

ELECTROSTÁTICA

• campo \vec{E}

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'$$

$$\vec{F} = \int_{V'} \rho(\vec{x}') \cdot \vec{E}(\vec{x}, \vec{x}') \cdot dV'$$

fuerza sobre una distribución

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q_n$$

LEY de GAUSS

Maxwell estáticas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Poisson

Laplace

Potencial escalar

$$\phi(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}') \cdot dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$$

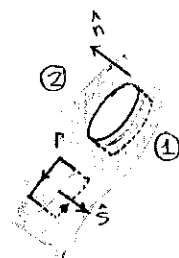
condiciones de contorno

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_L$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L$$



Dipolo puntual
 q = carga en V.A.
 d = distancia
 $\vec{p} = \lim_{q \rightarrow \infty, d \rightarrow 0} q \cdot \vec{d}$
 $\hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$

• Desarrollo Multipolar de una distribución $\rho(\vec{x}')$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{x}^T \vec{Q} \vec{x}}{|\vec{x}|^5}$$

[centrada en el origen]

$$Q = \int \rho(\vec{x}') \cdot dV'$$

carga (momento monopolar)

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{x}') \cdot \vec{x}' \cdot dV'$$

momento dipolar eléctrico

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{x}') \cdot [3x_i x_j - \delta_{ij} |\vec{x}'|^2] \cdot dV'$$

momento cuadrupolar

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

Potencial de un dipolo

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

Campo de un dipolo

MAGNETOSTÁTICA

• campo \vec{B} (todo con $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$)

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot dV'$$

(Biot & Savart)

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_{V'} \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}, \vec{x}') \cdot dV'$$

fuerza sobre una distribución

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_c$$

LEY de Ampere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$-\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Potencial vector

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{x}') \cdot dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Gauge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{cases} 0 & \text{Coulomb} \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{c} & \text{Lorentz} \end{cases}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

fuerza de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}'$$

Maxwell (1865)

Comente de desplazamiento

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

\vec{D} = momento dipolar por área

\vec{P} = momento dipolar por volumen [Polarización]

$$\phi(\vec{x}) = \int_{S_1} \frac{\vec{D}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot d\vec{S}'$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot dV'$$

$$\phi(\vec{x}) = - \int_{V'} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' + \oint_{S_1} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{P} \cdot \hat{n} \equiv \sigma_p$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p$$

Se pueden pensar como densidades de polarización

MEDIOS MATERIALES

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \leftarrow ML \text{ (Medio lineal)}$$

$$\vec{D} = \vec{E} (1 + \chi_e) = \vec{E} \cdot \epsilon$$

susceptibilidad permitividad eléctrica

• Medio no lineal (Electreto)

$$\vec{P} \neq \chi_e \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \neq \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \leftarrow ML \text{ (Medio lineal)}$$

$$\vec{B} = \vec{H} (1 + \chi_m) = \vec{H} \cdot \mu$$

susceptibilidad permeabilidad magnética

• Medio No lineal (Imán permanente)

$$\vec{M} \neq \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \neq \mu \vec{H}$$

la relación entre \vec{B} & \vec{H} depende de la historia del medio

ELECTRODINÁMICA

fem $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ [Ley de Faraday]

$$\vec{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

con $\vec{E}' = \vec{E} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$
 campo medido en el laboratorio
 [E' es irrotacional y por ende no conservativo]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ϕ = potencial E.M. generalizado

• Cambio de Gauge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Gauge de Lorentz

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

\vec{M} = momento dipolar magnético por volumen [Magnetización]

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV'$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_{V'} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot dV' + \oint_{S_1} \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times d\vec{S}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\vec{M} \times \hat{n} \equiv \frac{1}{c} \vec{j}_m$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} \equiv \frac{1}{c} \vec{j}_m$$

Se pueden pensar como corrientes de magnetización

• Desarrollo Multipolar de una distribución $\vec{j}(\vec{x}')$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

[centrada en el origen]

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_{V'} \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \cdot dV'$$

momento dipolar magnético

Aordan Δ toda distribución es como un dipolo magnético

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

potencial vector de un dipolo

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{m}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

Campo de un dipolo