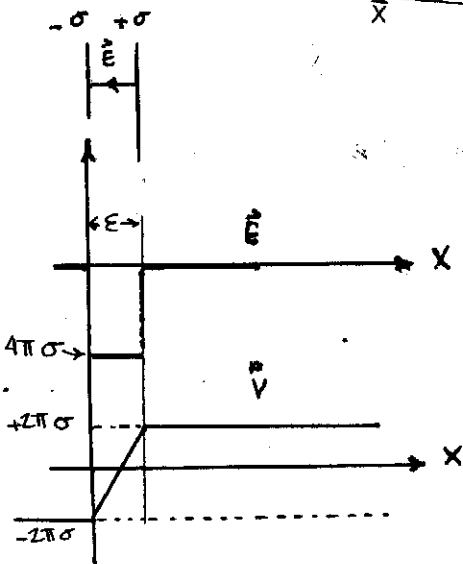


$$\frac{\vec{D} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS = \frac{D \cdot (\vec{x} - \vec{x}') \cdot d\vec{S}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \frac{D \cdot \cos\theta \cdot dS}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}$$

$$\frac{\vec{D} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dS = -D \cdot d\Omega$$

$$\phi(\vec{x}) = -D \int_S d\Omega$$

$$\frac{\cos\theta \cdot dS}{r^2} = d\Omega$$



$$\phi_2 - \phi_1 = 4\pi D$$

salto del potencial al surcar la capa

$$E_2^{\hat{n}} - E_1^{\hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$-\vec{\nabla}(\phi_2 - \phi_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma$$

$$\frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial \hat{n}} = 4\pi\sigma$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 4\pi\sigma \epsilon$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -4\pi D$$

● Momento dipolar por unidad de volumen

Potencial de un dipolo $\rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$

Potencial de muchos dipolos $\rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'$



(Polarización)
 $\vec{P}(\vec{x}) \equiv$ momento dipolar por unidad de volumen

V : volumen que incluye a la zona de polarización

$$\phi(\vec{x}) = \int_{V'} \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV'$$

$$\phi(\vec{x}) = \oint_{\partial V'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'$$

\Rightarrow Se pueden pensar como:

$\vec{P} \cdot \hat{n} \equiv \sigma_p$
 el borde del cuerpo polarizado tiene

$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv \rho_p$
 el cuerpo tiene en su interior

$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \neq 0$ con polarización no homogénea

● EL Potencial Vector

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'$$

Haremos una especie de desarrollo multipolar del potencial vector $\vec{A}(\vec{x})$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3}$$

($\vec{x}'=0$) $\rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}|} dV' + \frac{1}{c} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \int_{V'} \vec{x}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') dV'$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c|\vec{x}|} \int_{V'} \vec{J}(\vec{x}') dV' + \frac{1}{c|\vec{x}|^3} \int_{V'} \vec{x}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') dV'$$

Correspondencia al orden monopolar y el hecho de que sea nula refleja la no existencia de monopolos

sale integrando y con alguna identidad (usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$)

Recordar Biot & Savart vale para \vec{J} estacionaria $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left[\frac{1}{2c} \int_{V'} \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') dV' \right] \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$\equiv \vec{m} \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ en el origen

magnetización: densidad de momentos magnéticos

$$\mathcal{M}(\vec{x}') = \frac{1}{2c} [\vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}')]$$

momento magnético $\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_{V'} \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') dV'$

desplazado del origen

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

en \vec{x}'

a 1er orden

tiene $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right) = \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

mediante mucho álgebra vectorial

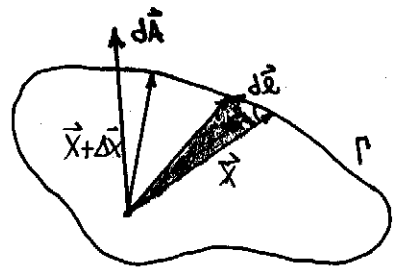
Lo esencial
 Bien lejos cualquier distribución de corriente localizada presenta como \vec{B} el \vec{B} de un dipolo magnético dado por $\vec{m}(\vec{x})$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

Corresponde a la aprox. de 1er orden

Interpretación de \vec{m}

\vec{m} puede pensarse como una espira



$$x \cdot dl \cdot \sin \alpha = dA$$

$$\frac{1}{2} \oint \vec{x} \times d\vec{l} = \vec{A}$$

área orientada

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{x} \times \vec{j} \, dV$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint \vec{x} \times d\vec{l}$$

Pasaje

$\int \vec{j} \, dV$
$\int d\vec{l} \, ds$
$\int d\vec{l} \, ds$
$\int d\vec{l}$

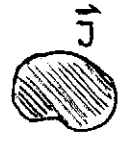
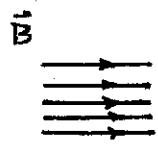
$$\vec{m} = \frac{I \vec{A}}{c}$$

corriente · área orientada

Ejemplo

espira circular
 $m = \frac{I}{c} \pi r^2$

Interacción de Campo Magnético con distribución de corriente



$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 + (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

expansión Taylor de \vec{B} con $\vec{x} \gg \vec{x}'$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x}') \, dV'$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = i \int d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{j}{c} \int dV \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \times \vec{B}_0 \, dV' + \frac{1}{c} \int \vec{j} \times (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \, dV'$$

= 0

* Mediante identidades vectoriales podemos llegar a ≠

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{m} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Importante
 Si el campo es homogéneo la fuerza es nula

pero como

$$\vec{F}_m = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \Rightarrow U_m = - \vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{F}_e = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \Rightarrow U_e = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

Energía de los dipolos en campos externos

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \int \vec{j} (\vec{x} \cdot \vec{B}) \, dV' = - \vec{\nabla} \times \frac{1}{2c} \vec{B} \times \int \vec{x}' \times \vec{j} \, dV'$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{B} \times \frac{1}{2c} \int \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \, dV'$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m}) = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

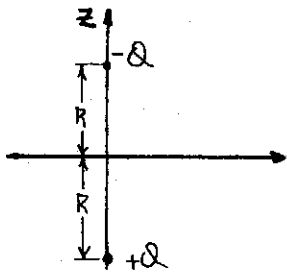
si \vec{B} es uniforme \Rightarrow la \vec{F} es nula

de un campo \vec{B} ext.
 La fuerza sobre una distribución de corrientes es el gradiente de cierta energía

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

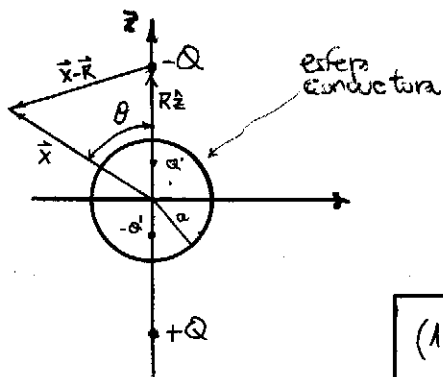
\vec{m} es una constante que depende de la distrib. de corriente

● Perturbación por un conductor sobre un \vec{E}_0



$\vec{E}_0 = \frac{2Q}{R^2} \hat{z}$ Campo uniforme si $Q \rightarrow \infty$ pero $\frac{2Q}{R^2} = (cte)$

El ϕ de la esfera es constante por ser conductor
 Puede definir $\phi|_{esfera} = 0$ pues $\phi(\infty) \neq 0$ porque hay p en el infinito.



$\phi_1 = \frac{-Q}{|\vec{x} - R\hat{z}|} + \frac{a/R Q}{|\vec{x} - \frac{a^2}{R}\hat{z}|}$ (carga superior)

$\phi_2 = \frac{+Q}{|\vec{x} + R\hat{z}|} - \frac{a/R Q}{|\vec{x} + \frac{a^2}{R}\hat{z}|}$ (carga inferior)

$(1 + \alpha)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha$ $\alpha \rightarrow 0$

$|\vec{x} - R\hat{z}| = \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{x} - R\hat{z}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx \cos\theta}} = \frac{1}{R \left(\frac{x^2}{R^2} + 1 - 2\frac{x}{R} \cos\theta \right)^{1/2}}$
 $\frac{1}{|\vec{x} - R\hat{z}|} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{R} \cos\theta \right)$

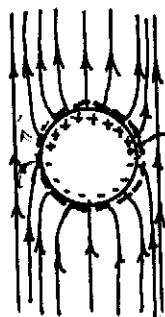
$\phi(r) \approx Q \left[\frac{1}{R} \left(1 + \frac{x}{R} \cos\theta \right) + \frac{a}{R \cdot x} \left(1 + \frac{a^2}{x \cdot R} \cos\theta \right) + \frac{1}{R} \left(1 - \frac{x}{R} \cos\theta \right) - \frac{a}{x \cdot R} \left(1 - \frac{a^2}{x \cdot R} \cos\theta \right) \right]$

$\phi(x) = -\frac{2Q}{R^2} x \cdot \cos\theta + \frac{a^3 \cdot 2Q}{x^2 \cdot R^2} \cos\theta \Rightarrow$ haciendo $x \equiv r$ y tomando el limite

$\phi(r) = -E_0 \cdot r \cdot \cos\theta + E_0 \cdot \frac{a^3}{r^2} \cdot \cos\theta$

es como un dipolo puntual $\rightarrow E_0 \cdot a^3 \hat{z} \cdot \vec{r} \rightarrow E_0 \cdot a^3 \hat{z} \equiv \vec{p}$
 $= \frac{E_0 \cdot a^3 \cdot \cos\theta}{r^2}$

La carga total (estuvo aislada) sobre la esfera es nula (todo el tiempo)



un Gauss aquí refleja $q_n = 0$

$\phi(r=a) = 0$

• Separación de Variables

separamos los problemas en regiones donde vale $\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow$ las fronteras tendrán la $\rho(\vec{r})$ en general en forma de σ, λ .

* Coordenadas cartesianas:

Estamos intentando resolver $\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$

se pide $\phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \Rightarrow$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad \therefore \text{cada término es una constante}$$

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_m e^{\pm i\alpha_m x} \cdot e^{\pm i\beta_n y} \cdot e^{\pm \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z}$$

constante general

condiciones periódicas en x, y [trig.]

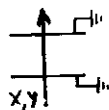
[hip.]

solución general (habrá que adaptar según las condiciones de contorno)

$$A \cdot e^{\pm i\alpha x} = A_x \cdot \cos(\alpha x) + B_x \cdot \sin(\alpha x)$$

$$A \cdot e^{\pm \gamma z} = A_y \cdot \cosh(\gamma z) + B_y \cdot \sinh(\gamma z)$$

cuando necesito dos axes por ejemplo:



Corresponden a condiciones de potencial periódicas

corresponde a atravesar densidades de carga

* Coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot Q(\varphi)$$

se puede separar de modo que

" $\Theta(\theta, \varphi)$ armónico esférico,

osc. armónico en φ

$$Q = e^{\pm i\alpha\varphi}$$

* si usamos $0 \leq \varphi < 2\pi \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = m$

* simetría azimutal $\Rightarrow m = 0$

[rotación en φ] $Q = G \cdot \varphi + H$

(cte.)

$$R(r) = A_r \cdot r^l + B_r \cdot r^{-l-1}$$

$$\Theta(\theta) = C_\theta \cdot P_l^m(\cos \theta) + D_\theta \cdot Q_l^m(\cos \theta)$$

▼ Polinomio de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} [x^2 - 1]^l$$

Rodriguez

$P_l(\cos \theta) \equiv$ Pol. Legendre 1^{da} especie

$Q_l(\cos \theta) \equiv$ Pol. Legendre 2^{da} especie

{ P_l } son un conjunto completo y ortogonal en $-1 \leq x \leq 1$ (ó bien en $0 \leq \theta \leq \pi$)

* $Q_l^m(\cos\theta)$ tiene problemas en $\theta=0, \theta=\pi$ (eje \hat{z}) [si está el eje \hat{z} no podemos usar Q_l^m]
 \Rightarrow en problemas que incluyen el eje z solo se usan $P_l^m(\cos\theta)$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] [C_m P_l^m + D_m Q_l^m] [E_m \cos(m\varphi) + F_m \sin(m\varphi)]$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \dots [G_l \varphi + H_l]$$

\rightarrow si $m=0$

Esto es lo que hace zafar del punto singular en $x = \cos\theta = 1$

$$\ell = l(l+1)$$

$$-l < m < l$$

$$x^2 = m^2$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l z^l$$

$|z| < 1$

Algunas sumas de series

Las constantes $A_l, B_l, C_m, D_m, E_m, F_m$ se ajustan con el $\phi(r \rightarrow \infty), \phi(r \rightarrow 0), \phi(z=1), \phi(z=-1)$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} [1-x^2]^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} [x^2-1]^l$$

▲ Polinomio asociado de Legendre

$$P_l(1) = 1 \quad \forall l$$

$$P_l(-1) = (-1)^l \quad \forall l$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

En esferas las constantes de separación están asociadas

- $R(r)$ asociada con l
- $\Theta(\theta)$ asociada con l, m
- $Q(\varphi)$ asociada con m

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta) \cdot P_{l'}(\cos\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta = \delta_{ll'}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) \cdot P_{l'}^m(x) \cdot dx = \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \cdot \delta_{ll'}$$

ortogonalidad

● Detalles Solución Problemas de Potencial

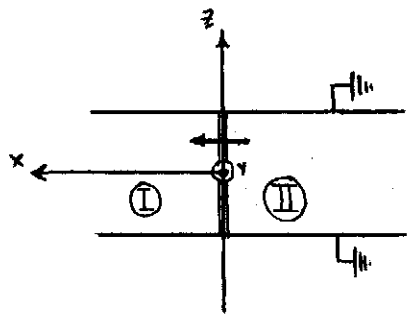
Potencial par en una coordenada \Rightarrow uso funciones pares [Cosenos]

● Continuidad del potencial \rightarrow

$$\phi_I(x=0) = \phi_{II}(x=0)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_I}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0} = -4\pi\sigma \Big|_{x=0}$$

● salto en el campo



* Si tengo condiciones periódicas en la coordenada iz^n (sen, cos) trig \Rightarrow se discretizan $m, n \Rightarrow$ tengo $\sum_m \sum_n$ [serie de Fourier]

* Si tengo condiciones no periódicas en la coordenada iz^n (sen, cos) hip. \Rightarrow tengo $\int dk$ [Integral de Fourier]

Detalle

El salto en el campo se hace siguiendo la normal:

$E_I^{\hat{n}} - E_{II}^{\hat{n}} = 4\pi\sigma$

$-\frac{\partial \phi_I}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} = 4\pi\sigma$

En general tomamos: $\alpha^z + \beta^z = \gamma^z$

$k_{\hat{e}_1}^z + k_{\hat{e}_2}^z = k^z \hat{e}_z$

Pudiéramos discretizar los k 's luego

* Sobre la ecuación de salto en el campo aplicamos ortogonalidad y despejamos coeficientes en función de σ

$k_{\hat{e}_1}$ \swarrow discreto \searrow continuo

$\sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_m \hat{e}_1) + \sin(k_m \hat{e}_1)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i k \cdot \hat{e}_1} dk$

se usa $e^{i k \cdot \hat{e}_1}$ para que la integral converja en lugar de $[\cos(k \hat{e}_1) + \sin(k \hat{e}_1)]$

Expansiones Ortonormales

$$\int_a^b U_n^* \cdot U_m \cdot d\xi = \delta_{mn} \quad U_i \text{ ortonormales} \Rightarrow$$

en (a, b) $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot U_n(\xi)$ con $a_n = \int_a^b U_n^* \cdot f(\xi) \cdot d\xi$

↑ la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\vec{x}') \cdot U_n(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{CLAUSURA}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \cdot P_l(\cos \gamma)$$

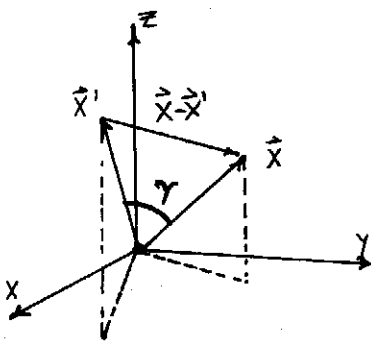
◀ Desarrollo en Polinomios de Legendre para el ángulo entre vectores [esféricas]

en coordenadas esféricas, donde $\gamma = \gamma(\theta, \varphi)$ es el ángulo entre vectores

γ : ángulo entre vectores

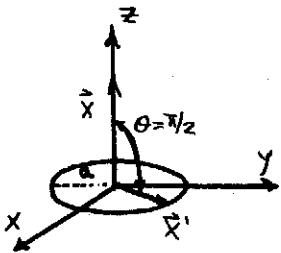
teorema del coseno

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{x}'|^2 - 2|\vec{x}||\vec{x}'| \cos \gamma$$



Prolongación Analítica

consiste en "prolongar" una solución restringida a todo el resto del espacio regándole los polinomios de Legendre [por ejemplo en el eje polar]



calculo f3

$$\phi(r, \frac{\pi}{2}) = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q a^l}{r^{l+1}} P_l(0) & r > a \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q r^l}{a^{l+1}} P_l(0) & r < a \end{cases}$$

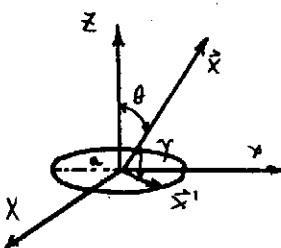
↳ ponemos en serie

$P_l(0)$ tiene términos pares solamente (los impares son nulos)

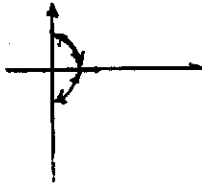
$$\Rightarrow \phi(r, \frac{\pi}{2}) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{a^{2n}} P_{2n}(0) \quad \text{con } P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}$$

∴ para todo el espacio será

$$\phi(r, \theta) = \frac{Q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(0) \cdot P_{2n}(\cos \theta) \quad r < a$$



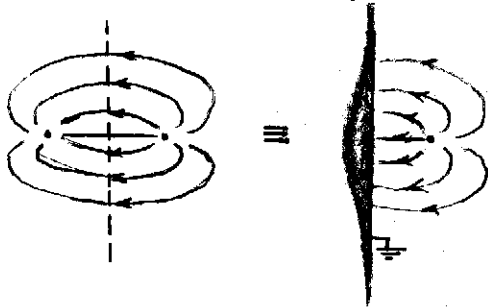
El hecho de que solo vivan los pares viene porque ϕ es par pues hay simetría de reflexión en plano XY. Lo que sucede de $(0/\pi/2)$ es igual a lo que sucede de $(\pi/2/\pi)$.



Los problemas con simetría de revolución en torno a \hat{z} pueden ser resueltos con el método de la "prolongación analítica".

La idea central es que si dos soluciones del potencial coinciden en un conjunto de puntos (como ser el eje azimutal) \Rightarrow son la misma solución.

● Comentario Multipolos



Estos dos problemas son equivalentes, pero multipolarmente tienen desarrollos diferentes. El problema es que el metal a tierra tendrá carga hasta el infinito y entonces no podemos tener un radio de convergencia.

• Armónicos Esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}$$

Los armónicos esféricos son un conjunto ortonormalizado en $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$Y_{l-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \cdot Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cdot Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \cdot Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \cdot d\theta = \delta_{l'l} \cdot \delta_{m'm}$$

ORTONORMALIDAD

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \cdot \delta(\cos\theta - \cos\theta')$$

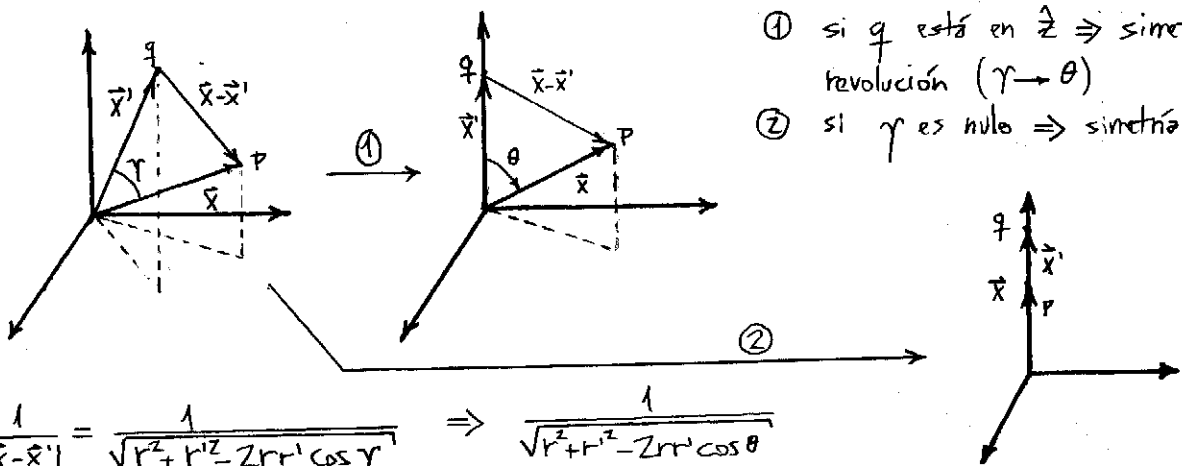
COMPLETITUD

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

◀ Una $f(\theta, \varphi)$ cualquiera $\in L^2$ se puede expresar en armónicos esféricos

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} \cdot r^l + B_{lm} \cdot r^{-(l+1)}] \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

◀ Potencial en coordenadas esféricas



- ① si q está en $\hat{z} \Rightarrow$ simetría de revolución ($\gamma \rightarrow \theta$)
- ② si γ es nulo \Rightarrow simetría de revolución

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}$$

$|\vec{x}| = r$
 $|\vec{x}'| = r'$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}} = \frac{1}{|r - r'|} \begin{cases} * r' < r \\ * r' > r \end{cases}$$

$$\frac{1}{r(1 - \frac{r'}{r})} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}}$$

$$\frac{-1}{r'(\frac{r}{r'} - 1)} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}}$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \Rightarrow \text{podemos pensar en } 1 = P_l(1) \neq l \Rightarrow 1 = P_l(\cos 0) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{\gamma=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \cdot P_l(\cos \theta)$$

◀ será el ϕ de una carga unitaria en \hat{z} y evaluado en \hat{z}

⇒ Esto es hacer prolongación analítica.

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \cdot P_l(\cos \gamma)$$

◀ será el ϕ de una carga unitaria en cualquier parte (descompuesto en Polinomios de Legendre)

Aquí $\gamma = \gamma(\theta, \varphi) \Rightarrow$ se puede llegar a una descomposición similar utilizando armónicos esféricos

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{r^{l+1}} \cdot \frac{4\pi}{2l+1} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

ϕ
(descompuesto en armónicos esféricos)

teorema de adición de los armónicos esféricos

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \int_{V'} \rho(\vec{x}') \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \cdot \frac{r'^l}{r^{l+1}} \right] \cdot dV'$$

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\int_{V'} \rho(\vec{x}') \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \cdot r'^l \cdot dV' \right) \cdot \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

$= q_{lm}$ coeficiente multipolar de orden lm

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \cdot \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1) \cdot r^{l+1}}$$

$$\phi_{lm}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{2l+1} \cdot q_{lm} \cdot \frac{Y_{lm}}{|\vec{x}|^{l+1}} \Rightarrow \vec{E}_{lm}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi_{lm}(\vec{x})$$

• Separación de Variables [cilíndricas]

$$\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \cdot Q(\varphi) \cdot Z(z) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R \cdot \rho} \frac{dR}{d\rho}}_{\text{la ecuación de Bessel}} + \underbrace{\frac{1}{Q \cdot \rho^2} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{=-v^2} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{=k^2} = 0$$

$$Z = e^{\pm kz}$$

$$Q = e^{\pm i\nu\varphi}$$

$0 \leq \varphi < 2\pi \Rightarrow \nu \in \mathbb{Z}$
 si la variable φ no corre de 0 a $2\pi \Rightarrow \nu \notin \mathbb{Z}$

$J_\nu, J_{-\nu}$
 son LD
 \Rightarrow
 $\nu \in \mathbb{Z}$

con $\nu \notin \mathbb{Z}$	con $\nu \in \mathbb{Z}$
$J_\nu(k\rho)$	$J_\nu(k\rho)$
$J_{-\nu}(k\rho)$	$N_\nu(k\rho) \equiv \frac{J_\nu(k\rho) \cdot \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(k\rho)}{\sin(\nu\pi)}$

función de Bessel 1^{ra} especie
 función de Bessel 2^{da} especie [de Von Neumann]

- * $N_\nu(k\rho)$ tiene problemas en el origen \rightarrow no sirve si el dominio incluye al eje \hat{z}
- * $J_\nu(k\rho)$ tiene problemas en $\rho \rightarrow \infty$

También se suelen definir:

$$H_\nu^{(1)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) + i \cdot N_\nu(k\rho) \rightarrow \text{función de Bessel de 3^{ra} especie}$$

$$H_\nu^{(2)}(k\rho) = J_\nu(k\rho) - i \cdot N_\nu(k\rho) \rightarrow \begin{matrix} \text{Hankel 1^{ra} especie} \\ \text{Hankel 2^{da} especie} \end{matrix}$$

• Cambio de Signo de la constante de separación

$$\dots + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$= -k^2$$

$$Z = e^{\pm ikz}$$

$$Q = e^{\pm i\nu\varphi}$$

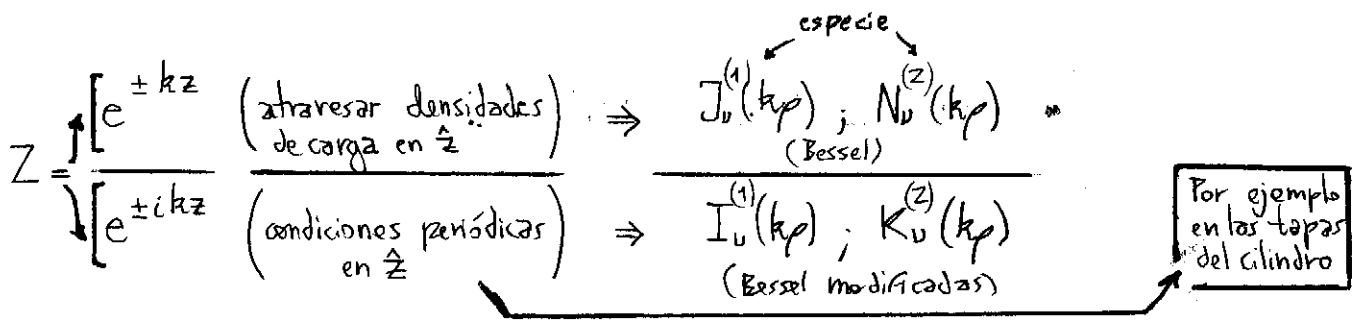
Funciones de Bessel modificadas
 1^{ra} especie
 2^{da} especie

$$I_\nu(k\rho) = i^{-\nu} \cdot J_\nu(k\rho)$$

$$K_\nu(k\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \cdot H_\nu^{(1)}(k\rho)$$

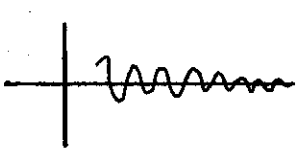
Las Bessel modificadas tienen argumento imaginario

- * Luego I_ν tendrá problemas en $\rho \rightarrow \infty$, y K_ν problemas en $\rho = 0$ [en el eje \hat{z}]



$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{z}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{z}\right)^{2j}$$

◀ Función de Bessel de ν especie



Las funciones de Bessel tienen infinitos ceros \Rightarrow

$$J_\nu(x_{n\nu}) = 0 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}; \nu \text{ fijo } x_{n\nu} \text{ es un cero de } J_\nu$$

$\sqrt{\rho} \cdot J_\nu(x_{n\nu} \rho/a)$ con $\nu \geq 0$ fijo es un conjunto ortogonal completo en $0 \leq \rho \leq a$

serie de Fourier-Bessel

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\nu} J_\nu(x_{n\nu} \frac{\rho}{a}) \quad \text{con } 0 \leq \rho \leq a$$

radio cilíndrico

$$f(\rho=a) = 0$$

$$A_{n\nu} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{n\nu})} \int_0^a \rho \cdot f(\rho) \cdot J_\nu\left(\frac{x_{n\nu} \rho}{a}\right) \cdot d\rho$$

$$\int_0^a \rho \cdot J_\nu\left(\frac{x_{n\nu} \rho}{a}\right) \cdot J_\nu\left(\frac{x_{m\nu} \rho}{a}\right) \cdot d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{n\nu})]^2 \cdot \delta_{nn'} \quad \text{ORTOGONALIDAD}$$

k

Sea $\phi(\rho=a) = 0 \Rightarrow$
 $J_\nu(ka) = 0 \Rightarrow ka = x_{n\nu} \Rightarrow$
 $J_\nu\left(\frac{x_{n\nu} \rho}{a}\right)$

$k = \frac{x_{n\nu}}{a}$ si $0 \leq \rho \leq a \rightarrow$ si está acotado en $\rho \Rightarrow$ es discreto y si suma $\sum_{n=1}^{\infty}$

$\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}$ si $0 \leq \varphi < 2\pi$

Si no está acotado en $\rho \Rightarrow$ usamos $\int_0^\infty dk$

$$\int_0^\infty x \cdot J_\nu(kx) \cdot J_\nu(k'x) \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot \delta(k-k')$$

COMPLETITUD

k en general será función de $n \in \mathbb{N}$ por condición periódica en tapas (en \hat{z}) o en cilindros (en $\hat{\rho}$)

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{n\nu} \begin{cases} J_\nu(k\rho) \\ I_\nu(k\rho) \end{cases} + B_{n\nu} \begin{cases} N_\nu(k\rho) \\ K_\nu(k\rho) \end{cases} \right] \left[C_k \cdot \begin{cases} e^{\pm kz} \\ e^{\pm ikz} \end{cases} \right] \cdot \left[D_{k\nu} \cdot e^{\pm i\nu\varphi} \right]$$

$k = k(n)$

• Usamos $\sin(kz) + \cos(kz)$ si hay discretización

• Desarrollo dipolar del campo magnético

$$\vec{A}(\vec{x}) \underset{\text{de un dipolo}}{=} \frac{\vec{m} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{m} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_{V'} \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \cdot dV' \Leftarrow$$

es el potencial vector de una distribución de momento dipolar magnético con densidad $\vec{M}(\vec{x}')$.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' + \oint_{S'} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dS'$$

Se pueden pensar como corrientes \vec{J}_m y \vec{g}_m

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}_m}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' + \frac{1}{c} \oint_{S'} \frac{\vec{g}_m}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dS'$$

• Medios Materiales

- * Dieléctricos
- * Medios magnéticos
 - imán inducido → Paramagnético
 - imán permanente → Diamagnético
 - ferromagnético
- * conductor
 - perfecto
 - buen conductor
 - mal conductor

Polarización

$$\vec{P} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta V}$$

dipolo eléctrico por unidad de volumen

$$\phi(\vec{x}) = \iint_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int_{V'} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'$$

$$\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_p \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho = 4\pi(\rho_L + \rho_p) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) - 4\pi \rho_p = 4\pi \rho_L$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 4\pi \rho_L \Rightarrow$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_L$$

linealidad → $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ MLIH

$$\vec{D} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

χ_e susceptibilidad eléctrica
 ϵ permitividad eléctrica

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} &= 4\pi \sigma_L \\ (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n} &= -\sigma_p \end{aligned}$$

Magnetización

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta V}$$

momento dipolo magnético por unidad de volumen

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{c(\vec{\nabla} \times \vec{M})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \iint_{S'} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\vec{J}_M}{c} \quad \vec{M} \times \hat{n} = \frac{\vec{g}_m}{c}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J}_L + \vec{J}_M)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\vec{J}_M}{c}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

χ_m susceptibilidad magnética
 μ permeabilidad magnética

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \vec{g}_L \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0 \end{aligned}$$

* imán permanente [Hay \vec{M} aún en ausencia de campo]

$$\vec{M} \neq \gamma_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \neq \mu \vec{H} \quad \text{No es un medio lineal}$$

La relación entre \vec{B} , \vec{H} dependen de la historia del medio.

$$\frac{\vec{J}_m}{c} = (\nabla \times \vec{M})$$

$$\text{si } \vec{J}_L = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = 0} \Rightarrow \vec{H} = -\nabla \phi_m$$

Potencial escalar magnético

$$\nabla \cdot (\vec{H} + 4\pi \vec{M}) = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -4\pi \nabla \cdot \vec{M}$$

$$-\nabla \cdot \nabla \phi_m = -\nabla^2 \phi_m = -4\pi \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = -4\pi \rho_m$$

$$\text{si } \boxed{\nabla \cdot \vec{M} \equiv -\rho_m}$$

$$\boxed{\vec{M} \cdot \hat{n} \equiv \sigma_m}$$

$$\phi_m = \frac{1}{c} \oint_S \frac{\vec{M} \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{c} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{A} = + \oint_S \vec{M} \times \hat{n} \cdot d\vec{S}' + \int_V \nabla \times \vec{M} dV'$$

Estas dos soluciones son equivalentes

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_L dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$$= \int_V \frac{\rho_L dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV$$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_L(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

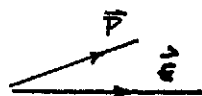
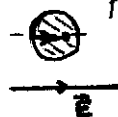
$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\rho_L - \nabla \cdot \vec{P}] \Rightarrow \text{Se puede asociar}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_P}$$

átomo neutro



\vec{P} inducido



$$\vec{P} = \gamma_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

ϵ depende de la temperatura

• Polarización & Magnetización

\vec{P}, \vec{M} suelen depender de los campos externos \rightarrow
 $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$
 $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$

$$\vec{M} \cong M_{0i} + \left. \frac{\partial M_{0i}}{\partial H_j} \right|_{H=0} \cdot H_j$$

$$\vec{P} \cong P_{0i} + \left. \frac{\partial P_{0i}}{\partial E_j} \right|_{E=0} \cdot E_j$$

En general vale que $\vec{M}_0=0, \vec{P}_0=0 \Rightarrow$

$$\vec{M} = \sum_i \sum_j \left(\left. \frac{\partial M_{0i}}{\partial H_j} \right|_{H=0} \cdot H_j \right)$$

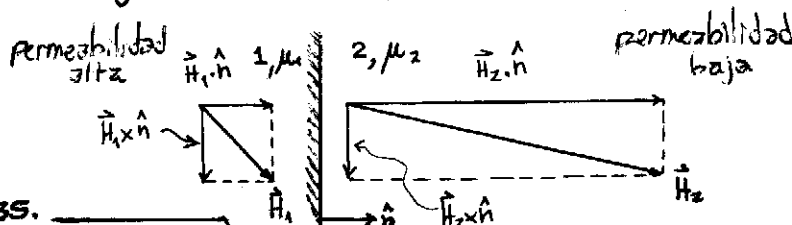
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_x}{\partial H_x} & \frac{\partial M_x}{\partial H_y} & \frac{\partial M_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial H_x} & \frac{\partial M_y}{\partial H_y} & \frac{\partial M_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial H_x} & \frac{\partial M_z}{\partial H_y} & \frac{\partial M_z}{\partial H_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

$\equiv \underline{\underline{\chi_m}}$ (un tensor)

$$\vec{M} = \underline{\underline{\chi_m}} \cdot \vec{H}$$

$$\vec{P} = \underline{\underline{\chi_0}} \cdot \vec{E}$$

• Algún Detalle de Contornos Magnéticos



Sea $\vec{J}_c = 0 \Rightarrow$

$$\hat{n} \times \vec{H}_1 = \hat{n} \times \vec{H}_2$$

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n} = \vec{B}_2 \cdot \hat{n}$$

$$\mu_1 \vec{H}_1 \cdot \hat{n} = \mu_2 \vec{H}_2 \cdot \hat{n}$$

$$H_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1$$

$$H_2 \gg H_1$$

OBS.
 En el límite $\vec{H}_2 \perp$ superficie del medio y es similar al \vec{E} a la salida de un conductor; las superficies de materiales de permeabilidad muy alta son ~ "equipotenciales"

si $\mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \gg 1$$

Medio anisótropo

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \text{ es decir } \vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}$$

• Consideraciones en Medios Magnéticos

Fuera de un imán permanente $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_T \Rightarrow$ parecería que poderíamos definir

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_m^0$$

Pero fallará en la superficie de separación donde hay \vec{J}_m y por ende \vec{J}_T .

Lo que sí funciona es $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L$ que vale dentro y fuera del imán

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi_m^H \rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi_m^H) = -4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 4\pi \rho_m^H$$

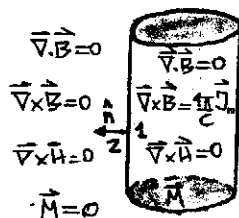
$$\boxed{-\nabla^2 \phi_m^H = 4\pi \rho_m^H}$$

Una ecuación de Poisson para el ϕ_m^H

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(-\vec{\nabla} \phi_m^H + \vec{\nabla} \phi_m^0) \cdot \hat{n} = 4\pi \vec{M} \cdot \hat{n}$$

$$(-\vec{\nabla} \phi_m^H + \vec{\nabla} \phi_m^0) \cdot \hat{n} = 4\pi \vec{M} \cdot \hat{n}$$



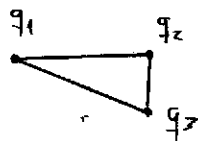
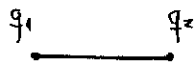
● Consideraciones Energéticas

$$\vec{F} = q \vec{E} = q \cdot (-\vec{\nabla} \phi) = -\vec{\nabla} U$$

$$\Delta U = W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{e} \rightarrow \Delta U = - \int_C \vec{\nabla}(q\phi) \cdot d\vec{e} = -q \cdot \Delta \phi$$

$$\delta U = \vec{F} \cdot \delta \vec{x}$$

$$\frac{\delta U}{\delta x} = F_x$$



$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} \right)$$

$$W_3 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} + q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \left(q_1 \frac{q_2}{r_{12}} + q_1 \frac{q_3}{r_{13}} + q_2 \frac{q_1}{r_{21}} + q_2 \frac{q_3}{r_{23}} + q_3 \frac{q_1}{r_{31}} + q_3 \frac{q_2}{r_{32}} \right)$$

$$\Rightarrow W_N = \sum_{i,j} q_i q_j \frac{1}{r_{ij}} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} q_i \phi_{ij} [1 - \delta_{ij}]$$

↑
sume los j

Potencial sobre q_i debido a q_j

$$W_N = \sum_i \frac{1}{2} q_i \phi_i$$

↑
Potencial de todas las cargas producido en la posición de q_i

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{x}) \cdot \phi(\vec{x}) \cdot dV$$

Supongamos ahora la presencia de un medio material:

$$\delta W = \frac{1}{2} \rho \cdot \delta V \cdot \phi$$

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D})}{4\pi} \delta V \cdot \phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} \cdot \phi) = \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi + \phi \cdot \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D})$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta V \left[\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} \cdot \phi) - \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi \right]$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \left(\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} \cdot \phi) \cdot dV + \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \right) \Rightarrow$$

$\int_S \vec{D} \cdot \phi \cdot d\vec{S}$
→ 0
si S es muy grande

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV$$

Este cálculo es a temperatura constante (el medio material no altera su ϵ)

— Proceso Iso térmico —

Uno asume que $\epsilon = \epsilon(\vec{x})$ y no varía con el tiempo. En la práctica ϵ varía con la temperatura

trabajo necesario para formar una configuración en presencia de medios materiales.

Vale para medios lineales; sin imponer isotropía u homogeneidad.

• Interpretación termodinámica de U

incremento de energía a T constante

$$U = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ij} E_i E_j$$

con $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ← Tensor simétrico

Pero ϵ es función de T (temperatura) ⇒ no podemos decir que:

$$dU = dW$$

valga en general

pues también hay variación del calor ⇒ (no ser que sea un proceso isotérmico)

La energía que representa $\frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D}$ es la energía libre de Helmholtz a T constante

$$dU = dQ - dW$$

$$F = U - T.S$$

$$dF = dU - T.dS - S.dT$$

$$dF|_T = dU - T.dS = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \cdot dV$$

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V$$

$$dF = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \cdot dV - S \cdot dT$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_T$$

Sea un medio isotropo ⇒ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{\epsilon} dV \Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{D} \cdot \vec{D} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dV$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV = - \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$S = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$$U = F + T.S = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{\epsilon} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \cdot dV$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{1}{\epsilon} \left[\vec{D} \cdot \left(\vec{D} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial T} T \right) \right] dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{\epsilon} \left(\epsilon + T \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right) dV$$

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\epsilon} \frac{\partial (T \cdot \epsilon)}{\partial T} dV$$

Para medios lineales e isotropos

2^a Ley Termodinámica

$$\delta Q = T \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \cdot \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dV$$

$\epsilon > 0, T > 0, \frac{\partial \epsilon}{\partial T} < 0$ si el ϵ decrece con T ⇒ el cuerpo se enfría $\delta Q < 0$

● Teorema de Thomson

$$\Delta W = \int_V \phi \cdot \delta \rho \cdot dV$$

Las cargas en un conductor se redistribuirán hasta que F alcance su valor mínimo.

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (-\vec{\nabla} \phi \cdot \delta \vec{D}) \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \int_V [\phi \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} - \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} \phi)] \cdot dV$$

$$\Delta W = \frac{1}{8\pi} \sum_i \int_V \phi_i \cdot 4\pi \rho_i \cdot dV - \frac{1}{8\pi} \int_V \delta \vec{D} \phi \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \int_V \delta \rho_i \cdot dV = 0$$

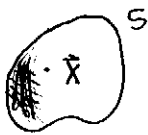
Se suma sobre cada conductor que se halla a ϕ constante ϕ_i

Lo podemos dejar desvanecerse

La carga total en cada conductor no varía porque están aislados y por estar en equilibrio $\delta \rho_i = 0$

Un sistema de interacciones electrostáticas nunca puede llegar a un equilibrio estable.
El ϕ no tiene mínimo ni máximo en el interior de una región

Sea una región donde $\vec{\nabla} \phi|_S < 0 \Rightarrow$



$$\oint_S \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{S} < 0 \Rightarrow$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) \cdot dV = \int_V \nabla^2 \phi \cdot dV = 0 \rightarrow \text{No vale lo que supusiéramos}$$

● Esfera con magnetización Uniforme

$$\vec{M} = M_0 \hat{z} \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \end{cases}$$

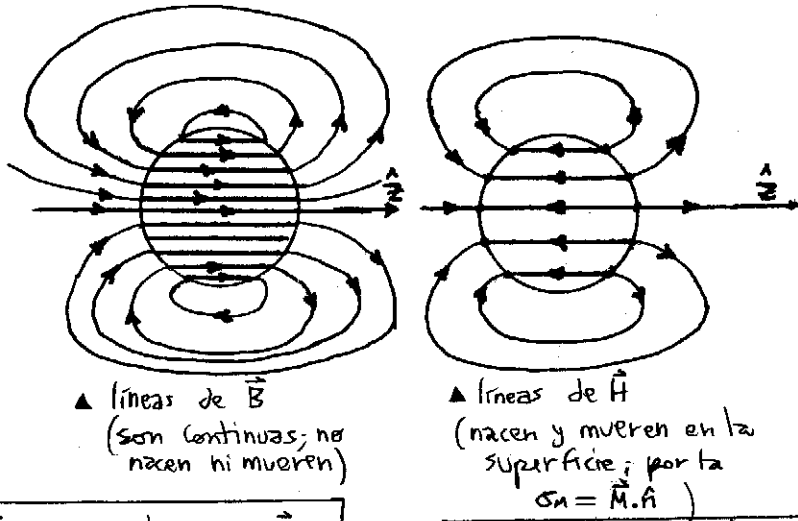
Usando el ϕ_m se llega a:

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= -\frac{4\pi}{3} \vec{M} & I = \text{interior esfera} \\ \vec{B}_I &= \frac{8\pi}{3} \vec{M} \end{aligned}$$

Afuera el ϕ_m es el de un dipolo con:

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M}$$

y esto vale no solo para grandes distancias sino incluso hasta la superficie. [no hay multipolos subsiguientes].



▲ líneas de \vec{B}
(son continuas; no nacen ni mueren)

▲ líneas de \vec{H}
(nacen y mueren en la superficie; por la $\sigma_n = \vec{M} \cdot \hat{n}$)

\vec{H} es menos intenso que \vec{B}
pues es $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$

En el interior \vec{H} y \vec{B} tienen sentidos opuestos.

● Histeresis

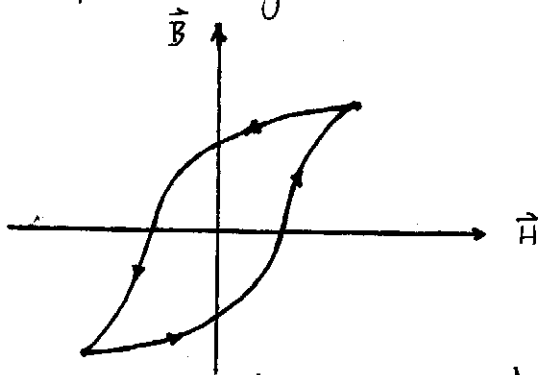
Los campos fundamentales son \vec{E}, \vec{B} . \vec{D}, \vec{H} se introducen para tener en cuenta en promedio los efectos de ρ, \vec{j} de las cargas y corrientes atómicas.

Para medios magnéticos (diamagnéticos o paramagnéticos) hay relación lineal:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Pero para ferromagnéticos es: $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H})$ {con \vec{F} no lineal}. Se verifica un fenómeno de histeresis

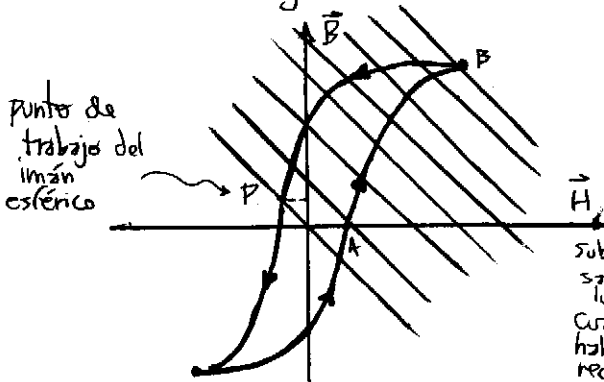
\vec{B} es una función multivaluada de \vec{H} y \vec{F} depende de la historia del material.



\vec{H} se conoce como campo desmagnetizante

● Esfera ferromagnética en campo externo

Si sumergimos la esfera en un \vec{B}_0 uniforme tenemos:



Subimos \vec{B}_0 hasta saturar la esfera y luego cuando $\vec{B}_0 = 0$ nos hallamos en P. Hemos recorrido ABC.

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{M} \\ \vec{B}_I &= \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3} \vec{M} \end{aligned}$$

$$\downarrow 2\vec{H}_I + \vec{B}_I = 3\vec{B}_0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Podemos eliminar} \\ \vec{M} \end{array} \right\}$$

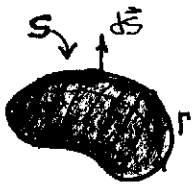
Usando la curva de histeresis relacionamos \vec{B}_I, \vec{H}_I

$$\vec{B}_I = 3\vec{B}_0 - 2\vec{H}_I$$

Un imán es tanto más estable cuando \vec{H}_E es pequeño ($\vec{M} \parallel$ superficie, por ejemplo)



● Ley de Faraday e Inducción



$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$S = \partial r$$

El signo menor es la "ley de Lenz" la fem se opone al cambio de flujo

Pero la variación de flujo puede deberse a variación de \vec{B} o a deformación del circuito \Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_r (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow$$

$$\oint_r \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \oint_r (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\oint_r (\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

con $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}$
Campo medido en el laboratorio

Ley de Faraday

$$\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

\Rightarrow usando Stokes

forma diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Este \vec{E} no es conservativo

● Corrección a las ecuaciones

Ley de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

de monopolos magneticos

Ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Ley de Ampere

\rightarrow con $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (Corrientes estacionarias)

Pero la ecuación relacionada con la ley de Ampere está incompleta así (se dedujo de \vec{J} estacionaria) Maxwell mete la continuidad (en ~1865) \Rightarrow

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{4\pi} = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

\Rightarrow

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ley de Ampere

Una nueva \vec{J}

con $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv$ corriente de desplazamiento

Las cuatro ecuaciones están completas y son las "Ecuaciones de Maxwell"

• Potenciales

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad [1]$$

Dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, al igual que en magnetostática podemos derivar \vec{B} del potencial vector \vec{A} . Pero \vec{E} no tiene rotor nulo $\Rightarrow \nexists \phi$ potencial escalar.

Tomando:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

podemos pensar en un potencial general Φ tal que:

$$\boxed{-\vec{\nabla} \Phi = \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

OBS
 Φ no tiene el significado de trabajo como el ϕ electrostáticos

Podemos expresar [1] con $\vec{A}, \Phi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \rightarrow & \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} & \rightarrow & \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = -4\pi\rho}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}}$$

\vec{A} = potencial vector
 Φ = potencial generalizado

Las ecuaciones para los potenciales pero están acopladas

• Cambio de Gauge

Podemos desacoplarlas usando la arbitrariedad de los potenciales

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \\ -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \vec{E} \end{aligned} \quad [2]$$

$$\vec{A} \Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad \text{pero:} \quad -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \Lambda}{\partial t} = \vec{E} \Leftrightarrow$$

$$\Phi \Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad -\vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

con \vec{A}', Φ' siguen valiendo [2] pero queremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \left(\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)}$$

forman la transformación de Gauge

\Rightarrow usando los nuevos potenciales (que renombrar sin apóstrofe para no confundir) es:

Los potenciales \vec{A}, Φ satisfacen sendas ecuaciones de onda

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}$$

Gauge de Lorentz (es la "condición de Lorentz")

Podemos imponer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$: Gauge de Coulomb \Rightarrow

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad (\text{Ecuación de Poisson})$$

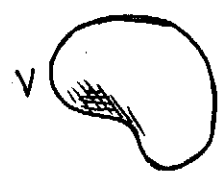
Los resultados físicos deben ser independientes del gauge

El campo se describirá como el estacionario {electrostático} $\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0} + \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{=0} = 0$$

● Conservación de la Energía [Poynting Theorem] (1884)

Sea una región con volumen fijo. Existen \vec{E}, \vec{B} solamente que varían con el tiempo. Parece que la energía debe conservarse



$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \rightarrow \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

\vec{B} no hace trabajo porque $\vec{F}_m \perp \vec{v}$

$$\delta U = q \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\frac{dU}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

← una carga q

Potencia entregada por los campos \vec{E} y \vec{B} dentro de V.

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho \cdot dV \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

CONVERSIÓN de ENERGÍA EM en ENERGÍA Mecánica o térmica

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot dV$$

identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

$$= \int_V \frac{c}{4\pi} \left([\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})] - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} \right) \cdot dV$$

$$= \int_V \left(\frac{c}{4\pi} \left[-\vec{H} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right] - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} \right) \cdot dV$$

$$= \int_V \left(\frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} \right) \cdot dV - \int_V \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dV$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} \right) \cdot dV - \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dV$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) \cdot dV - \frac{c}{4\pi} \oint_{S \equiv \partial V} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$$

VECTOR DE POYNTING

$$U = \frac{1}{8\pi} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})$$

DENSIDAD DE ENERGÍA EM

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \vec{H} \cdot \vec{B}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E} \cdot \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \Rightarrow$$

conservación de la energía

$$-\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$$

(por unidad de volumen)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Ley de conservación

NOTA
 \vec{S}, u no están relacionados linealmente con \vec{E}, \vec{H}

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dV + \int_V \nabla \cdot \vec{S} \cdot dV = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV \Rightarrow$$

Variación de la energía total

Potencia entregada por los campos sobre las fuentes

Flujo de energía a través de la región transportado por el vector de Poynting

$\vec{j} \cdot \vec{E} \equiv$ trabajo hecho por unidad de tiempo y de volumen por los campos

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

Conservación de la energía local

$$\frac{d}{dt}(U_{con}) + \frac{d}{dt}(U_{mec}) = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

Conservación del Momento

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \text{pasando al continuo es:}$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_V [\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}] \cdot dV$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_V \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{c} \left(\frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \right] \cdot dV$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_V \left(\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{H} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{D} \times \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} + \epsilon \mu \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[(\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \epsilon \mu \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] \right] \cdot dV$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} + \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} (\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{E} \times (-\nabla \times \vec{E}) \frac{\epsilon \mu}{c} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{B}) \right] \cdot dV$$

= 0
lesumo cero

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} + \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} (\nabla \cdot \vec{D}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \times \vec{H}) \right] \cdot dV$$

con identidades se llega a:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ \left[\vec{E} \cdot \vec{D} - \frac{1}{2} \vec{I} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \right] + \left[\vec{H} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{I} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \right] \right\} \cdot dV$$

↑
prod tensorial

Encontramos que podemos definir la conservación como flujo de un tensor de 2do rango.

Tensor de esfuerzos de Maxwell

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon E_i E_k + \mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right]$$

fuerza sobre las partículas en V hecha por los campos

el vector de Poynting porta momento

$$\int_V (\rho \vec{E} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c}) \cdot dV + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{D} \times \vec{B}) \cdot dV \right) = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

normal saliente

el tensor de Maxwell es un tensor cartesiano

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{cam}}{dt} = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

Conservación del momento lineal

con $\frac{\vec{S}}{c^2} = \vec{g} = \frac{\vec{D} \times \vec{B}}{4\pi c}$

↓
densidad de flujo de momento

fuerza por unidad de área transmitida a través de S que actúa sobre las partículas y los campos dentro de V

$$\vec{g} = \frac{\epsilon \mu}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{H})$$

● Tensor de Maxwell

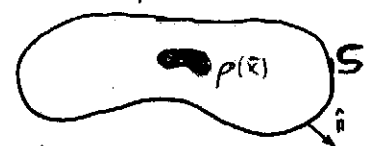
\vec{T} será diagonal si una de las direcciones es paralela al campo. Con el \vec{T} puede calcularse la fuerza que hacen los campos \vec{E}, \vec{B} sobre una cierta distribución de cargas y corrientes, con tal de evaluar su flujo en alguna superficie que las contenga; y con tal de que:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{g} \cdot dV \right) = 0$$

con $\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$; en ese caso será:

NOTA
Siempre con \hat{n} hacia afuera

$$\vec{F}_v = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{S}$$



En este caso se suele definir el concepto de presión de radiación:

$$d\vec{F} = \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{F} = \vec{T} \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\vec{P}_{rad} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{T} \cdot \hat{n}$$

\vec{T} es un tensor con autovalores reales; coincidiendo sus autovectores con la dirección del campo. Es independiente del sentido del campo (depende del valor absoluto de los campos)

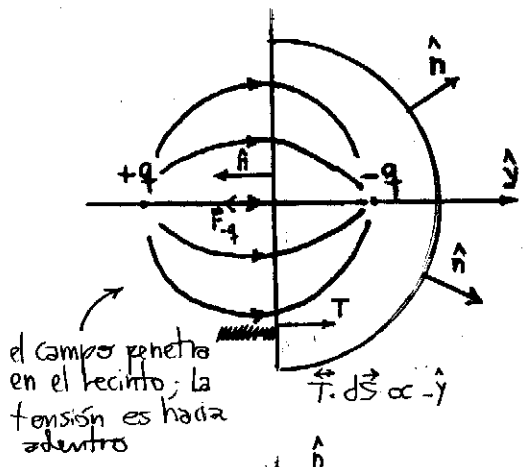
$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \epsilon E^2 \right]$$

tensor eléctrico

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[\mu H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mu H^2 \right]$$

tensor magnético

Ejemplos de Tensor de Maxwell



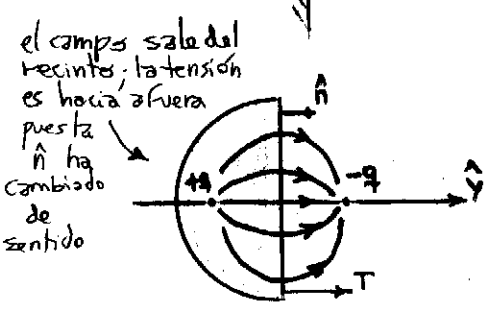
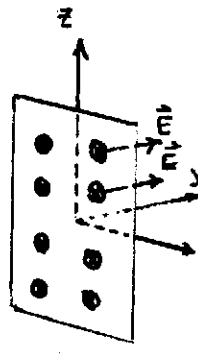
$$d\vec{S} = -dS \hat{y}$$

$$\vec{F} = -F \hat{y}$$

sobre -q

fuerza atractiva (hacia afuera del recinto)

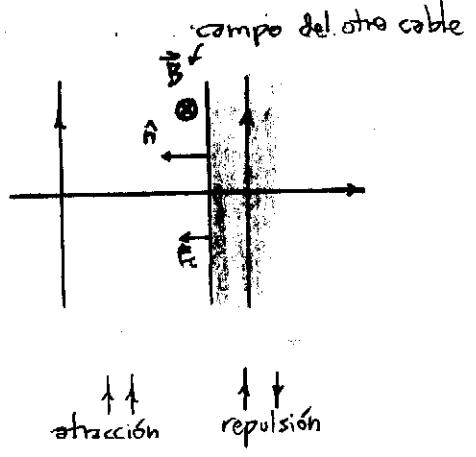
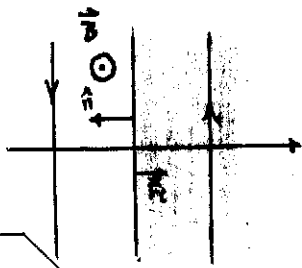
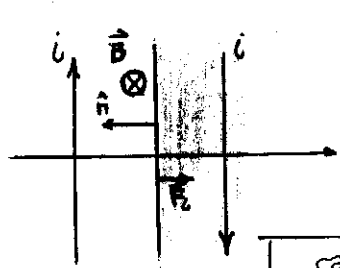
$$\vec{T}_{15} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -E^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & E^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{T} \cdot d\vec{S} \propto \hat{y}$$

$$\vec{F}_{\text{sobre } +q} = F \hat{y}$$

fuerza atractiva (hacia afuera del recinto)



campo es tangencial al recinto; la tensión penetra en él

Se llega al concepto de \vec{T} cuando pensamos en campos para justificar las interacciones.

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\epsilon_{ij} D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{D} \cdot \vec{E} (1 - \epsilon_e) \right]$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\mu_{ij} B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{H} \cdot \vec{B} (1 - \mu_m) \right]$$

electrostático con medios materiales

magnetostático con medios materiales

Cuando el \vec{T} está diagonalizado la traza no es nula.

Cuando se diagonaliza; haciendo

$$|\vec{T} - \vec{I} \lambda| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{8\pi} E^2; \lambda_{2,3} = -\frac{1}{8\pi} E^2$$

donde el autovector de λ_1 corresponde a la dirección de \vec{E} y $\lambda_{2,3}$ a las direcciones \perp

$$d\vec{F}_{||} = \vec{T} \cdot d\vec{S}_{||} \rightarrow \frac{E^2}{8\pi} dS_{||}$$

EL campo eléctrico transmite una tensión $(\frac{1}{4\pi} E^2)$ paralela a la dirección del campo.

tensor diagonalizado

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} E^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2/2 \end{pmatrix}$$

● Método Cuasiestacionario

Se aproximan campos y fuentes con frecuencias bajas [$\omega \sim 0$]

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{E} \cdot e^{\frac{i\omega \hat{n} \cdot \vec{x}}{c}}}_{\text{Esto se desarrolla en torno a } \omega=0} \cdot e^{-i\omega t}$$

OBS.
Desarrollamos la parte espacial, pero la temporal queda como está

$$\vec{E}(\vec{x}) \cong \vec{E} + \omega \cdot \frac{i\hat{n} \cdot \vec{x}}{c} \cdot \vec{E} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{i^2(\hat{n} \cdot \vec{x})^2}{c^2} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{E} \cdot e^{-i\omega t}}_{\vec{E}^0} + \underbrace{\omega \cdot \frac{i\hat{n} \cdot \vec{x}}{c} \cdot \vec{E} \cdot e^{-i\omega t}}_{\vec{E}^1} + \underbrace{\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{i^2(\hat{n} \cdot \vec{x})^2}{c^2} \cdot \vec{E} \cdot e^{-i\omega t}}_{\vec{E}^2}$$

Para \vec{B} puede hacerse una descomposición análoga.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}^0 + \vec{E}^1 + \vec{E}^2) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}^0 + \vec{B}^1 + \vec{B}^2)$$

$$0 + \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}^1}{\propto \omega} + \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}^2}{\propto \omega^2} = \underbrace{+\frac{i\omega}{c} \vec{B}^0}_{\propto \omega} + \underbrace{+\frac{i\omega}{c} \vec{B}^1}_{\propto \omega^2} + \underbrace{+\frac{i\omega}{c} \vec{B}^2}_{\propto \omega^3}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \cdot (-i\omega) \vec{B} \cdot e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \omega (-i\omega) \cdot \frac{i\hat{n} \cdot \vec{x}}{c} \vec{B} \cdot e^{-i\omega t} - \frac{1}{c} \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{i^2(\hat{n} \cdot \vec{x})^2}{c^2} (-i\omega) \vec{B} \cdot e^{-i\omega t} \\ &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}^0 + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{i\omega \hat{n} \cdot \vec{x}}{c} \vec{B} \cdot e^{-i\omega t}}_{\vec{B}^1} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\omega^2 i^2(\hat{n} \cdot \vec{x})^2}{2c^2} \vec{B} \cdot e^{-i\omega t}}_{\vec{B}^2} \\ &\quad \text{" } \frac{i^2 \omega^2 (\hat{n} \cdot \vec{x})}{c^2} \cdot \vec{B}^0 \end{aligned}$$

Esto establece una equivalencia entre órdenes $\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}^0 = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^0}{\partial t} \end{cases}$

orden cero	orden uno	orden dos
$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E}^{(0)} = 4\pi \rho^{(0)}$	$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E}^{(1)} = 4\pi \rho^{(1)}$	$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E}^{(2)} = 4\pi \rho^{(2)}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{(0)} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{(0)}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{(1)}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(0)} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(2)} = 0$
$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}^{(0)}}{\mu} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(0)}$	$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}^{(1)}}{\mu} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(1)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon \vec{E}^{(0)}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(2)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon \vec{E}^{(1)}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^{(0)} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^{(1)} = -\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^{(2)} = -\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}$

orden "0" es el de campos estáticos

$$\frac{\omega \cdot l}{c} \ll 1$$

alguna con $l \equiv \text{long. característico del sistema}$

→ aproximación del sistema para poder usar cuasiestacionario

En general, en el método cuasiestacionario, se alternarán para un mismo campo el valor constante [no necesariamente cero] y alguna función de (\vec{x}, t) .

Es decir si $\left\{ \begin{array}{l} E_{\text{par}} \equiv \text{cte.} \Rightarrow E_{\text{impar}} \text{ no es cte.} \\ B_{\text{impar}} \text{ no es cte.} \Rightarrow B_{\text{par}} \equiv \text{cte.} \end{array} \right.$

Nomenclatura

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\uparrow \uparrow
corriente de corriente de
conducción desplazamiento

Cuando un conductor no es perfecto vale la Ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\delta = \frac{c}{2\pi\omega\sigma}$$

con $\delta \equiv$ profundidad pelicular

\uparrow es una longitud de penetración

● Ondas EM [en medios no conductores]

Lejos de las fuentes de campo es:

$$\begin{matrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{matrix}$$

◀ Ecuaciones de Maxwell sin fuentes

Ecuaciones lineales
↓
Ecuaciones 2^{do} orden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \end{aligned}$$

∴

[1] $\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

[2] $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

⇐ sendas ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B}

Solución de $\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$
Wave equation

$$\begin{matrix} \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{matrix}$$

es: $\psi = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + B \cdot e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\vec{k} = k \hat{n}$

dirección de propagación de la onda. Pueden ser complejos [refleja atenuación] del medio
 \vec{E}_0, \vec{B}_0 son uniformes y pueden ser complejos en cada dirección [reflejando desfases]

$k = \sqrt{\mu \epsilon} \frac{\omega}{c}$

Son soluciones de [1], [2]

Usando $\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$ se llega a:

$\begin{matrix} \hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{B}_0 = 0 \end{matrix}$

⇒ las ondas son ⊥ al campo
ondas EM son transversales

↪ $\vec{k} \perp \vec{E}, \vec{k} \perp \vec{B}$

Usando $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$ se llega a:

$\vec{B}_0 = \sqrt{\mu \epsilon} \hat{n} \times \vec{E}_0$

⇒ $\vec{E} \perp \vec{B}$

si $\hat{n} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{B}_0, \vec{E}_0$ tienen la misma fase

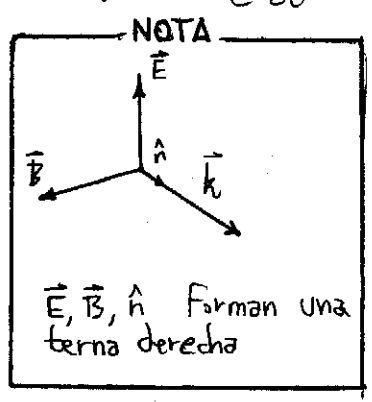
En el vacío, o en un medio LIH los campos \vec{E}, \vec{B} estarán en fase.

$\vec{S} \parallel \hat{n}$ pues $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$

En un medio anisótropo $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}) = 0$

↪ $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$

Salvo que $\vec{\epsilon}$ esté diagonalizado y $\vec{E} \parallel$ eje principal



● Sobre Complejos

$$\text{Re}\{A\} = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{con } A \in \mathbb{C}$$

Sean $\begin{cases} \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \end{cases}$

Siempre trabajaremos, en general, con dependencias temporales armónicas, y metemos $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ en el módulo A_0 que pasa a depender de \vec{x}

Los campos físicos son siempre la parte real de las expresiones complejas

$$\text{Re}\{\vec{A} + \vec{B}\} = \text{Re}\{\vec{A}\} + \text{Re}\{\vec{B}\}$$

con operaciones lineales es lo mismo tomar Re antes o después

$$\text{Re}\{\vec{A} \cdot \vec{B}\} \neq \text{Re}\{\vec{A}\} \cdot \text{Re}\{\vec{B}\}$$

con operaciones no-lineales no es lo mismo

Para hacer producto necesito tomar Re de cada factor \Rightarrow

$$\boxed{\text{Re}\{\vec{A}\} \cdot \text{Re}\{\vec{B}\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{A} \cdot \vec{B}^* + \vec{A} \cdot \vec{B} \cdot e^{-i2\omega t}\}}$$

Pero como, en las aplicaciones, estaré interesado en el promedio sobre un # entero de periodos

$$\boxed{\langle \vec{A} \cdot \vec{B} \rangle = \langle \text{Re}\{\vec{A}\} \cdot \text{Re}\{\vec{B}\} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{A} \cdot \vec{B}^*\}}$$

● Poynting Promedio y Energías Promedio

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \\ \vec{H} &= \vec{H}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{campos } \vec{E} \text{ y } \vec{H} \text{ en ondas electromagnéticas}$$

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E} \times \vec{H} \cdot e^{-i2\omega t}\}$$

$$\langle \vec{S}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

En un MLH es $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{n} \times \vec{E} \Rightarrow$
 $\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \times \vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\langle \vec{S}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}\{\vec{E} \times \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} \times \vec{E})^*\}$$

$$\langle \vec{S}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi\sqrt{\mu}} \left(\hat{n} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}^* (\underbrace{\vec{E} \cdot \hat{n}}_{=0}) \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle \vec{S}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \hat{n}}$$

◀ Vector de Poynting para ondas en MLH

$$U(\vec{x}, t) = \frac{1}{8\pi} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})$$

$$\langle U(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{H} \cdot \vec{B}^* + \vec{E} \cdot \vec{D}^*\}$$

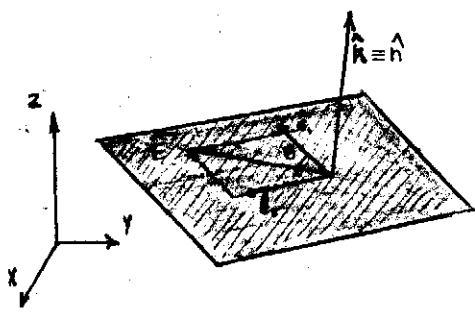
$$\langle U(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \text{Re}\left\{ \frac{1}{\mu} |\vec{B}|^2 + \epsilon |\vec{E}|^2 \right\} = \frac{1}{16\pi} \cdot 2 \cdot |\vec{E}|^2$$

$$|\vec{B}|^2 = \mu\epsilon |\vec{E}|^2 \quad \blacktriangledown$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle U(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2}$$

densidad de energía promedio

● Polarización de Ondas



onda plana, bien general, en \hat{n}

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

si E_1, E_2 están en fase \Rightarrow

$\vec{E}(\vec{x}, t)$ está LP con θ fijo

Es como que \vec{E} viaja siempre por el mismo andarivel, oscilando.

$E_1, E_2 \in \mathbb{C}$ para permitir la diferencia de fase entre componentes

si E_1, E_2 tienen fase arbitraria $\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}, t)$ está E.P.

si $|E_1| = |E_2|$ y fase es $\pi/2 \Rightarrow \vec{E}(\vec{x}, t)$ está C.P.

$$E_2 = E_1 e^{i\pi/2} = E_1 i$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_1 \cdot (\hat{e}_1 + i \hat{e}_2) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Definamos $\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_+ \equiv \frac{\hat{e}_1 + i \hat{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \hat{e}_- \equiv \frac{\hat{e}_1 - i \hat{e}_2}{\sqrt{2}} \end{array} \right\}$

una "base" de polarizaciones

$$\begin{aligned} \hat{e}_+ \cdot \hat{e}_+^* &= 0 \\ \hat{e}_+ \cdot \hat{e}_-^* &= 1 \end{aligned}$$

$$\hat{e}_1 = (\hat{e}_+ + \hat{e}_-) \sqrt{2}$$

$$\hat{e}_2 = (\hat{e}_+ - \hat{e}_-) \sqrt{2}$$

Cualquier polarización se puede escribir como combinación lineal de e^+ y e^- .

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_+ \hat{e}_+ + E_- \hat{e}_-) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

onda plana general

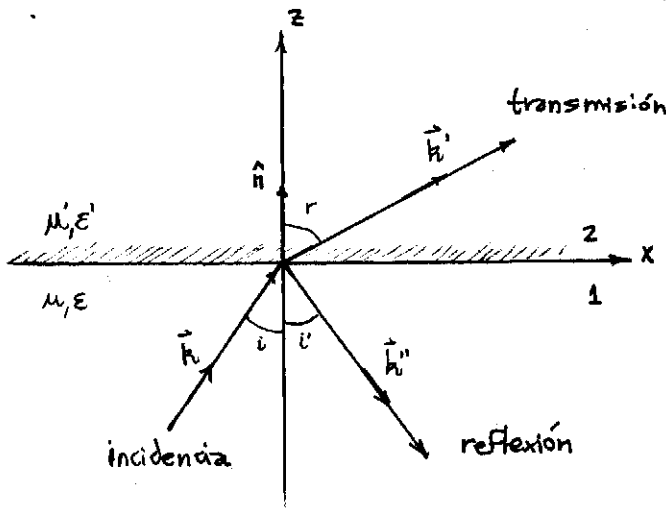
Una onda que rebota en un espejo transfiere impulso lineal. Una onda \vec{E} lleva \vec{L} pero no lo transfiere en un rebote perfecto. Por ser \vec{L} axial (pseudovector) el reflejo es equivalente a una simetría del sistema.

Tenemos dos bases entonces $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ y $\{\hat{e}_+, \hat{e}_-\}$

$$\frac{E_-}{E_+} = r e^{i\alpha} \quad \text{si } r = \pm 1, \alpha = 0 \Rightarrow \text{LP}$$

● Reflexión & Refracción de ondas EM en medios

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$



$$k = \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$$

↑
velocidad en el medio

$$n = \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$n' = \sqrt{\mu' \epsilon'}$$

← índices de refracción

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{k} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\mu} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k}$$

$|\vec{k}| = |\vec{k}''|$ pues $\mu'' = \mu$
 $\epsilon'' = \epsilon$

ω es la misma para medio 1 y 2 pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Utilizando las condiciones de contorno llegamos a:

$$\begin{cases} \omega \cdot t = \omega' \cdot t = \omega'' \cdot t \\ \vec{k} \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = \vec{k}' \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} = \vec{k}'' \cdot \vec{x} \Big|_{z=0} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_n \text{ continuo} \\ D_n \text{ continuo} \end{aligned}$$

La existencia de condiciones de contorno en $z=0$ que deben ser satisfechas en todos t en todos puntos (x, y) lleva a todas los factores de fase iguales en $z=0$.

Los tres vectores $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ están en un mismo plano \Rightarrow

$$k \cdot \text{sen } i = k' \cdot \text{sen } r = k'' \cdot \text{sen } i'$$

$$\sqrt{\mu \epsilon} \cdot \text{sen } i = \sqrt{\mu' \epsilon'} \cdot \text{sen } r$$

$$\boxed{n \cdot \text{sen } i = n' \cdot \text{sen } r} \quad \text{Ley de Snell}$$

$$k = k'' \Rightarrow \boxed{i = i'} \quad \text{Ley de reflexión}$$

Luego se plantean los contornos

$$\begin{aligned} D_n \quad [\vec{D}_2 - \vec{D}_1] \cdot \hat{n} &= 0 & \rightarrow & \quad [\epsilon' \vec{E}_0 - \epsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}'')] \cdot \hat{n} = 0 \\ E_t \quad \hat{n} \times [\vec{E}_2 - \vec{E}_1] &= 0 & & \quad \hat{n} \times [\vec{E}_0 - (\vec{E}_0 + \vec{E}'')] = 0 \\ B_n \quad [\vec{k}' \times \vec{E}_0 - (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}'')] \cdot \hat{n} & & & \\ H_t \quad \hat{n} \times \left[\frac{1}{\mu'} (\vec{k}' \times \vec{E}_0) - \frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}'') \right] &= 0 & & \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{k} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

c/ω es el mismo para ambos medios

Aplicando diligentemente los Contornos se llega a las "relaciones de Fresnel" que son los cocientes de las amplitudes relativas.

Usando $\mu \sim 1$ (válido para medios transparentes) \Rightarrow

T.E

$$\frac{E_o''}{E_o} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$$

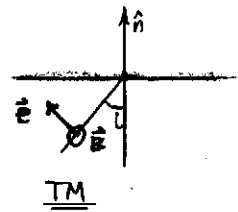
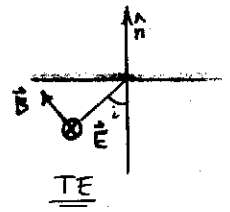
T.M

$$\frac{E_o''}{E_o} = \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$$

$$\frac{E_o'}{E_o} = 1 + \frac{\sin(r-i)}{\sin(i+r)}$$

$$\frac{E_o'}{E_o} = \frac{2\sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

frecuencias ópticas
 $\frac{\mu'}{\mu} = 1$



Si $i > n_0 \Rightarrow$ TE y TM son similares a menos de un signo

• Polarización (Brewster angle)

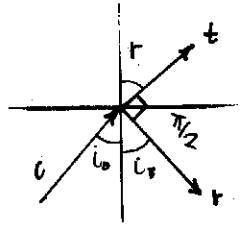
i_B tal que no hay onda reflejada (en TM) $E_o'' = 0$ pues $\tan(i+r) \rightarrow \infty$

$$i_B = \arctan\left(\frac{n'}{n}\right)$$

pues $i_B + r = \pi/2 \Rightarrow \frac{n}{n'} \sin i_B = \cos i_B \rightarrow i_B = \arctan\left(\frac{n'}{n}\right)$

Sirve para producir luz polarizada linealmente

$\vec{S}_i = \vec{S}_t + \vec{S}_{refl}$; pues \vec{S} no está relacionado linealmente con \vec{E}, \vec{B}
 $\vec{S}_i \cdot \hat{n} = \vec{S}_r \cdot \hat{n} + \vec{S}_t \cdot \hat{n}$ ← esto sí vale



$$\sin r > 1$$

$$\sin^2 r > 1$$

$$\cos^2 r = 1 - \sin^2 r$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = i \sqrt{\sin^2 r - 1}$$

$$\cos r = i \cdot \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 i - 1} = i \cdot a$$

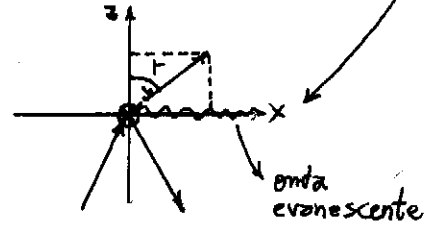
si $\sin r = 1 \Rightarrow r = \pi/2$

onda $\rightarrow e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} = e^{i(k \cos r \cdot z + k \sin r \cdot x)} = e^{-k \cdot a \cdot z} e^{i k \sin r \cdot x}$

atenuación propagación

• Reflexión interna total

Sea $n_{inc} > n_{trans}$.



No hay flujo de \vec{S}_{trans}

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin r$$

$$\frac{n}{n'} \sin i = \sin r$$

> 1 Para algunos i

* ángulo límite (i_0)

$$\sin r = 1 = \frac{n}{n'} \sin i_0$$

$$i_0 = \arcsen\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Si $i > i_0 \Rightarrow$

$\sin r > 1 \Rightarrow r \in \mathbb{C}$

● Ondas EM en conductores y Corrientes

continuidad de la carga \Rightarrow

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho \rightarrow \rho = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{4\pi}$$

$$\rho = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}{4\pi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \frac{1}{4\pi} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Ley de Ohm microscópica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0$$

Lo puedes pensar como una \vec{J} estacionaria

proviene de un \vec{E}' tal que $\vec{\nabla} \times \vec{E}' \neq 0$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{J}$$

llegamos a una ecuación diferencial para \vec{J}

$$\vec{J}_e = \vec{J} + \frac{\epsilon}{\sigma 4\pi} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \left(1 + \frac{\epsilon}{4\pi \sigma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{J}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_0 e^{-\frac{4\pi \sigma t}{\epsilon}}$$

donde $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0 \Rightarrow$

parte no estacionaria de la corriente si $t \rightarrow \infty$ tiende a 0

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_0 e^{-\frac{4\pi \sigma t}{\epsilon}}$$

Importante
Un campo irrotacional no puede mantener una corriente estacionaria. Necesito una fem para ella
fem = fuente de \vec{E} no conservativo

$$t \ll \tau \quad \vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$t \gg \tau \quad \vec{J} = \vec{J}_e + (\sim 0) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi \sigma}$$

tiempo de relajación

Tiempo característico en el cual se alcanzan condiciones estacionarias

si $\sigma \ll 1$ [conductor pobre] \Rightarrow No se alcanza nunca el $\vec{E}=0$ en el interior. τ grande

si $\sigma \rightarrow \infty$ [conductor perfecto] \Rightarrow La corriente es estacionaria $\vec{E}=0$ en el interior. τ chico $\rightarrow 0$

UN ENFOQUE SIMILAR

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi \sigma}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma \epsilon}{\epsilon} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{4\pi \sigma \rho}{\epsilon}$$

Una vez que $(t \gg \tau)$ se estabiliza es $\rho = \rho_0 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

• Campo EM en medio conductor

Tenemos un campo EM de fuentes lejanas y queremos ver que sucede en un medio conductor

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Con $\rho=0$
 μ, ϵ homogéneos

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ \Rightarrow $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ Ley de Ohm

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$
 $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi\sigma\mu}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$
Corriente de conducción Corriente de desplaz.

$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

◀ Ecuación de ondas general

dieléctrico * $\sigma=0$

conductor * $\sigma > 0$

Ecuación de ondas

$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$\nabla^2 \vec{E} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

Ecuación de difusión (si tiramos el término $\partial^2 \vec{E} / \partial t^2$)

(ondas EM en MLH)

$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\nabla^2 \vec{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega \vec{E} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 \vec{E} = 0$

$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 \left[1 + \frac{i4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right] \vec{E} = 0$

relajación del medio

$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$

Helmholtz homogénea

$k^2 = k^2 \left[1 + \frac{i}{\epsilon\omega} \right]$

$k^2 = k^2 \left[1 + \frac{iT}{2\pi\tau} \right]$

$\tau \gg T \Rightarrow$ propagación

Para metales $\tau \approx 10^{-14}$ seg \Rightarrow es válida la ecuación de difusión hasta la región de radio frecuencias

$\equiv k^2 = k^2 \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \right)$

* Excedente conductor

corriente conducción

Difusión

$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1 \Rightarrow$

$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\mu\epsilon\omega}{c^2} i \frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \vec{E} = 0$

* Conductor POBRE

corriente desplaz.

Propagación

$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1 \Rightarrow$

$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$

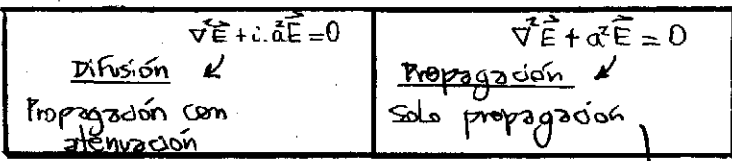
Ejemplo

$\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{\tau\omega} \gg 1 \Rightarrow$

metales

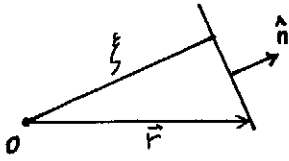
$\frac{1}{\tau} \gg \omega$
 $10^{14} \gg 6 \cdot 10^6$

ondas de radio AM (ejemplo)



Esto tiene \Rightarrow la ecuación de ondas con $\sigma=0$

Si consideramos los campos funciones de la distancia ξ de un plano al origen 0 tendremos:



Los campos son constantes en los planos de normal \hat{n}

$$\vec{\nabla} = \hat{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\text{Maxwell} \begin{cases} \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial \xi} = 0 & \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} = 0 \\ \hat{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \hat{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi} = 4\pi \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\hat{n} \cdot \left(\hat{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi} \right) = 4\pi \sigma E_n + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_n = E_n^0 e^{-\frac{4\pi \sigma t}{\epsilon}}$$

El E_n (electrostático) se apaga exponencialmente con el tiempo de relajación del conductor.

$$\hat{n} \cdot \left(\hat{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H_{\parallel} \text{ solo es constante en el tiempo y uniforme en el espacio.}$$

No se ve influenciado por el conductor. Asimismo la energía está metida casi por completo en el campo magnético cuando es un muy buen conductor.

$$K^2 = \mu \epsilon \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \frac{4\pi \sigma}{\epsilon \omega} \right]$$

término que se atenúa

$$K = \beta + i \frac{\alpha}{2}$$

conveniente es escribirla como

término que se propaga

$$\beta = \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \frac{\omega}{c} \left[\frac{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2} + 1}{2} \right]^{1/2} = k$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \frac{\omega}{c} \left[\frac{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2} - 1}{2} \right]^{1/2} = k$$

* mal conductor $\frac{4\pi \sigma}{\omega \epsilon} \ll 1 \Rightarrow \frac{4\pi \sigma}{\epsilon} \ll \omega$
 $\frac{1}{\tau} \ll \omega$
 $K = \sqrt{\mu \epsilon} \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi \sqrt{\mu} \sigma}{c \sqrt{\epsilon}} i$

* excelente conductor $\frac{1}{\tau} \gg \omega$

$$K = \frac{\sqrt{2\pi \omega \mu \sigma}}{c} (1 + i)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{n} \cdot \vec{x}} \cdot e^{i[\beta \hat{n} \cdot \vec{x} - \omega t]}$$

Aquí la parte de atenuación $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\omega)}{2}$
 \Rightarrow hay distorsión

factor de atenuación

Entre más conductor un medio más rápida es la atenuación

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu \omega} \left[\beta + i \frac{\alpha}{2} \right] \hat{k} \times \vec{E}$$

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{E}_0, \vec{B}_0$ tienen la misma fase

$\vec{k} \in \mathbb{C}^3 \Rightarrow$ Hay crecimiento o decaimiento exponencial en algunas direcciones

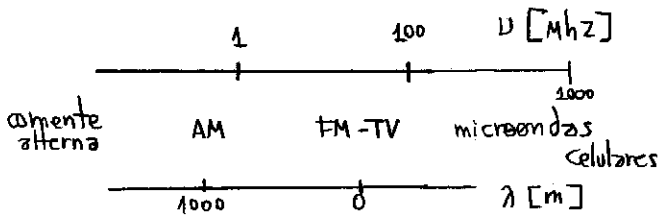
onda
plana

$$\begin{aligned}
 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} &= e^{i(k \hat{n}_R \cdot \vec{x} + k \hat{n}_I \cdot \vec{x} - \omega t)} \\
 &= e^{i(k \hat{n}_R \cdot \vec{x} - \omega t)} e^{-k \hat{n}_I \cdot \vec{x}}
 \end{aligned}$$

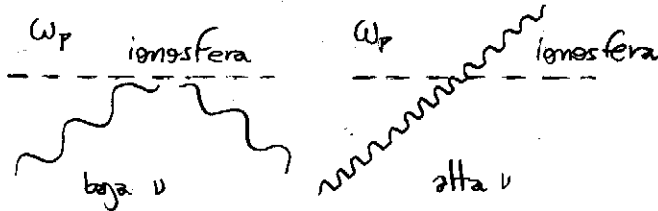
● Algunos Ejemplos y Casos

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{c} = \frac{\omega}{v}$$

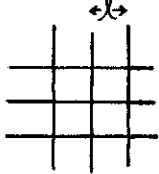


	ν	λ
celular	$1 \cdot 10^9$ hz	0.3 m
radio AM	$1 \cdot 10^6$ hz	300 m
radio FM	$1 \cdot 10^8$ hz	3 m



$$\frac{4\pi \sigma(\omega)}{\epsilon \cdot \omega}$$

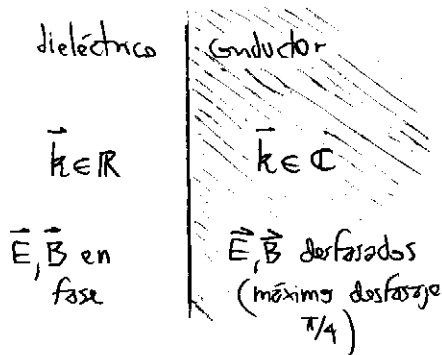
La malla metálica



- $\lambda \gg l \Rightarrow$ macizo para la onda. La penetración o no dependerá de la $\sigma(\omega)$.
→ Es un conductor macizo.
- $\lambda \ll l \Rightarrow$ transparente para la onda. No ve el conductor.

buen conductor
 $\mu_M > \mu_E$
 \Rightarrow el material se comporta inductivamente

mal conductor
 $\mu_E > \mu_M$
 \Rightarrow el material se comporta capacitivamente



● Transformación de Vectores

$$X'_i = a_{ij} X_j$$

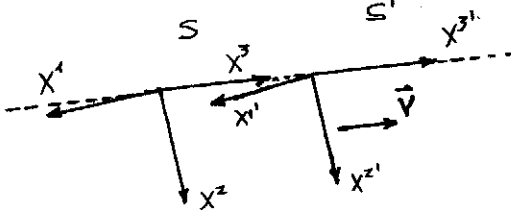
un vector transforma así

Las leyes físicas deben ser invariantes frente a rotaciones propias

Einstein postula:

1. Todos los sistemas inerciales son equivalentes
2. La velocidad de la luz en un sistema inercial es constante. No depende del estado de movimiento del observador.

Sea un sistema S' que se mueve con velocidad \vec{v} de otro S en forma // a un eje



Transf. Lorentz

[1]
$$\begin{aligned} X^{1'} &= X^1 \\ X^{2'} &= X^2 \\ X^{3'} &= \gamma [X^3 - \beta X^0] \\ X^{0'} &= \gamma [X^0 - \beta X^3] \end{aligned}$$

$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

$X^0 = c \cdot t$

▲ Esta transf. es muy sencilla

A [1] Podemos darle forma de rotación en funciones hiperbólicas como sigue:

Las leyes son lineales en las coordenadas \Rightarrow el espacio es isotrópico

$$\begin{aligned} X^{0'} &= X^0 \cosh \zeta - X^3 \sinh \zeta \\ X^{3'} &= -X^0 \sinh \zeta + X^3 \cosh \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X^{0'} \\ X^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad \text{rotación en eje } \hat{0}, \hat{3}$$

$\zeta = \text{atanh}(\beta)$

invariancia del módulo de la transformación \rightarrow

$$X^{0'^2} - (X^{1'^2} + X^{2'^2} + X^{3'^2}) = X^{0^2} - (X^{1^2} + X^{2^2} + X^{3^2})$$

$$(c \cdot t')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (c \cdot t)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

y no es euclídeo.

Este espacio 4D es el de Minkowski

$$\begin{pmatrix} X^{0'} \\ X^{1'} \\ X^{2'} \\ X^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}$$

La transformación inversa es reemplazando

$$\begin{aligned} X^{i'} &\rightarrow X^i \\ X^i &\rightarrow X^{i'} \\ \beta &\rightarrow -\beta \end{aligned}$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds'^2$$

$$ds = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \cdot dx^\beta \quad \text{tensor de la métrica}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$$

● Cuadriectores en el espacio 4D

$$A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

$$A_\mu = (A^0, -\vec{A})$$

cuadriector
contravariante

cuadriector
covariante

parte temporal parte espacial

transformación de cuadriectores

$$A'^\alpha = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\beta} \cdot A^\beta \quad \leftarrow \text{contravariantes}$$

$$A'_\alpha = \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\alpha} \cdot A_\beta \quad \leftarrow \text{covariantes}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv A_\alpha \cdot B^\alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 \cdot B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Producto interno ▲

$$A_\alpha \cdot B^\alpha = A'_\alpha \cdot B'^\alpha \quad \text{es invariante por ser un escalar}$$

$$A^\alpha \cdot B_\alpha =$$

● Intervalos entre eventos (debe ser invariante relativista y Lorentziano)

intervalo temporal
intervalo espacial

$$x^0 > x^i x_i \Rightarrow \Delta S^2 > 0 \quad \leftarrow \text{Pueden estar conectados causalmente}$$

$$x^0 < x^i x_i \Rightarrow \Delta S^2 < 0 \quad \leftarrow \text{No pueden estar conectados causalmente}$$

$$\Delta S^2 = x^0^2 - (x^1^2 + x^2^2 + x^3^2)$$

● Operadores Diferenciales

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$$

tabla covariante (derivada respecto a coord. contravariante)

tabla contravariante (derivada respecto a coord. covariante)

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\partial^\alpha A_\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \vec{\nabla} \cdot (-\vec{A})$$

Cuadri-divergencia de un cuadri-vector

[es invariante] $\partial_\alpha A^\alpha = \partial^\alpha A_\alpha$

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^0^2} - \nabla^2$$

D'Alembertiano

$$S^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

S interval entre eventos 1 y 2

S es invariante Lorentziano

intervalo temporal

$$S^2 > 0 \Rightarrow c \cdot \Delta t > |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$$

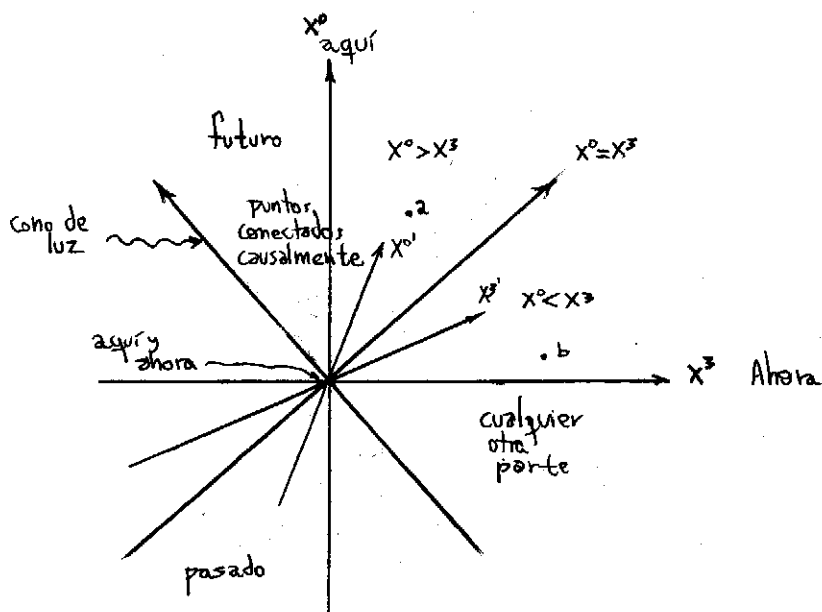
$\Rightarrow \exists$ frame inercial donde $x_1 = x_2$ (los eventos ocurren en el mismo sitio). Pueden estar conectados causalmente

intervalo espacial

$$S^2 < 0 \Rightarrow c \cdot \Delta t < |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$$

$\Rightarrow \exists$ frame inercial donde los dos eventos son en el mismo sitio $x_1 = x_2 \Rightarrow c \Delta t < 0 \Rightarrow t_2 < t_1$

[No pueden estar conectados causalmente]



$$x^0' = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

$$x^3' = \gamma(x^3 - \beta x^0)$$

Ahora es $x^0 = 0 \rightarrow$ Para observador en S' se tiene

$$0 = \gamma(x^0 - \beta x^3)$$

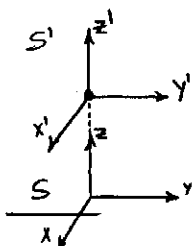
$$x^0 = \beta x^3$$

Aquí es $x^3 = 0 \rightarrow$

$$\frac{x^3}{\beta} = x^0$$

- a - puede ser causado por suceso en el origen
- b - no tiene conexión causal con el origen

• Transcurso del tiempo en un sistema con V grande
 Sea v/c no despreciable:



$$c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta z)$$

$$\gamma > 1$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \frac{\beta \Delta z}{c \Delta t})$$

Si en S' la partícula está en reposo $\Rightarrow v = \Delta z / \Delta t$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t (1 - \beta^2)$$

$$\Delta t' = \Delta t \cdot (1 - \beta^2)^{1/2} \rightarrow$$

$$\Delta t' < \Delta t$$

En S' el tiempo transcurre más lentamente

• Número de Onda y Conteo

Un proceso de conteo (discreto) es invariante Lorentziano

→ \vec{v} entre sistemas SS'

$$x^{\beta'} = \gamma (x^{\beta} - \beta x^0)$$



número de crestas

$$\#_s = \frac{z_1 - z_0}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} (z_1 - z_0) = \frac{k}{2\pi} (ct - z) = \frac{1}{2\pi} (\omega t - kz)$$

$$\#_{s'} = \frac{1}{2\pi} (\omega' t' - k' z')$$

⇒ se puede generalizar:

$$\vec{k} \cdot \vec{x}' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

$$-\left(\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \frac{\omega'}{c} x^0 \right) = -\left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \frac{\omega}{c} x^0 \right)$$

se puede

$$k_{\alpha} x^{\alpha} = k'^{\alpha} x'_{\alpha}$$

invariante Lorentziano

la fase de una onda plana es un invariante Lorentziano

cuadri-vector # de onda

$$k^{\alpha} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

• forma Covariante del EM

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

conservación de la carga

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J})$$

← Cuadrivector corriente

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

La formulación covariante empleaba el gauge de Lorentz (así las ecuaciones son válidas en cualquier sistema inercial)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Gauge de Lorentz

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

← cuadripotencial

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

Ecuaciones de onda inhomogéneas para los potenciales

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\mu = \square \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \square \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial(ct)^2} - \nabla^2 \phi = \frac{4\pi}{c} (\rho)$$

Al aplicar el D'Alembertiano a un cuadrivector obtenemos otro cuadrivector

$$\Rightarrow \square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Los campos \vec{E}, \vec{B} forman parte de un tensor de 2º rango antisimétrico; llamado tensor de intensidad de campo:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de intensidad de campo dual

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ si se repite algún índice

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\mu &= 4\pi J^\mu \end{aligned}$$

estos dos subíndices parece que se mueven

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\mu} = 0$$

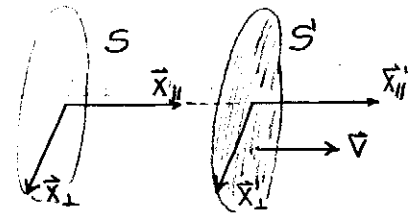
Ecuaciones de Maxwell en forma covariante explícita

● Transformación de Los Campos

Transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma [ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}] \\ \vec{x}'_{\parallel} &= \gamma [\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta} \cdot ct] \\ \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \end{aligned}$$

con $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$



$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}_{\parallel} + \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\ \vec{B}' &= \vec{B}_{\parallel} + \gamma (\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

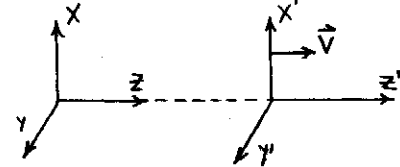
← Transformación de los campos \vec{E}, \vec{B}

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma (\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \\ \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \end{aligned} \right\} \text{transformación de Galileo}$$

Este término da origen a las corrientes de Foucault al mover un conductor en el seno de un campo \vec{B} .

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma (E_x - \beta B_y) & B'_x &= \gamma (B_x + \beta E_y) \\ E'_y &= \gamma (E_y + \beta B_x) & B'_y &= \gamma (B_y - \beta E_x) \\ E'_z &= E_z & B'_z &= B_z \end{aligned}$$



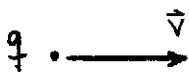
Invariantes

Las contracciones del producto escalar entre el tensor de intensidad son invariantes

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= 2(B^2 - E^2) \\ \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} &= 2(E^2 - B^2) \\ \mathcal{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= -4 \vec{B} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -4 \vec{B} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$, ó alguno de los campos es nulo en todo sistema inercial.



carga que se mueve con \vec{v}

$\vec{B} = 0$ en un sistema en el que q está en reposo $\Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{E} = \vec{B}' \cdot \vec{E}' = 0$ siempre $\Rightarrow \vec{B}' \perp \vec{E}'$ para cualquier sistema inercial S'

un sistema EM dependiente del tiempo intercambia \vec{P} con el campo \Rightarrow no vale PABR

$$\frac{d\vec{P}_M}{dt} + \frac{d\vec{P}_c}{dt} = \oint_{S(v)} \vec{T} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi c} \int \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{v} \right)$$

• Covariancia con Medios materiales

En presencia de medios materiales puede definirse:

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{\alpha\beta} \rightarrow G^{\alpha\beta}$

$E_i \rightarrow D_i$
 $B_i \rightarrow H_i$

Relaciones Constitutivas

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$G^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}$ tiene la info de P_i, M_i

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\vec{P}' = \vec{P}_{||} + \gamma(\vec{P}_\perp - \vec{\beta} \times \vec{M})$$

$$\vec{M}' = \vec{M}_{||} + \gamma(\vec{M}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{P})$$

transformación de los campos \vec{P}, \vec{M}

Nota
De un sistema inercial a otro una \vec{P} da origen a una \vec{M} y viceversa

• Principio de Hamilton y Relatividad

Estamos situados en un espacio de Minkowski

La acción constante

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

area en el espacio de Minkowski

IMPORTANTE
La Acción debe ser un invariante pues es un extremo

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} V^2}$$

$$S = -\alpha \int_{t_a}^{t_b} c dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt \Rightarrow$$

el Lagrangiano $\mathcal{L} = -\alpha c \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha V^2}{2c}$

la constante al \mathcal{L} no afecta para la ecuación de Euler

$\mathcal{L} \rightarrow T = \frac{m V^2}{2}$ (baja velocidad) $\rightarrow \frac{\alpha V^2}{2c} = \frac{m V^2}{2}$

Lagrangiano relativista

$$\mathcal{L} = -m c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$$

$$p_i = \frac{m \dot{q}_i}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$p_i = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

masa en reposo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)$$

momento relativista

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \gamma \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Movimiento circular \rightarrow
el módulo de la velocidad
permanece constante

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \vec{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d}{dt} \left(1-v^2/c^2 \right)^{-1/2} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \gamma \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + m \cdot \gamma^3 \cdot \frac{v}{c^2} \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

asociado a la
variación en la
dirección

asociado a la
variación en
la magnitud

$$\gamma^3 \cdot \frac{v^2}{c^2} > \gamma$$

La inercia es mayor para
variar la longitud de \vec{v}
que su dirección.

Más fácil cambiar dirección
que rapidez

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} + m \cdot c^2 \cdot \gamma^{-1} = m \cdot \gamma \cdot v^2 + \frac{m \cdot c^2}{\gamma} = m \cdot \gamma c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

$$E = m \gamma c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$E = m \gamma c^2$$

energía relativista
(de una partícula libre)

con $v/c \ll 1 \Rightarrow$

$$\gamma \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$E \approx \underbrace{m \cdot c^2}_{= E_0} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

energía en
reposo [No depende
de v]

$$\Rightarrow E - m \cdot c^2 = \frac{1}{2} m v^2 = T$$

$$T = E - m \cdot c^2$$

energía cinética
relativista

sea $\vec{p} = m \cdot \vec{w}$ con $\vec{w} = \gamma \cdot \vec{v} \Rightarrow$

$$p^2 = m^2 \gamma^2 v^2$$

$$E^2 = m^2 \gamma^2 c^4$$

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2 c^2 \gamma^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m^2 \gamma^2 c^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} \right)$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$$

relación entre
energía y momento

$$H = \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \cdot c$$

Hamiltoniano
relativista

$$H = \left(\frac{p^2}{m^2 c^2} + 1 \right)^{1/2} \cdot m \cdot c^2$$

$$\approx \frac{p}{m \cdot c} \ll 1$$

$$H \approx m \cdot c^2 \cdot \left[1 + \frac{p^2}{2 m^2 c^2} \right]$$

$$H \approx m \cdot c^2 + \frac{p^2}{2 m}$$

el Hamiltoniano de
Mecánica clásica

importante

Para partículas con $\{m_0 = 0\}$
será:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 \quad p = \frac{h \cdot \nu}{c} = h \cdot k$$

● Momento

$\vec{p} = \vec{\nabla} S ? \rightarrow \partial^\mu P^\mu = \partial^\mu S = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \vec{\nabla} \dot{S} ?$

cuadrimomento $\rightarrow \begin{cases} P^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) \\ P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \end{cases}$ con $\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \leftarrow$ invariante

● Partícula en un campo EM

$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \cdot dt$

$S = \int_{t_1}^{t_2} T \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} V \cdot dt$
 $\rightarrow S = S_0 + S_{INTER}$

$\mathcal{L} = T - V$

$A^\mu = (\phi, \vec{A})$
 $X^\mu = (ct, \vec{x})$

$S_{int}^{NR} = \int_{t_1}^{t_2} -e \cdot \phi \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e \cdot \phi}{c} d[ct]$
 $= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{e A^0}{c} dx^0 \Rightarrow$ se puede generalizar a:

$S_{INTER} = - \frac{e}{c} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} A_\mu dx^\mu \Rightarrow$

$S_{INTER} = \frac{e}{c} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} (\vec{A} \cdot \vec{v} - c \cdot \phi) dt = \frac{e}{c} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} (\vec{A} \cdot \vec{v} - c \cdot \phi) dt$

parte de interacción

$\mathcal{L} = -m \cdot c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e \cdot \phi$

← Lagrangiano de una partícula en un campo EM

\mathcal{L} de partícula libre \rightarrow

Este \mathcal{L} no es invariante de medida, sin embargo no perjudica porque en las ecuaciones de movimiento solo entran los $\partial \mathcal{L}$

momento conjugado $\rightarrow \vec{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}$
 (de partícula libre)

$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} \Rightarrow H = (m\gamma \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{v} + m c^2 \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e \cdot \phi$

$H = m\gamma v^2 + e \cdot \phi + m c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} = m\gamma v^2 + \frac{m c^2}{\gamma} + e \cdot \phi$
 $= \tilde{m} \gamma [\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}] + e \cdot \phi$

Hamiltoniano en un campo EM \rightarrow

$H = m \cdot \gamma \cdot c^2 + e \cdot \phi$

OBS.
 \mathcal{L} no es invariante relativista pero $S = \int \mathcal{L} \cdot dt$ sí lo es

$$\vec{P} = m\gamma v + \frac{e}{c}\vec{A} \quad \rightarrow \quad (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 = m^2\gamma^2 v^2$$

$$H = m\gamma c^2 + e\phi \quad \left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 = m^2\gamma^2 c^2$$

$$\left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2\gamma^2 c^2 \left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$\left(\frac{H - e\phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m^2 c^2 \quad \rightarrow \text{invariante}$$

$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$
es un caso particular de este

$$P^\mu = \left(\frac{H - e\phi}{c}, \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$$

◀ Cuadrimomento de una partícula en un campo EM (sometida a un potencial EM)

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\phi$$

$$H^{NR} = m c^2 \left(1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\right)^{1/2} + e\phi$$

$$\approx m c^2 \left(1 + \frac{1}{2m^2 c^2} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\right) + e\phi = \underbrace{m c^2}_{\text{en reposo (atm)}} + \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi$$

$$H^{NR} \approx \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi$$

Aplicando Euler-Lagrange en el \mathcal{L}_{EM} hallado se llega a:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \gamma \vec{v}) = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

◀ Fuerza de Lorentz con la corrección relativista (Esta misma expresión ya hallada sin tener en cuenta relatividad)

si $\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = m \gamma \frac{d\vec{v}}{dt}$ pues $\frac{d\gamma}{dt} = 0$
 el campo \vec{B} solo variará la dirección de \vec{v}

Importante

el radio de giro de una partícula ciclotrón es mayor con la aproximación relativista que con la newtoniana porque su inercia es mayor $\gamma > 1$

$$|F| = e v B$$

$$m \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = e v B \quad m \frac{v^2}{r} = e v B$$

$$m \gamma \frac{v^2}{r} = e v B$$

$$\frac{m \gamma v}{e B} = r_r \quad \frac{m v}{e B} = r_{NR}$$

$$r_r > r_{NR}$$

● Cambio de Gauge

$$A^\mu = A^\mu - \partial^\mu f \rightarrow$$

$$A^0 = \phi - \partial^0 f$$

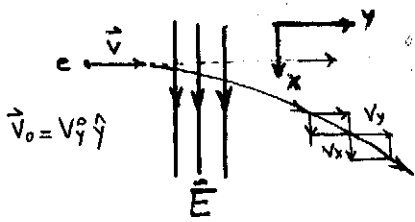
$$\vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

El Cambio de Gauge no es invariante pero $\delta S = 0$ si es invariante

$$f^\rho = -\partial_\alpha T^{\alpha\rho}$$

◀ Cuadrivariante de fuerza de Lorentz

• Especie de tiro oblicuo en el campo EM



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v})$$

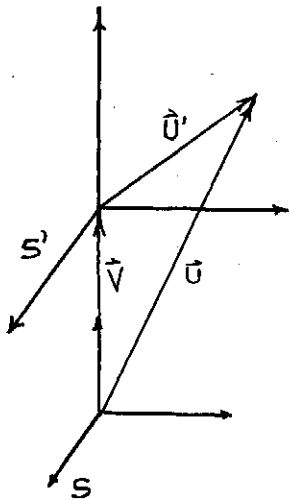
$$\frac{dp_x}{dt} = m \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} \right\} = eE$$

$$\frac{dp_y}{dt} = m \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} \right\} = 0$$

Este sistema es complicado de resolver

Cualitativamente vemos que v_x crece a medida que ingresa en la zona de campo $\vec{E} \Rightarrow$ como v_y es constante $\Rightarrow \gamma$ aumenta \Rightarrow aumenta la inercia \Rightarrow disminuye $|\vec{v}|$ y describe aproximadamente una parábola

• Cuadrivectorialidad



\vec{U} no transforma como cuadrivector

$$W^\mu = (\Gamma c, \Gamma \vec{U})$$

Esto sí transforma como cuadrivector

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$U_{||} = \frac{U'_{||} + v}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{U}'}{c^2}}$$

fórmula de Einstein de suma de velocidades
(Tiene como límite "c")

$$U_{\perp} = \frac{U'_{\perp}}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{U}'}{c^2}\right)}$$

Luego, según se vio, el cuadrivector es:

$$p^\mu = (m\Gamma c, m\Gamma \vec{U}) \Rightarrow m.W^\mu = p^\mu$$

• Potenciales Retardados

Usando el gauge de Lorentz y las ecuaciones de Maxwell se llega a:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \end{cases}$$

con forma general:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t) \quad (1)$$

con f distribución de fuentes

Resolveremos (1) con una función de Green. Hacemos Fourier respecto a la frecuencia suponemos que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{x}, t) \cdot e^{i\omega t} dt \\ f(\vec{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, t) \cdot e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

↳ Inversas

$$\begin{cases} \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ f(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \Rightarrow$$

↙ así tomamos el tiempo [además luego nos interesa fuentes armónicas y por sobre todo cualquier perturbación puede descomponerse en Fourier]

$$\frac{1}{2\pi} \int \nabla^2 \psi(\vec{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\vec{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int 4\pi f(\vec{x}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$$

se satisface la ecuación de Helmholtz-inhomogénea para cada valor de ω

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{x}, \omega) = -4\pi f(\vec{x}, \omega)$$

Una función de Green satisfará:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

donde $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{R}$, y la función de Green será simétricamente esférica (No contornos) \Rightarrow

$$G_k(R) \xrightarrow{\text{Laplaciano de esféricas}} \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R \cdot G_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(R)$$

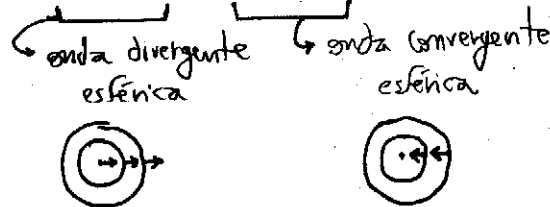
$$\frac{d^2}{dR^2} (R \cdot G_k) + k^2 (R \cdot G_k) = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{en } R \neq 0 \\ \text{en } R = 0 \end{matrix} \quad \lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

$$R \cdot G_k = A \cdot e^{i k R} + B \cdot e^{-i k R}$$

$$\text{solución general} \Rightarrow G_k(R) = \frac{A}{R} e^{i k R} + \frac{B}{R} e^{-i k R}$$

= G⁺ = G⁻

A, B dependerán de las condiciones de contorno en el tiempo



Necesitamos meter ahora la dependencia temporal:

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \delta(t - t')$$

G_k potencial de una carga unitaria que aparece en $\vec{x} = \vec{x}'$ en el instante $t = t'$ y luego desaparece

$$-4\pi \cdot f(\vec{x}, \omega) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \right) \cdot -4\pi$$

$$= -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \delta(t - t') \cdot e^{i\omega t} \cdot dt$$

$$-4\pi \cdot f(\vec{x}, \omega) = -4\pi \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}') \cdot e^{i\omega t'} \Rightarrow \boxed{f(\vec{x}, \omega) = \delta(\vec{x}) \cdot e^{i\omega t}}$$

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_R(R) \cdot e^{-i\omega \tau} \cdot d\omega$$

$\tau \equiv$ tiempo relativo entre observación (t) y fuente (t')

$R \equiv$ distancia relativa entre observación (\vec{x}) y fuente (\vec{x}')

En un medio no dispersivo es:

$$G^{\pm}(R, \tau) = \frac{1}{R} \cdot \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

función de Green retardada

$$\boxed{G^+(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) = \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

función de Green avanzada

$$\boxed{G^-(\vec{x}, \vec{x}', t, t') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \delta\left(t - t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) = \frac{\delta\left(t' - \left[t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

G^+ exhibe el comportamiento causal del efecto observado en \vec{x} a t causado por la acción de la fuente en el tiempo $(t - \frac{R}{c})$ donde R/c es la diferencia de tiempo de la señal en propagarse.

G^-

$$\boxed{t' = t - \frac{R}{c}} \quad \text{tiempo retardado}$$

$$\boxed{G^+(R, t, t') = \frac{\delta\left[t' - \left(t - R/c\right)\right]}{R}}$$

$$\boxed{G^-(R, t, t') = \frac{\delta\left[t' - \left(t + R/c\right)\right]}{R}}$$

$$\boxed{\Psi^{\pm}(\vec{x}, t) = \iint G^{\pm}(\vec{x}, \vec{x}', t, t') \cdot f(\vec{x}', t') \cdot d^3x', dt'}$$

◀ solución particular de (1)

dos soluciones

$$\textcircled{A} \quad \Psi_{in}(\vec{x}, t) + \iint G^+ \cdot f \cdot dv' \cdot dt' \qquad \textcircled{B} \quad \Psi_s(\vec{x}, t) + \iint G^- \cdot f \cdot dv' \cdot dt'$$

con $f(\vec{x}', t')$ una fuente que es diferente de 0 solo en un intervalo $\sim t'$. Ψ_{in} satisface (1) homogénea a $t \rightarrow -\infty$. Ψ_s es la onda en $t \rightarrow +\infty$ solución de (1) homogénea. La situación más común es \textcircled{A} con $\Psi_{in} = 0 \Rightarrow$

$$\Psi(\vec{x}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left[t' - \left(t - R/c\right)\right]}{R} \cdot f(\vec{x}', t') \cdot dv' \cdot dt'$$

$$\boxed{\Psi(\vec{x}, t) = \int_{V'} \frac{f(\vec{x}', t - R/c)}{R} \cdot dv'}$$

◀ fuente en una cierta región que se enciende un instante e irradia

● fuente armónica

Sea una fuente armónica en el tiempo

$$\vec{J}(\vec{x}', t') = \vec{J}(\vec{x}') \cdot e^{-i\omega t'} \Rightarrow$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \cdot e^{-i\omega t'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dv' = \frac{4\pi}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \cdot e^{-i\omega t'}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot e^{+i\omega R/c} \cdot dv' = \frac{4\pi}{c} \cdot e^{-i\omega t} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \cdot e^{i\omega R/c}}{R} \cdot dv'$$

\Rightarrow se puede ver como:

$$\vec{A}(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t} = \left(\frac{4\pi}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{x}') \cdot e^{i\omega R/c}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dv' \right) \cdot e^{-i\omega t}$$

Si la fuente oscila armónicamente con ω \Rightarrow los campos tendrán la misma frecuencia ω

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot dV'$$

y $\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$ si $\vec{J}(\vec{x}',t) = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$

La aproximación consiste en desarrollar $\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ y ver condiciones asintóticas cuando $l=0$ (el 1er término de la \sum_x) y $k \cdot x' \ll 1$ \Rightarrow antena ineficiente

La λ de la radiación es mucho mayor al tamaño del emisor \Rightarrow $2\pi \cdot x' \ll \lambda$ y $2\pi \cdot x \gg \lambda$

LONGITUD de ONDA LARGA

CAMPO LEJANO (siempre la usamos)

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = -ik\vec{p} \cdot \frac{e^{ikx}}{x}$$

una onda esférica saliente (es el \vec{A} de un dipolo magnético oscilante armónicamente)

$$\vec{E} = -i\frac{\nabla \times \vec{B}}{k}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B}^{(0)}(\vec{x}) = k^2 (\hat{r} \times \vec{p}) \cdot \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx}\right)$$

El que contribuye a la radiación es el 1er término [campo lejano] \rightarrow rápidamente

falta siempre pegarle $e^{-i\omega t}$

$\hat{r} \equiv$ dirección de propagación

$x \equiv |\vec{x}|$ que puede ser $|\vec{r}|$ en esféricas

pues $k \cdot x \ll 1 \rightarrow e^{ikx} \approx 1$ campo cercano

* Cerca de la antena es: $\vec{B}^{(0)}(\vec{x}) = ik(\hat{r} \times \vec{p}) \cdot \frac{1}{r^2}$

si $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{B}^{(0)} \sim 0$

* Campo \vec{E} cerca de la antena:

$$\vec{E} = \frac{c}{k} \nabla \times \vec{B} \rightarrow \vec{E}^{(0)} \approx \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$

campo de un dipolo eléctrico

\vec{E}, \vec{B} son transversales a \hat{r} y tienen la misma magnitud (en CGS)

* Potencia Media (# entero de periodos)

$$\begin{aligned} \langle dP \rangle &= \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} \\ \langle dP \rangle &= \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} dS \\ \langle dP \rangle &= \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} \cdot r^2 d\Omega \\ \langle \frac{dP}{dr} \rangle &= \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 \end{aligned}$$

$$\langle \frac{dP}{dr} \rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 p^2 \sin^2 \theta$$

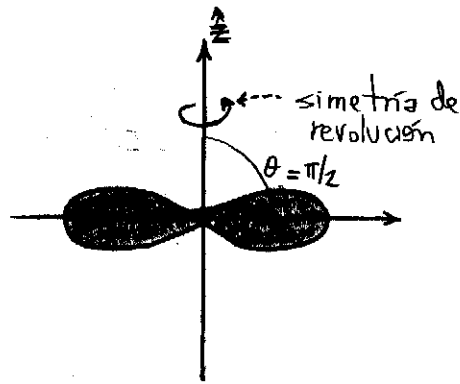
$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{B}^* \} \cdot \frac{c}{4\pi} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ (\vec{B}^{(0)} \times \hat{r}) \times \frac{k^2 (\hat{r} \times \vec{p})}{r} \right\} \cdot \frac{c}{4\pi} \\ \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left\{ -\frac{pk^2 \sin \theta}{r} \hat{x} + \frac{k^2 p \sin \theta}{r} \hat{\phi} \right\} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{p^2 k^4}{k^2} \sin^2 \theta \hat{r} \cdot \hat{r} k^2$$

\uparrow ver cálculos auxiliares en página siguiente

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \vec{p} &= \hat{r} \times p \hat{z} = \hat{r} \times (p \cos \theta \hat{r} - p \sin \theta \hat{\theta}) \Rightarrow -\frac{k^2 p \sin \theta}{r} \hat{\phi} \times \hat{r} = -\frac{k^2 p \sin \theta}{r} \hat{\theta} \\ \hat{r} \times \vec{p} &= -p \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} &= \frac{k^2}{r} \vec{p} (\hat{r} \cdot \hat{r}) - \hat{r} (\vec{p} \cdot \hat{r}) \\ &= \vec{p} \frac{k^2}{r} - \hat{r} p \cos \theta \frac{k^2}{r} \\ &= p \frac{k^2 \cos \theta}{r} \hat{r} - p \frac{k^2 \sin \theta}{r} \hat{\theta} - p \frac{k^2 \cos \theta}{r} \hat{r} = -\frac{p k^2 \sin \theta}{r} \hat{\theta} \end{aligned}$$



La potencia irradiada es máxima en $\theta = \pi/2$

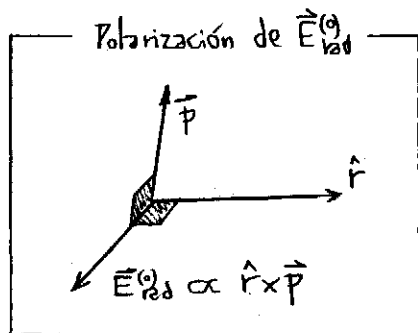
* si $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{S} = 0 \Rightarrow$ no hay radiación

* un monopolo no produce campos de radiación por su simetría esférica

una corriente \vec{j} no produce \vec{B} (radial)

$$\vec{B}_{rad}^{(o)} = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) e^{i k r}$$

$$\vec{E}_{rad}^{(o)} = \frac{k^2}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) \cdot e^{i k r} \times \hat{r}$$



* Para que un campo sea de radiación debe tener flujo de \vec{S} no nula en el infinito.

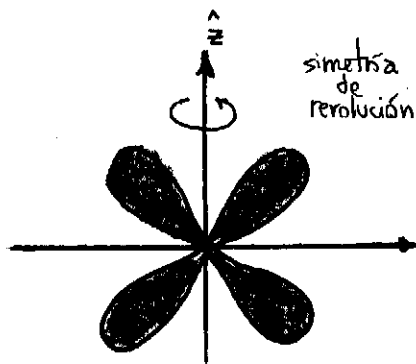
Si los campos van como $1/r \Rightarrow$ Poynting va como $1/r^2$ y dS va como $r^2 \Rightarrow \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S}$ tiene valor cte.

Si el campo va como $1/r \Rightarrow$ no produce flujo lejos

* si hacemos la siguiente aproximación $l=1$ en Σ resulta en momento dipolar magnético oscilante + cuadrupolo eléctrico

* Radiación a orden $l=0$ es un dipolo eléctrico oscilante

flujo que se va y no retorna a la fuente



* Distribución angular de potencia para la parte cuadrupolar, que surge con $l=1$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c k^6}{128 \pi} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c k^6}{128 \pi} |\hat{r} \times \vec{Q}|^2$$

source con simetría de revolución

sin simetría de revolución

donde \vec{Q} es un vector que vale: $n_j Q_{ij}$

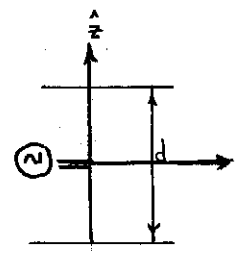
$$\vec{Q} = \hat{n} \cdot \vec{Q}$$

● Radiación a orden $l=1$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR} \dot{\vec{p}}(t) + \frac{\dot{\vec{m}}(t)}{cR} \times \hat{n} + \frac{1}{c^2 R} \ddot{\vec{Q}}(t) \cdot \hat{n}$$

Radiación dipolar eléctrica, magnética y cuadrupolar eléctrica

● Ejemplo de Antena



Sea una pequeña antena de longitud d

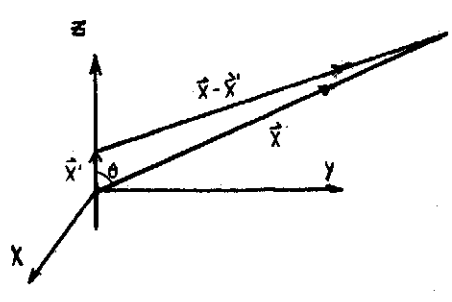
$$\vec{J}(\vec{r}') = I \cdot \text{sen} \left[k \left(\frac{d}{2} - |z'| \right) \right] \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \hat{z}$$

→ Nodos de la corriente en los extremos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$$

Para fuente armónica es →

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{i \cdot k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$



Aproximaciones

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \theta} \approx x \left(1 + \frac{x'^2}{x^2} - 2 \frac{x'}{x} \cos \theta \right)^{1/2}$$

$$\approx x \cdot \left(1 - \frac{x'}{x} \cos \theta \right) =$$

MUY BRUTA

 $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx |\vec{r}|$

NO TAN BRUTA

 $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx x - x' \cos \theta$

∃ condición de contorno de que en los extremos la corriente debe ser nula ⇒ debe haber nodos del seno en $(\pm d/2)$ y los d posibles son $n \cdot \lambda/2$

$d = n \cdot \frac{\lambda}{2}$

$$\frac{e^{i k |\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} e^{i k x} e^{-i k x' \cos \theta}$$

→ acá abajo se aproxima campo muy lejano

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{i k x}}{x} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{-i k x' \cos \theta} dV'$$

→ Extra para los términos de fase

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{z} \cdot \frac{Z I e^{i k x}}{c k x} \left[\cos \left(\frac{k d}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{k d}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A_z \hat{z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = A_z \cos \theta \hat{\theta} - A_z \text{sen} \theta \hat{\phi}$$

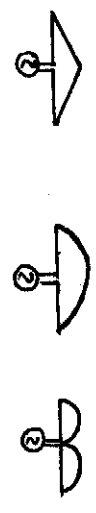
Expresiones

$$\vec{B}_{rad} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \dot{\vec{A}} = i k \hat{n} \times \vec{A}$$

$$\vec{E}_{rad} = \vec{B}_{rad} \times \hat{n} =$$

Estas equivalencias son para campos de radiación normales

$$\vec{B}_{rad} = i k \hat{n} \times \vec{A}$$

$$\vec{E}_{rad} = \vec{B}_{rad} \times \hat{n}$$


- * $\lambda \gg d$ $k \cdot x' \ll 1$ (longitud de onda larga)

$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{c \cdot 2\pi} \left(\frac{k d}{2} \right)^2 \text{sen}^2 \theta$

identificando con $|\vec{p}| = \frac{I \cdot d^2}{2c}$
- * $\lambda/2 = d \rightarrow k d = \pi$ (media longitud de onda)

$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{c \cdot 2\pi} \frac{\cos^2(\pi/2 \cdot \cos \theta)}{\text{sen}^2 \theta}$

esto es muy poco 1er término multipolar
- * $\lambda = d$ $k d = 2\pi$ (una longitud de onda)

$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I^2}{c \cdot 2\pi} \left[\frac{2 \cos^2(\pi/2 \cdot \cos \theta)}{\text{sen}^2 \theta} \right]^2$

● Campos de una Partícula Cargada en Movimiento

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = q \cdot \vec{v}(t) \cdot \delta[\vec{x}' - \vec{r}(t)]$$

$$\rho(\vec{x}, t) = q \cdot \delta[\vec{x}' - \vec{r}(t)]$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \iiint_{V'} \frac{q \cdot \vec{v}(t') \cdot \delta[\vec{x}' - \vec{r}(t')] \cdot \delta[t' - (t - R/c)]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' \cdot dt'$$

$$R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'| \rightarrow R = R(t')$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \iiint_{V'} \frac{q \cdot \delta[\vec{x}' - \vec{r}(t')] \cdot \delta[t' - (t - R/c)]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' \cdot dt'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{q \cdot \vec{v}(t') \cdot \delta[t' - t + R/c]}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \cdot dt'$$

$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \cdot \frac{\vec{v}(t')}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \cdot R(t')} \Big _{t' = t - R/c}$
$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \cdot R(t')} \Big _{t' = t - R/c}$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{q \cdot \delta[t' - t + R/c]}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \cdot dt'$$

▲ Potenciales de Liénard-Wiechert

$$\delta[f(x, x_0)] = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \cdot \delta(x - x_0)$$

$$\delta\left[t' - \left(t - \frac{R(t')}{c}\right)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dt'}\left(t' + \frac{R(t')}{c}\right)} \cdot \delta(t - t')$$

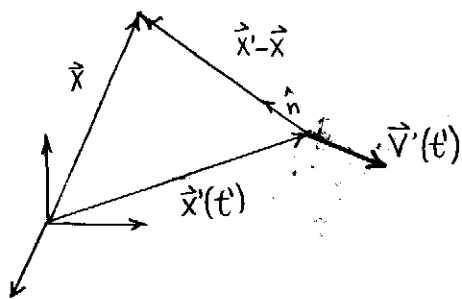
detalle

$$R = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{x^2 + x'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'}$$

$$\frac{dR}{dt'} = \frac{x \cdot \dot{x}' \cdot \vec{x}' - \vec{x} \cdot \dot{x}' \cdot \vec{x}}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'}} = \frac{\dot{x}' \cdot (\vec{x}' - \vec{x})}{R} = -\frac{\vec{r}(t') \cdot \dot{\vec{v}}}{R} = -\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}$$

$$1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} R(t') = 1 - \hat{n} \cdot \frac{\dot{\vec{v}}}{c} = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}$$

vector de $\vec{x}'(t')$ a \vec{x}



Los campos serán:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

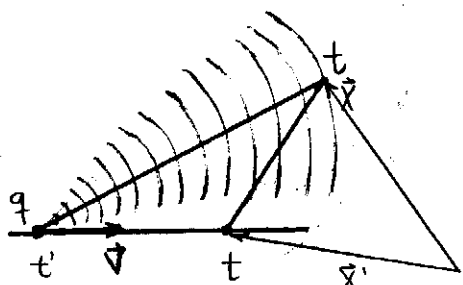
$\vec{E} = q \cdot \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{K^2 R^2} \Big _{ret}$	+	$\left(\frac{q}{c}\right) \cdot \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{K^3 R} \Big _{ret}$
campo de velocidad		campo de aceleración

$$K \equiv 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}$$

Se ve que $\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{v}$

$$\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$$

(que ya sabemos por $\vec{E}_{rad}, \vec{B}_{rad}$)



En t' se produce el campo. Cuando la radiación llega a \vec{x} , la partícula se halla en \vec{x}' (tiempo t) (en tiempo t)

t y t' son instantes diferentes en un mismo sistema inercial

* Si una partícula se mueve con \vec{v} constante ; puedes pasar a un frame S' inercial donde $\vec{v}'=0 \Rightarrow \vec{B}'=0 \Rightarrow \vec{B}' \cdot \vec{E}'=0 = \vec{B} \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$ en todas frame inercial

* EL \vec{E}_{rad} estará dado por el \vec{E}_a

* Toda partícula que está acelerada en un frame inercial debe irradiar ondas EM
 \Rightarrow una partícula recorre una circunferencia (en un campo \vec{B}) si aceptamos que lo que irradia es despreciable.

Sea partícula e con $|\vec{v}|$ constante \rightarrow

$$\vec{B}_v = e \cdot \frac{\vec{E} \times \hat{n}}{\gamma^2 k^3 R^2} \Big|_{ret.}$$

(calculo con Lienard-Wiechert)

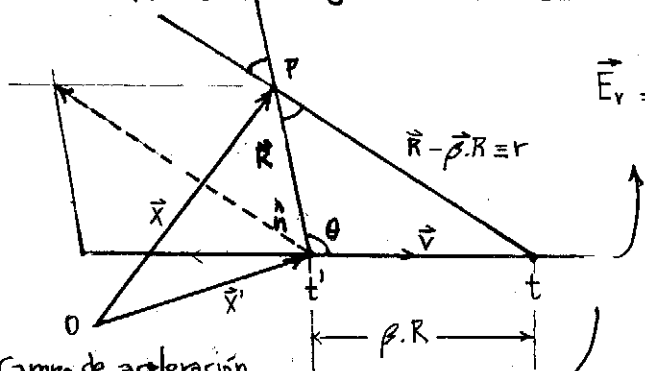
$$\vec{E}_v = e \cdot \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{\gamma^2 k^3 R^2} \Big|_{ret.}$$

$$\vec{B}_{BS} = \frac{e \cdot \vec{v} \times \hat{n}}{c R^2}$$

(calculo con Biot-Savart)

difieren en $\frac{(1-\beta^2)}{(1-\hat{n} \cdot \vec{\beta})}$

● Campo de una carga en movimiento



* Campo de velocidad

$$\vec{E}_v = e \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{\gamma^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 R^2} = e \left[\frac{\vec{R} - \vec{\beta} \cdot R}{\gamma^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 R^3} \right]$$

$$|\vec{E}_v| = \frac{e \cdot \sqrt{R^2 + \beta^2 R^2 - 2R^2 \beta \cos \theta}}{R^3 \gamma^2 (1 - \frac{R \cdot \vec{\beta}}{R})^3}$$

$$|\vec{E}_v| = \frac{e \cdot (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta)^{1/2}}{R^2 \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d|\vec{E}_v|}{d\theta} = 0 \quad \text{extremos}$$

$\theta = 0, \pi$ mov. hacia adelante
 mov. hacia atrás

$$|\vec{E}_v(\cos \theta = 1)| = \frac{e (1 + \beta^2 - 2\beta)^{1/2}}{R^2 (1 - \beta^2)^{-1} (1 - \beta)^3}$$

$$|\vec{E}_v(\theta=1)| = \frac{e}{R^2 \gamma^2 (1 - \beta)^2}$$

$$|\vec{E}_v(\theta=1)| = \frac{e}{r^2 \gamma^2} \quad r^2 = R^2 (1 - \beta)^2$$

* Campo de aceleración

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{k^3 R}$$

$$\vec{E}_a \approx \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{k^3 R}$$

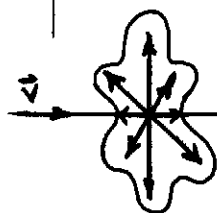
$$|\vec{E}_a| \approx \frac{e}{c} \frac{|\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}|}{R \cdot k^3}$$

Usamos $\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta} \approx 1$
 $\hat{n} - \vec{\beta} \approx \hat{n}$

$$\cos \theta = \beta$$

$$|\vec{E}_v(\cos \theta = \beta)| = \frac{e \cdot \gamma}{r^2}$$

$$|\vec{E}_v(\cos \theta = \beta)| = \frac{e \cdot \gamma}{r^2}$$



intensidad de campo \vec{E} para una partícula con velocidad \vec{v}

similar al campo estático pero con un factor

● Cálculo de Potencia Irradiada

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |E_a|^2 \hat{n} = \frac{e^2}{4\pi c} \hat{n} \left| \frac{\dot{\vec{p}} \times \hat{r}}{R} \right|^2$$

$$dP = \vec{S} \cdot \hat{n} \cdot R^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \frac{\dot{\vec{p}} \times \hat{r}}{R} \right|^2 \frac{1}{R^2} \hat{n} \cdot \hat{n} d\Omega$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \cdot \frac{\dot{v}^2}{c^2} \cdot \sin^2 \theta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta$$

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \iint \sin^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

fórmula de Larmor
con $v/c \ll 1$

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{4}{3} 2\pi \Rightarrow \boxed{P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{3 \cdot c^3}}$$

Ahora podemos prescindir de la restricción no relativista usando que la P es invariante Lorentziano

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{1}{m^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

$$- \frac{dP_A}{dZ} \cdot \frac{dP_A}{dZ} = \frac{d\vec{E}}{dZ} \cdot \frac{d\vec{E}}{dZ} - \frac{d}{dZ} \left(\frac{E^2}{c^2} \right)$$

$$P_A = \left(\frac{E}{c}, -\vec{P} \right)$$

$$P^A = \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right)$$

$$z = \gamma(t - \beta \cdot x_{||}) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \gamma \Rightarrow$$

trayectoria rectilínea \rightarrow

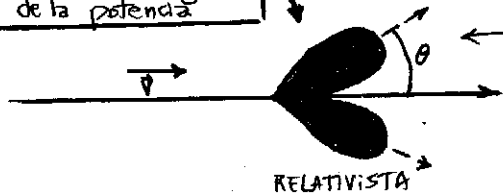
$$\frac{dP}{dZ} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cdot \cos \theta)^5}$$

$$\frac{d\vec{z}}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dt} = \gamma \cdot \frac{d\vec{z}}{dZ} = \frac{d\vec{z}}{dt}$$

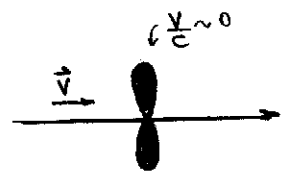
$$P = \frac{e^2 a^2}{3 \cdot c^3} \cdot 2 \cdot \gamma^6$$

$$a = z_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$$

distribución angular de la potencia

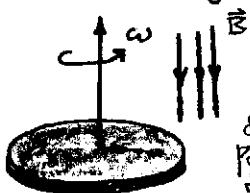


A mayor \vec{v} los lóbulos se pegan al eje de simetría.



$$\theta_{max} \approx \frac{1}{2 \cdot \gamma}$$

● Frenado Magnético



densidad de potencia disipada por corrientes de Foucault

$$\vec{E}' = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \frac{\omega r \hat{\phi}}{c} \times (-B \hat{z}) = -\frac{\omega r B}{c} \hat{r}$$

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E}' = \sigma E'^2 = \boxed{\frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2}}$$

$\hat{r} \hat{\phi} \hat{z}$

Son corrientes de Foucault que frenan el disco

$$P = \iint \frac{\sigma \omega^2 r^2 B^2}{c^2} \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = \frac{\sigma \omega^2 B^2}{c^2} \frac{\alpha^4}{4} 2\pi$$

* En un disco fijo con $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t}$ habrá $\vec{E} = E(r) \hat{\phi}$

$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 \Rightarrow$ se disipa energía por efecto Joule (se calientan los transformadores)

● Esponja EM

en $t=0$ se distribuye una σ en la cara interna

se genera una \vec{j} y un campo \vec{E} radial que NO produce $\vec{B} \Rightarrow \vec{S}=0 \Rightarrow$ no hay radiación. La carga se mueve por el interior hasta llegar a la superficie y alcanzar situación estática $\vec{E}_{int} = 0$.

La energía disipada lo hace en forma de calor pero no se radia.

