R E L A T I V I D A D G E N E R A L

LUNES 11
MIERC 3

- Información

www.df.uba.ar/users/lmazzi/public html/rgen

"Gravity: An Introduction to Einstein's theory of Relativity" de HARTLE, J.B.

- Introducción

Pensando sobre la fuerza de gravedad

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

, dos asuntos llevan a GR:

- Interacción instantánea: cuando lo pensamos en SR vemos que esto choca con sus postulados. La información viaja a la velocidad de la luz. En el EM esto se tiene en cuenta.

Cuando queremos hacer gravitación teniendo en cuenta la NO-INSTANTANEIDAD aparecen cosas como ondas de gravedad (al igual que en EM aparece radiación).

GR: Relatividad general

SR: Relatividad especial

EM: electromagnetismo

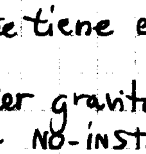
- La masa gravitatoria (m_1, m_2) es la misma masa que aparece en

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

, es decir que la masa inercial es igual a la gravitatoria. La explicación profunda de este hecho llevó a Einstein al principio de equivalencia.

El parámetro que determina qué límite debo considerar para un objeto esférico es:

$$\boxed{\frac{GM}{Rc^2}}$$



M

, donde

$\frac{GM}{Rc^2} \ll 1$ (efectos de GR despreciables)

$\frac{GM}{Rc^2} \not\ll 1$ (efectos no despreciables)

Así, para el Sol tenemos 1.10^{-6} y para una estrella de neutrones ~ 0.1.

Sabemos que la gravedad domina a gran escala (COSMOLOGÍA y ASTROFÍSICA), pero aún así sólo cierra bien en términos clásicos pues no ha podido cuantificarse.

Algunos hitos son:

- 1905. Relatividad especial
- 1907. Principio de equivalencia
- 1915. Relatividad general (explicación precesión órbita Mercurio, predicción de la curvatura de la luz por un objeto masivo).
- 1919. Eddington observa y confirma la predicción
- 1929. Hubble observa la expansión del Universo.

Predicción de la existencia de ondas gravitacionales. Estudio de modelos estelares (colapso → BH); ahí se aplica GR.

- 1960. Se verifica el corrimiento al rojo gravitacional.
- 1964. Se descubre la CBR (Penzias & Wilson)
- 1974. Se confirma que la pérdida de energía en un sistema binario puede encajar con la emisión de ondas gravitacionales; las velocidades cambian de tal forma que se puede pensar que se pierden ondas de gravedad (detección indirecta). Esto es por analogía con lo que sucede en EM (Hulse-Taylor)
- 1979. Efectos de lentes gravitacionales son vistos por primera vez
- 1992. Se detectan inhomogeneidades en la CBR (satélite COBE). A partir de aquí hablamos de cosmología de precisión.
- 1998. EL Universo se expande y lo hace aceleradamente (antes los modelos sugerían expansión desacelerada). Lo que se desconoce es a qué atribuirla.

- Experimento de Eötvos [1889 Budapest]

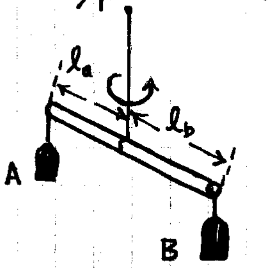
Supongamos que la $m_i \neq m_g$

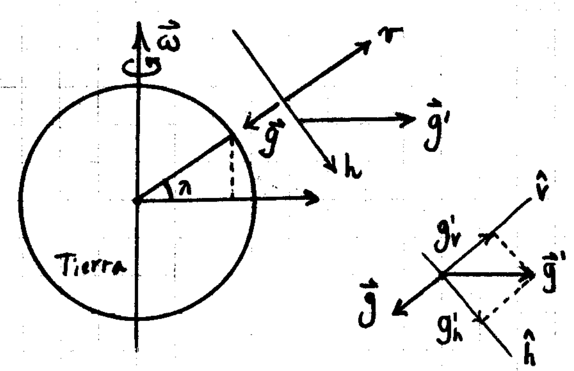
$$\vec F = m_i \vec a = m_g \vec g \Rightarrow$$

$$\vec a = m_g / m_i \, \vec g$$

, un objeto se aceleraría diferente si no fuesen iguales las masas. Desde la época de Galileo usamos que son iguales las masas.

El experimento usa una balanza de torsión. La balanza está en la Tierra, que rota, pero estamos en un sistema no-inercial y por ello tenemos una fuerza centrífuga que depende de la masa inercial y la interacción gravitatoria depende de la m_g. Si fuesen diferentes ambas masas aparecería un torque que haría girar a la balanza. Se debería poder medir dicho τ.





$$|\vec g'| = \omega^2 R \cos(\lambda) \quad \text{con } g' \ll g$$

$$g'_v = \omega^2 R \cos^2 \lambda$$
$$g'_h = \omega^2 R \cos \lambda \cdot \operatorname{sen} \lambda$$

$$T = l_A \cdot m_{iA} \cdot g'_h - l_B \cdot m_{iB} \cdot g'$$

$$0 = l_A [m_{gA} \cdot g - m_{iA} \cdot g'_v] - l_B [m_{gB} \cdot g - m_{iB} \cdot g'_v]$$

, pero aprox. vale que $l_A \cdot m_{gA} = l_B m_{gB}$ con $g' \ll g$; entonces

$$\boxed{T \approx g'_h l_A \cdot m_{gA} \left[\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}} \right]}$$

Habrá una torsión en la balanza, y mediré la diferencia entre m_i y m_g.
Eötvos encontró que esta era nula y además lo podía asegurar con una precisión tal que:

$$\frac{m_i}{m_g} = 1 \pm 10^{-9}$$

, donde este error se relaciona con la medición del cero en el torque.

En 1964 Dicke hace el experimento nuevamente y ve que:

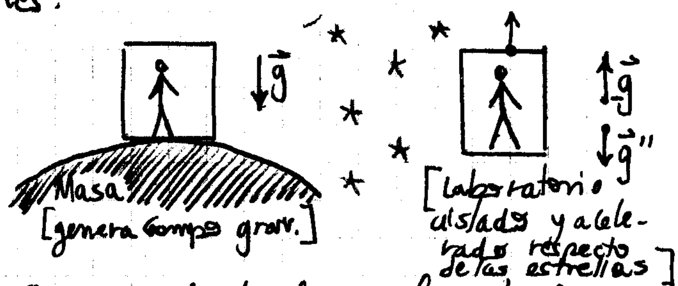
$$\frac{m_i}{m_g} = 1 \pm 10^{-11}$$

Experimentalmente son iguales las masas gravitatorias e inercial

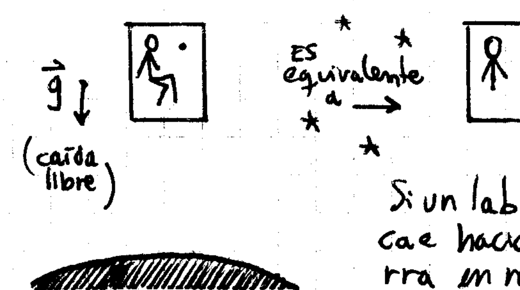
Dado que el campo gravitatorio de los experimentadores podría alterar los valores se realizó el experimento a remoto.
Con experimentos láser en la Luna se ve que la precisión es del $\sim 1.10^{-13}$.

● Principio de Equivalencia [1907]

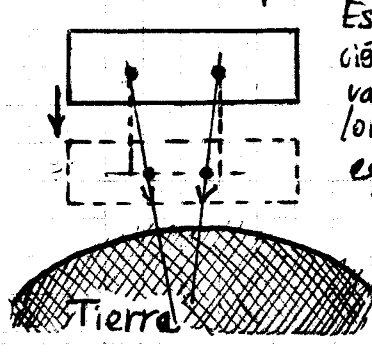
Las masas m_i y m_g son las mismas, entonces podemos imaginar que aceleración y gravedad son lo mismo.
Consideremos las dos situaciones siguientes:



Son equivalentes desde el punto de vista mecánico. En el labo aislado aparece una aceleración no inercial de $+\vec g$ (es $\vec g''$)
En caída libre la persona no siente su peso



Si un laboratorio cae hacia la tierra en realidad tengo efectos debidos a la curvatura: entonces no es tan equivalente la situación respecto al laboratorio suspendido en el espacio: dos objetos se van aproximando.

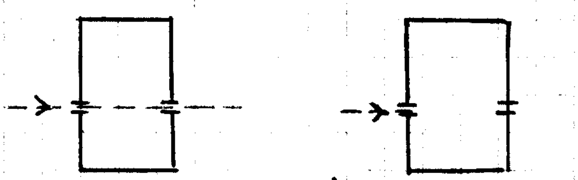


Esto nos da la intuición de que esta equivalencia funciona LOCALMENTE en el espaciotiempo.
En cualquier punto del espaciotiempo es posible elegir un sistema

La equivalencia vale $\forall$ experimento físico de referencia tal que las leyes de la física sean las leyes de SR (en ausencia de gravitación) Nos permite anular la gravedad. Este sistema de referencia es el SISTEMA LOCALMENTE INERCIAL.

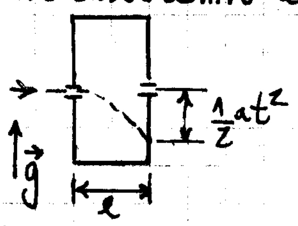
En cualquier punto del espacio-tiempo es posible elegir un sistema de referencia tal que las leyes de la física son las leyes de la SR. Este sistema sería el de la caída libre del que hablamos (uno se olvida de la gravedad y resolvemos con SR). Tenemos consecuencias notables de este principio de equivalencia.

Un campo gravitacional tiene que tener un efecto sobre un rayo de luz (deflexión de la luz)

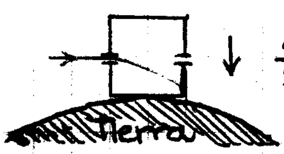


$\vec{a}=0$ $\qquad$ $\vec{a}\uparrow$ [qué sucede?]

Pero desde dentro del ascensor se ve



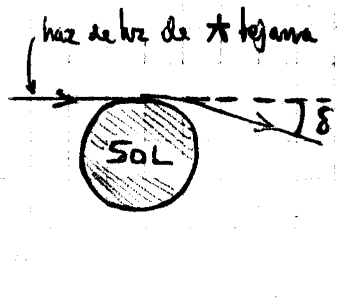
curvado. Este problema debería ser equivalente a tener un ascensor en reposo en la superficie de la Tierra.



$\downarrow \frac{1}{2}gt^2$, $t=\ell/c$

La gravedad tiene entonces un efecto sobre los haces de luz.

Sea que el campo gravitacional no es uniforme. Veamos una estrella lejana y un haz de luz, que pasa cerca del Sol.



Ahora el campo G no es constante, podemos suponer que este efecto es chico para el Sol. Se ve que:

$$\boxed{\delta \approx \frac{2GM}{Rc^2}}$$

Este es el mismo resultado de scattering por una partícula; en efecto se obtiene

$$\delta \approx \frac{2GM}{RV^2}$$

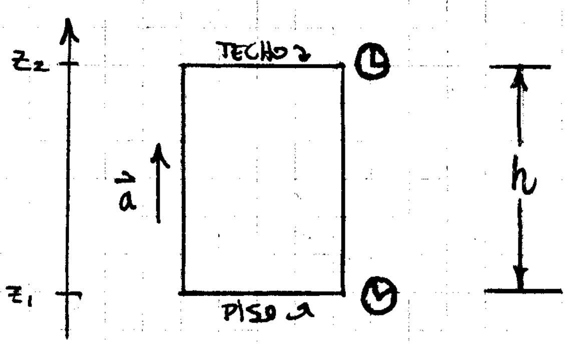
Sin embargo haciendo bien el cálculo el resultado obtenido es algo mayor debido a ciertos ajustes (el espacio se comporta de manera extraña).

Teniendo en cuenta esos detalles se llega a

$$\delta \approx \frac{4GM}{Rc^2}$$

- **Corrimiento al Rojo Gravitacional**

Sea un sistema inercial de la SR.



En el piso hay relojes que se mandan señales.

$$z_1 = \frac{1}{2}at^2$$

$$z_2 = h + \frac{1}{2}at^2$$

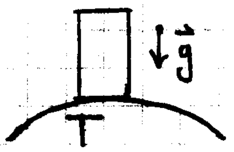
Sea que el reloj del techo emite con período ΔT_2, entonces

$$f_2 = \frac{1}{\Delta T_2} \qquad f_1 = \frac{1}{\Delta T_1}$$

donde f_1 será la frecuencia de recepción de los pulsos. Haciendo las cuentas, vemos que se tendrá:

$$\Delta T_1 \approx \Delta T_2\left(1 - \frac{ah}{c^2}\right)$$

, donde se trabaja a primer orden en $\Delta T_1, \Delta T_2$.
Pero ahora por el principio de equivalencia resulta que:

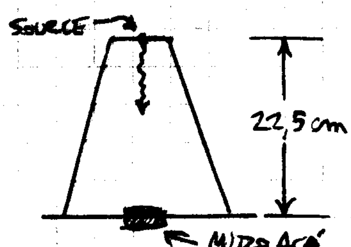


$$\Delta T_1 \approx \Delta T_2\left(1 - g\frac{h}{c^2}\right)$$
$$f_1 \approx f_2\left(1 + hg/c^2\right)$$

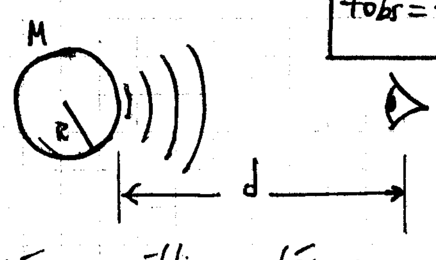
Veremos que los ΔT_i son diferentes debido a la gravedad.
Pero:
$$hg = \phi_2 - \phi_1$$
es la diferencia en el potencial gravitatorio.

$$\boxed{f_{obs} = f_{emi}\left[1 + \frac{\phi_{em} - \phi_{obs}}{c^2}\right]}$$

Este efecto (pequeño) debe ser tenido en cuenta para los sistemas de GPS.
La expresion vale también para un campo que no varíe con el tiempo. Fue observado este fenómeno en 1960
Las variaciones son del orden
$$\frac{\Delta f}{f} = 2{,}5 \cdot 10^{-15}$$
y se miden con efecto Mossbauer.
Dada una fuente de protones que emite con frecuencia f, la frecuencia que se mide en el fondo es otra.



Para un objeto estelar hablamos del corrimiento al rojo gravitacional dado por
$$\boxed{f_{obs} = f_{em}\left(1 - \frac{GM}{RC^2}\right)}$$



, donde $d \lll R$ y se ha tirado pues daría un último término.

■ Teoría
● Gravitación y Geometría
Toda la teoría llevó de 1907-1915 la correcta formulación y cierre.
La idea es que las partículas libres (gravitatorias) siguen trayectorias rectas en un espacio curvado; estas trayectorias son las geodésicas.

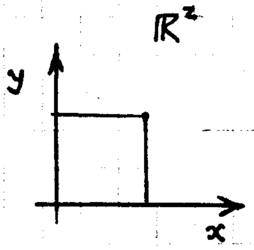
$$\text{masa-energía} \searrow$$
$$\text{curva el espacio}$$
$$\downarrow$$
$$\text{siguen una geodésica}$$

Según enunciamos el principio de equivalencia podemos cerca de "P" considerar que las leyes de la física son las de SR

Punto P $\quad \xi^{\alpha}_{P} \nearrow$ sistema $\quad \alpha = 0,1,2,3$
$$dS^2_{AB} = -c^2\left[(d\xi^0_P)^2 + (d\xi^1_P)^2 + (d\xi^2_P)^2 + (d\xi^3_P)^2\right]$$
evento A: ξ^{α}_{P}
evento B: $\xi^{\alpha}_{P} + d\xi^{\alpha}_{P}$
$$dS^2_{AB} = \eta_{\alpha\beta} \cdot d\xi^{\alpha}_{P} \cdot d\xi^{\beta}_{P}$$
, donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski.
Ahora consideraré $c \equiv 1$.
Sea otro sistema de coordenadas, no necesariamente en caída libre:
$$X^{\mu} \rightarrow \text{otro sistema}$$
$$\xi^{\alpha}_{P}(X^{\mu})$$
$$\left.\begin{aligned} d\xi^{\alpha}_{P} &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial X^{\mu}} dX^{\mu} \\ d\xi^{\beta}_{P} &= \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial X^{\nu}} dX^{\nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$dS^2_{AB} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial X^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial X^{\nu}} dX^{\mu} dX^{\nu}$$
$$\boxed{dS^2_{AB} = g_{\mu\nu}(x)\, dx^{\mu} dx^{\nu}}$$
, en la métrica del espacio-tiempo está metida toda la información gravitacional; no es una métrica como la de Minkowski.

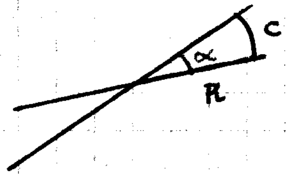
La idea es que la GRAVEDAD deforma la geometría euclídea.

Pero también podemos ver este concepto haciendo una analogía: el plano $\mathbb{R}^2$, supongamos una superficie de un plano y de un círculo: ¿cómo puedo saber localmente si estoy en un plano o en una esfera?



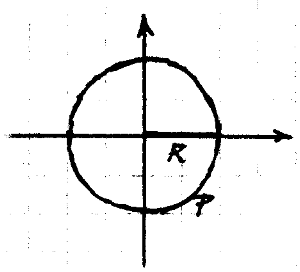
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2$$

son dos diferenciales en $\mathbb{R}^2$ pero en diferentes sistemas de coordenadas. Defino una recta como la "curva" que minimiza la distancia entre dos puntos. Defino el ángulo como el cociente entre arco 'c' y la distancia 'R'



$$\varphi = \frac{c}{R}$$

Puedo definir una circunferencia y calcular el cociente P/R



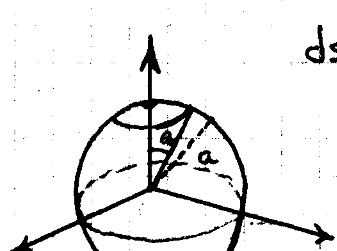
$$R = \int_{c_1} ds$$

$$P = \int_{c_2} ds$$

$$\boxed{P = 2\pi R}$$

Si la superficie no es plana, sino esférica hacemos

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\varphi^2)$$



Me paro en un punto y marco todos los puntos a una dada distancia (ángulo θ_0). Entonces

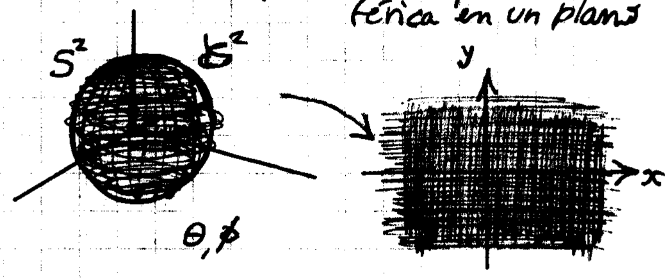
$$R = a . \theta_0$$

$$P = 2\pi a \,\text{sen}\,\theta_0$$

$$\boxed{P = 2\pi a . \text{sen}\left(\frac{R}{a}\right)}$$

, y como vemos no es la misma expresión que obtuvimos antes.

Sea querer mapear una superficie esférica en un plano



$$\frac{\pi}{2} - \theta = \lambda \quad \text{latitud}$$

$$x = \frac{L\phi}{2\pi} \qquad y = y(\lambda) \leftarrow \text{esta es la proyección}$$

$$ds^2 = a^2[d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\phi^2]$$
$$= a^2[d\lambda^2 + \cos^2\lambda \, d\phi^2]$$

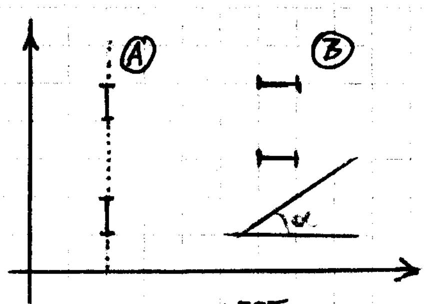
En coordenadas (x,y)

$$ds^2 = a^2\left[\left(\frac{d\lambda}{dy} . dy\right) + \cos^2\lambda(y)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 dx^2\right]$$

, una proyección usual es la rectangular

$$\boxed{y = \frac{L\lambda}{\pi}} \Rightarrow$$

$$ds^2 = a^2\left[\left(\frac{\pi}{L} dy\right)^2 + \cos^2\left(\frac{\pi y}{L}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 dx^2\right]$$



, iguales distancias VERT en el mapa son iguales distancias en la realidad A, en cambio iguales distancias HOR en el mapa no son iguales en la realidad B.

No se respeta el área, asimismo la distancia más corta entre dos puntos del mapa no es la distancia más corta en la realidad. También los ángulos no son iguales entre mapa y realidad.

La proyección usual es MERCATOR, que usa:

- $y(\lambda)$:
- $ds^2 = \Omega(x,y).(dx^2 + dy^2)$

, las distancias son proporcionales a $[dx^2 + d^2y]$ y los ángulos se corresponden al caso real (en la esfera).

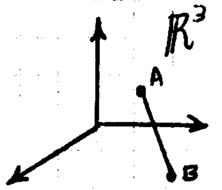
En general los mapas, como un todo, tendrán otros problemas asociados a las deformaciones y a la no univocacidad de la asignación punto-punto

polo ⟶ línea

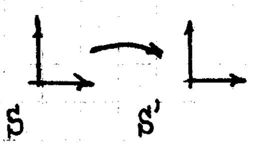
- Conceptos de SR

En el espacio-tiempo de Newton asumimos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



, la distancia $\overline{AB}$ es invariante frente a traslaciones y rotaciones y frente a transformaciones de Galileo. El tiempo es absoluto, y



$$t = t' \qquad [1]$$
$$ds^2 = ds'^2$$

se conservan [1] por separado. Un vector se representa sencillamente y varía de acuerdo a:

$$\vec{x}' = R\vec{x}$$

$$\vec{A}' = R\vec{A}$$ ← cambia como la posición

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

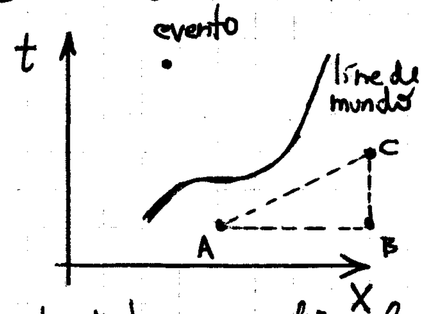
$$\vec{A}\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Cuando pasamos al espacio-tiempo de Minkowski

$$d^2s = -d^2t + dx^2 + dy^2 + d^2z$$

$$d^2s = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu$$

, tenemos diagramas espacio temporales:

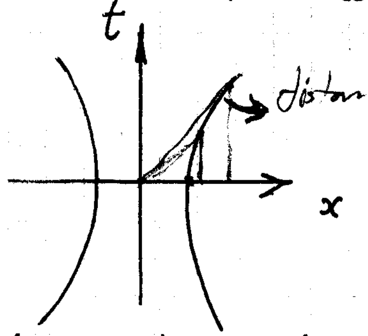


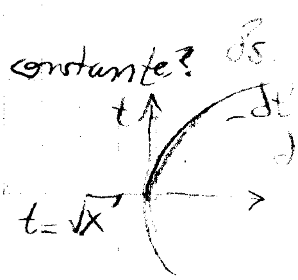
, ahora la distancia sobre el diagrama no representa la distancia real.

$\overline{AB}$: mismo t → más larga la distancia porque si $\Delta t \neq 0$ resta su aporte.

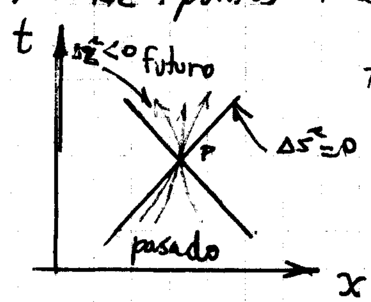
$\therefore \; d(AB) > d(AC)$

La distancia entre un punto y el origen va como una hipérbola:





Otro concepto importante es el de conos de luz: puntos tales que su distancia espacio temporal



$\Delta S_{PD}^2 = 0$

El tiempo propio: son dos puntos con una separación pequeña.

$$\boxed{-ds^2 = d\tau^2} \quad \text{si } ds^2 < 0$$

, su definición es el tiempo medido por un reloj si el reloj está en el mismo lugar

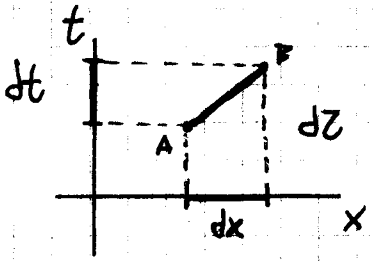
$$d^2s = -d^2t$$

Por otro lado si

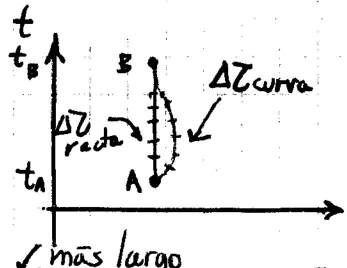
$A \rightarrow (t, \vec{x})$

$B \rightarrow (t+dt, \vec{x}+d\vec{x})$

$$\Rightarrow d\tau^2 = dt^2(1-v^2), \text{ con } v = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$$



Queremos calcular el $d\tau$ medido con



RECTA ↳ $d\tau = dt$

CURVA ↳ $d\tau = dt.\sqrt{1-v^2}$

$$\Delta\tau_{recta} = t_B - t_A = \int_A^B dt$$

$$\Delta\tau_{curva} = \int_A^B d\tau = \int_A^B dt\sqrt{1-v^2(t)}$$

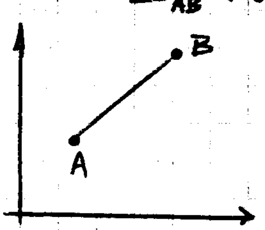
$$\Delta\tau_{curva} < \Delta\tau_{recta}$$

El problema de la paradoja de los gemelos es que un sistema está inercial y el otro se acelera. Si ambos se aceleran simétricamente entonces NO hay paradoja.

TEMP. SEP domina la parte negativa (la det)

Sean A,B temporalmente separados

$\Delta S^2_{AB} < 0 \Rightarrow$ La recta es la trayectoria que maximiza el tiempo propio.



Como están temporalmente espaciados puedo pasar a otro sistema donde los puntos espaciales son el mismo

@

● Transformaciones de Lorentz

Aquellas que dejan invariante la distancia diferencial.

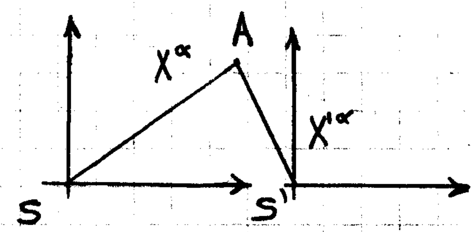
$$X^\alpha \longrightarrow X'^\alpha$$

es una transformación de Lorentz si

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\alpha\beta} dX'^\alpha dX'^\beta$$

, donde $X'^\alpha = X'^\alpha(x)$.

Otra manera de introducir la transformación de Lorentz es usando que 'c' es la misma en todos los frames inerciales



$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = 0$$

esto vale si la velocidad 'c' es cte.

$$\boxed{X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta X^\beta + a^\alpha}$$

UNA COMBINACIÓN LINEAL

los que realizan la transformación de Lorentz son los Λ^α_β

$$\eta_{\alpha\beta} dX'^\alpha dX'^\beta = ds'^2$$

, pero $dX'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dX^\beta \Rightarrow$

$$\eta_{\alpha\beta} dX'^\alpha dX'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu dX^\mu \Lambda^\beta_\nu dX^\nu$$

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu dX^\mu dX^\nu$$

, para que sea una transformación de Lorentz necesito

$$\boxed{\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}}$$

, donde las $\Lambda^\alpha_\mu \in 4\times4$, en principio 16 elementos. Pero tengo 10 ecuaciones independientes (por la simetría de las Λ)

Al resolver la ecuación quedan 6 parámetros independientes (tres boosts y tres rotaciones)*.

Para los boosts

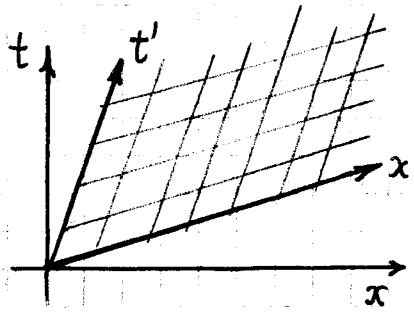
$$\Lambda^\alpha_\beta = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\vec{v} \\ \hline \gamma\vec{v} & \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2} v_i v_j \end{array}\right)$$

* De ahí que sean 6 el # de parámetros de una transf. de Lorentz

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

que es una forma general. Un boost en $\hat{x}$ sería:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv) \\ y' = y \qquad z' = z \end{cases}$$



t' son aquellos puntos para los cuales es $x'=0 \rightarrow x = vt$

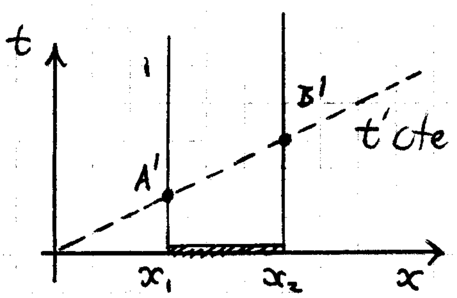
x' son aquellos puntos para los cuales es $t'=0$ y $t = xv$

Las transformaciones de Lorentz tienen la ventaja de tener:

simultaneidad es relativa: si A y B son simultáneos en S, no son simultáneos en S'

● Contracción de longitudes

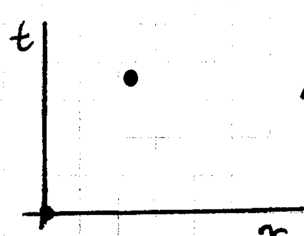
$$L_0 = x_2 - x_1$$



$$\left(\Delta S^2_{AB}\right)^{1/2} = L = L_0\sqrt{1-v^2}$$

● Dilatación temporal

Consideramos en x' cte, t' será:



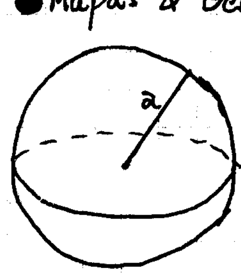
$$\Delta \tau^2_{AB} = -\Delta S^2_{AB} = \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2 = (\Delta t')^2$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v^2}$$

■ Práctica

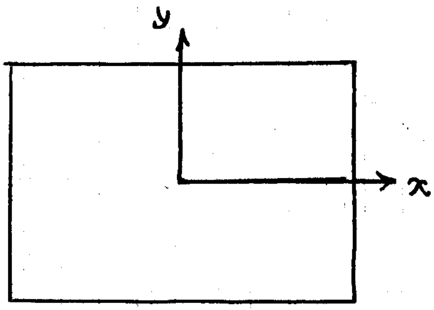
● Mapas & Geometría

27-8-8



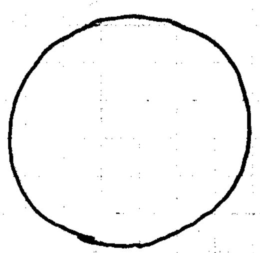
$$\theta = \lambda = \frac{\pi}{2} - \theta_{esf}$$

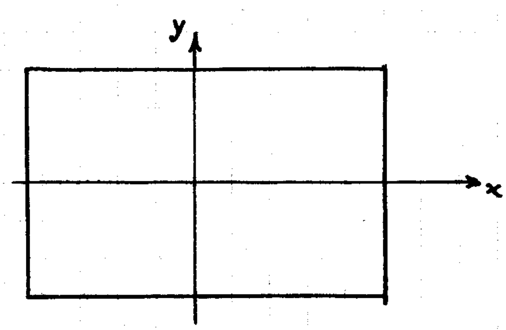
World Plot



$$x = \frac{L\varphi}{2\pi}$$

$$y(\theta)$$





$$\boxed{y(\theta) = \frac{L}{2\pi} \cdot \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{\varphi} \cdot \frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

Podemos usar el elemento de línea:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi^2)$$
$$= g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$
con $dx^0 = d\theta$, $dx^1 = d\varphi$
$$= g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2$$
$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

, el producto escalar que usamos es:

$$\cos\alpha = \frac{U.V}{|U|.|V|}$$

$$U.V = g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu = g_{\theta\theta}U^\theta V^\theta + \cancel{g_{\theta\varphi}U^\theta V^\varphi} + \cancel{g_{\varphi\theta}U^\varphi V^\theta} + g_{\varphi\varphi}U^\varphi V^\varphi$$

, donde los tachados son nulos porque no se mezclan φ y θ

$$U^\theta = 0 \qquad U^\varphi = 1$$

trayectoria $\rightarrow (\theta(\lambda), \varphi(\lambda))$

λ parámetro

$$V^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \quad , \quad V^\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

$$U.V = a^2.\cos^2\theta . \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

$$|U| = \sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu} = a.\cos\theta$$

$$|V| = \sqrt{a^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + a^2\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}$$

1-9-08

$$\cos\alpha = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \cos^2\theta}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 + \cos^2\theta}}}$$

Ahora quiero evaluar la distancia entre dos puntos. Volvemos a:

$$ds^2 = a^2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

, pero queremos hacer un cambio de coordenadas

$$Y(\theta) \longrightarrow d\theta \leftrightarrow dy$$
$$X(\varphi) \longrightarrow dx \leftrightarrow d\varphi$$

$$d\theta = dy.\frac{2\pi}{L}.\cos\theta$$

$$d\varphi = \frac{2\pi}{L}.dx$$

$$d^2s = \Omega^2(Y)\left(dY^2 + dX^2\right)$$

$$\text{con} \quad \Omega(Y) = \frac{2\pi a}{L\cosh\left(\frac{2\pi Y}{L}\right)}$$

, donde he utilizado:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\cosh\left(\frac{2\pi Y}{L}\right)}}$$

la distancia será:

$$D = \int_{Y_1}^{Y_2}\Omega(Y).dy$$

$$\boxed{D = a.\left[\theta(Y_2) - \theta(Y_1)\right]}$$

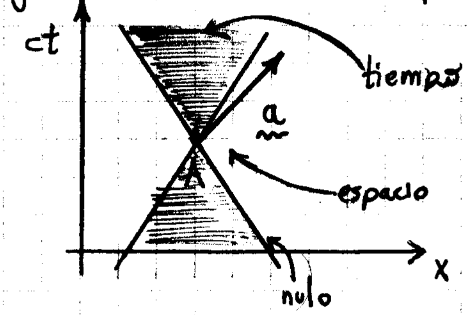
, intuitivamente da lo esperado.

Vemos que no preserva áreas el dado mapa. Vemos que el área no depende de Y

$$dA_P = dY.dX$$
$$dA_{csf} = \Omega^2(Y)\,dX\,dY$$

En el Hartle vemos los mapitas.

Los cuadrivectores son "flechas" en algun punto del espacio-tiempo.



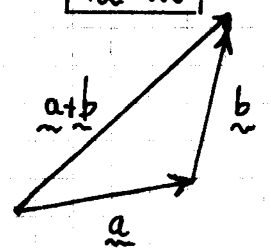
espacio: fuera del cono de luz
tiempo: dentro del cono de luz
nulo: sobre el cono de luz

La longitud del cuadrivector se define como:

$$|\Delta s_{AB}|^2 \qquad -c^2\Delta t^2+\Delta x^2$$

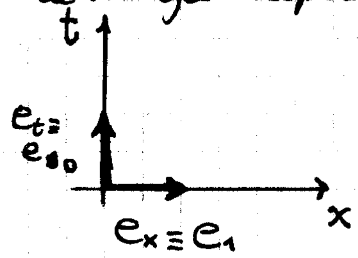
,la suma se define de la manera usual y de igual forma la multiplicación por un escalar

$$\boxed{\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}}$$



$$\boxed{r\underset{\sim}{a}}$$

Una base la formo eligiendo cuadrivectores de longitud 1 en la dirección de los ejes respectivos.

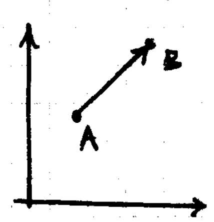


$t \equiv x^0$
$x \equiv x^1$
$y \equiv x^2$
$z \equiv x^3$

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{e_\alpha}}$$

,con a^α componentes.

Ahora definimos un cuadrivector desplazamiento (dif. de coordenadas entre dos eventos).



$$\underset{\sim}{\Delta x} = \Delta x^\alpha \underset{\sim}{e_\alpha}$$

Sea que hacemos una transformación de Lorentz → sé que las componentes deben cambiar así:

$$\Delta x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \Delta x^\beta \Rightarrow$$

$$\boxed{a'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta a^\beta} \qquad [1]$$

alternativamente un cuadrivector es un ente de cuatro cantidades que transforma ante una TL como [1].

Por otro lado digo que los cuadrivectores cambian así [1], pero la base cambia también.

Defino un producto escalar:

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = a^\alpha \underset{\sim}{e_\alpha}\cdot b^\beta \underset{\sim}{e_\beta}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = a^\alpha b^\beta\, \underset{\sim}{e_\alpha}\cdot\underset{\sim}{e_\beta}}$$

,y digo que: $\boxed{\underset{\sim}{e_\alpha}\cdot\underset{\sim}{e_\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}}$

,así la longitud del vector está relacionada con este producto escalar de una forma intuitiva

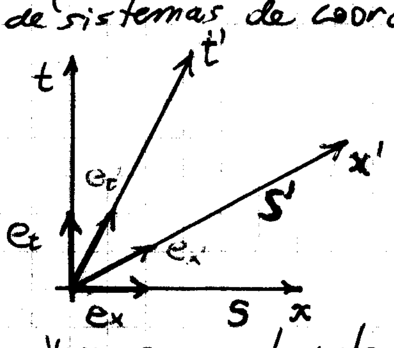
$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a} = \eta_{\alpha\beta}\, a^\alpha a^\beta \quad y$$

$$|\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{a}|^{1/2} = \text{LONGITUD DEL VECTOR}$$

Asimismo de esta manera definido es invariante ante TL (cosas consistentes que le pedimos al producto escalar).

Así resulta ser un escalar de Lorentz (no cambia frente a un cambio de sistemas de coordenadas).

La TL deja invariante el intervalo $(ds)^2$



$$\underset{\sim}{e_t}\cdot\underset{\sim}{e_x} = 0$$

$$\underset{\sim}{e_{t'}}\cdot\underset{\sim}{e_{x'}} = 0$$

Veamos que esto vale:

$$\underset{\sim}{e_t} = (1,0,0,0)$$
$$\underset{\sim}{e_x} = (0,1,0,0)$$

$e_{t'}\cdot e_{x'}$ puedo hacerlo escribiendo las componentes de estos cuadrivectores en el sistema S.

El S' se mueve con velocidad V

a lo largo del eje x en relación al sistema S. En S es

$$\underset{\sim}{e}_{t'} = (1,0,0,0) \quad \underset{\sim}{e}_{x'} = (0,1,0,0) \rightarrow \text{en } S'$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - xv) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases} \Rightarrow$$

uso la transformación inversa:

$$t = \gamma(t' + x'v) \quad x = \gamma(x' + vt') \Rightarrow$$

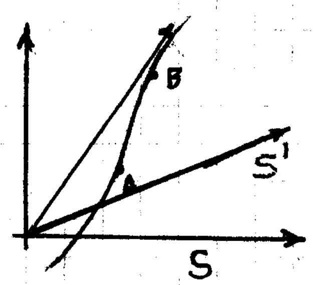
haciendo el cambiaso:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{e}_{t'} = (\gamma, \gamma v, 0, 0) \\ \underset{\sim}{e}_{x'} = (\gamma v, \gamma, 0, 0) \end{array}\right] \rightarrow \text{en } S$$

Se ve a ojo que el escalar da nulo:

$$\boxed{\underset{\sim}{e}_{t'} \cdot \underset{\sim}{e}_{x'} = -\gamma^2 v + \gamma^2 v = 0}$$

Sea una partícula MASIVA moviéndose por una línea de mundo; definimos la cuadrivelocidad como el vector tangente a la línea de mundo



$$\boxed{U^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau}}$$

$$U'^\alpha = \frac{dX'^\alpha}{d\tau}$$

, como el intervalo de tiempo propio es un invariante

$$S \longrightarrow S' \text{ (sistemas)}$$

$$d\tau \longrightarrow d\tau$$

$$U'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta U^\beta$$

$$\underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{U} = -1 \quad \text{(temporal)}$$

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{dX^\alpha}{d\tau} \frac{dX^\beta}{d\tau} = -1$$

, y el numerador es ds^2.

NB: La cuadrivelocidad de una partícula masiva está siempre dentro del cono de luz

EL cuadrimpulso se definirá como (su normalización)

$$\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{P} = -m^2 \quad \text{, con}$$

$$P^\alpha = m \cdot U^\alpha$$

, donde 'm' es la masa en reposo de la partícula.

- <u>Dinámica Relativista</u>

Escribimos una especie de Segunda Ley como:

$$\boxed{\frac{d\underset{\sim}{P}}{d\tau} = \underset{\sim}{f}}$$

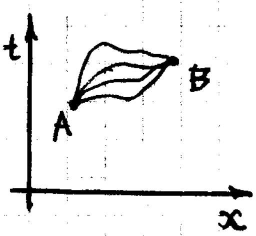
$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = e\,\eta_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

es el ejemplo del campo EM visto en anteriores ocasiones.

Para una partícula libre:

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0$$

y podemos traer una reminiscencia del principio de Hamilton: se mueve de manera tal que el tiempo propio es un extremo.



Se calcula en este caso:

$$\boxed{\tau_{AB} = \int_A^B (dt^2 - dx^2)^{1/2}}$$

y usando el tiempo como parámetro

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt\, (1 - v^2)^{1/2}$$

Pero puedo pensar en otros parámetros:

$$= \int_0^1 d\sigma \left(\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 \right)^{1/2}$$

esta forma es más simétrica. Eligiendo

$$0 \le \sigma \le 1 \qquad \begin{array}{l} t(\sigma = 0) = t_A \\ t(\sigma = 1) = t_B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x(\sigma) \\ t(\sigma) \end{array} \qquad \begin{array}{l} x(\sigma = 0) = x_A \\ x(\sigma = 1) = x_B \end{array}$$

, entonces dentro de la variación de la acción está el $\mathcal{L}$.

$$= \int_0^1 d\sigma\, \mathcal{L}$$

, las ecuaciones de E-L serán:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma}\right)}\right)=0$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\mathcal{L}}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right)=0$$

, ecuación de la trayectoria parametrizada con un parámetro genérico σ. Será más complicada.

$$\boxed{\frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}\right)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}=0}$$

, en cambio usando el τ como parámetro se reduce a la anterior.

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\underbrace{\frac{1}{\mathcal{L}}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\sigma}}\right)=0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)=\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0$$

Cuando se usa un parámetro de esta índole decimos que la transformación es AFÍN y usamos un parámetro AFÍN. En este caso una función lineal de τ es un buen parámetro AFÍN.

Para una partícula en un campo EM, la acción es:

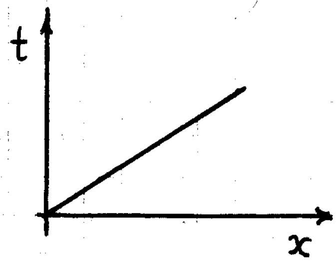
$$[2]\quad S=m\int_A^B d\tau - e\int_A^B d\tau\, A_\mu\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

donde el primer término es el asociado a la partícula libre y el segundo es el acople EM. Se ve en [2] que la masa importa porque hay otro término, pero si sólo tengo el primero la m es una constante multiplicativa irrelevante.

Sea ahora una partícula no masiva (se mueve a lo largo de los conos de luz); entonces:

$$U\cdot U=0$$

Supongamos que nuestra partícula arranca en el origen de un sistema



con velocidad en x, entonces:

$$U=(1,1,0,0).$$

y así:

$$x^\alpha(\sigma)=U^\alpha\sigma$$

, donde σ es el parámetro, me da el recorrido de la partícula sobre la línea de mundo. Tomemos $\sigma=\lambda$. (tema notacional)

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda}=U^\alpha \qquad \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{dU^\alpha}{d\lambda}=0 \qquad \frac{dU^\alpha}{d\lambda}=\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}$$

, podría elegir otro parámetro $\sigma(\lambda)$

$$x^\alpha=U^\alpha\sigma(\lambda)\Rightarrow$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda}=U^\alpha\frac{d\sigma}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}=U^\alpha\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}$$

, ahora combinando ambas

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}=\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\cdot\frac{1}{\frac{d\sigma}{d\lambda}}\cdot\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}$$

resulta más complicado. En el primer caso decimos que estamos usando un parámetro AFÍN.

Podríamos poner un principio variacional para partículas masivas e no-masivas

NOTA Esto será útil más adelante

$$S=\int d\lambda\,\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\cdot\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

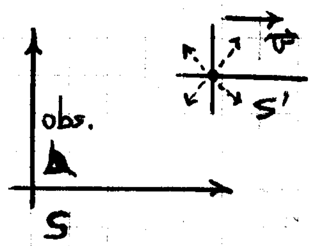
$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=0$$

Para los fotones se tiene el cuadrimpulso cumpliendo lo siguiente:

$$p^\alpha=(E,\vec{p}) \qquad p\cdot p=0$$

$$E=|\vec{p}| \qquad E=\hbar\omega,\quad \vec{p}=\hbar\vec{k}$$

Podemos llegar a un efecto Doppler haciendo



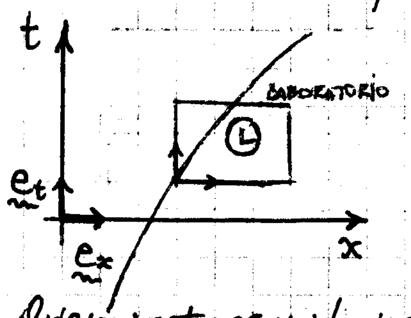
En S' tengo una fuente emitiendo fotones.

Esto se puede ver haciendo la cuenta

$$\omega_{obs} = \omega_{EMITIDA} \cdot \frac{\sqrt{1-v^2}}{1 - v \cdot \cos(\alpha_{obs})}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_{obs}) = \frac{\cos\alpha_{em.} + v}{1 + v \cdot \cos\alpha_{EM}}}$$

Consideremos un observador acelerado (se mueve con $\vec{v}$ no constante). Tenemos un laboratorio que se mueve aceleradamente.

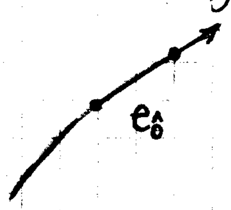


Definimos una base ortonormal para el observador.

Quiero vectores unitarios de tipo tiempo y espaciales.

El sombrero ^ indica la ortonormalidad.

Dos eventos a igual $\vec{x}$ y diferente t para el L estarán sobre la línea. Esto define:



Busco un $e_{\hat{0}}$ de longitud 1 y temporal

$$\boxed{e_{\hat{0}} = U_{obs}}$$

con

$$U_{obs} \cdot U_{obs} = -1$$

y después elegiré:

$$e_{\hat{1}},\ e_{\hat{2}},\ e_{\hat{3}} \quad \text{con:}$$

$$e_{\hat{\alpha}} \cdot e_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$$

Supongamos una partícula que veo en el sistema S'

$$P = P^{\alpha} e_{\alpha} = p^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$$

$$E = P^{0} = -P \cdot e_{\hat{0}} = -P \cdot U_{obs}$$

Esta será la energía que se observa desde el L. En igual manera:

$$p^{\hat{i}} = P \cdot e_{\hat{i}}$$

Considerando el siguiente ejemplo, de un observador con aceleración constante.

$$t(\tau) = a^{-1} \cdot \operatorname{senh}(a\tau)$$

$$x(\tau) = a^{-1} \cdot \cosh(a\tau)$$

con a constante. Se da que:

$$x^2 - t^2 = a^{-2}$$

será:

$$U_{obs} = (\cosh[a\tau], \operatorname{senh}[a\tau], 0, 0)$$

- $U_{obs} = e_{\hat{0}}$
- $e_{\hat{1}} = (\operatorname{senh}[a\tau], \cosh[a\tau], 0, 0)$
- $e_{\hat{2}} = (0, 0, 1, 0)$
- $e_{\hat{3}} = (0, 0, 0, 1)$

, donde todas las coordenadas se hallan en el sistema S.

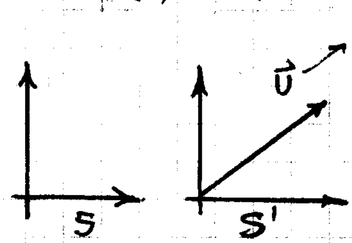
Práctica

Problema 1

Podemos hacerlo de dos maneras:

① $X^{\mu} \longrightarrow X'^{\mu}$

(S) (S')



v' velocidad de la partícula en S'

$$X'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(U)\, X^{\beta}$$

② A partir de la velocidad

$$v^{\alpha} = dx^{\alpha} / d\tau$$

$$v'^{\alpha} = \Lambda'^{\alpha}{}_{\rho}(u)\, v^{\rho}$$ CON ESTO DEBERÍA SALIR

- Problema 2

	x^{α}	x'^{α}	x''^{α}
SIST. →	O	O'	O''
VEL. DE UN SIST. RESPECTO AL ANTERIOR →		$\vec{v}$ MEDIDA EN O	$\vec{v}'$ MEDIDA EN O'

Queremos ver que la transformación será:

$$\Lambda^{\alpha''}{}_{\beta}(v_c) = \Lambda^{\alpha''}{}_{\gamma'}(v')\,\Lambda^{\gamma'}{}_{\beta}(v)$$

- $\Lambda^{\alpha''}(v_c)_{\beta}$ es una TL
- $\Lambda^{\alpha''}(v_c)_{\beta}$ relaciona O'' y O, con O'' moviéndose con la $\vec{v}_c$ (se obtiene del problema 1).

para el 1er punto puedo ver que:

$$[1] \quad \eta_{\epsilon\rho} = \Lambda^{\alpha''}{}_{\epsilon}\,\Lambda^{\delta''}{}_{\rho}\,\eta_{\alpha''\delta''}$$

$$\eta = \Lambda^{T}\eta\Lambda$$

para el 2do como c/u son transformaciones de Lorentz y relacionan un sistema con otro.

Haciendo en [1]

$$\epsilon=\rho=0 \rightarrow -1 = (\Lambda^{0}{}_{0})^{2}(-1) + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^{2}$$

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^{2} = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^{i}{}_{0})^{2} \quad \Lambda^{i}$$

$$\epsilon=\rho=1 \rightarrow -\Lambda^{0}{}_{i}\Lambda^{0}{}_{i} + \sum \Lambda_{i}\Lambda_{i} = 1$$

$$\rho\neq\epsilon \;(0,\ i) \rightarrow \Lambda^{\gamma}{}_{0}\Lambda^{\delta}{}_{i}\,\eta_{\delta 0} = 0$$

$$\eta = \Lambda\Lambda$$

Eventos en reposo en $O \Rightarrow$

$$\frac{dx'^{i}}{dt} = 0 \;\; (dx'=0) \Rightarrow \frac{dx^{i}}{dt'} = -v^{i}$$

$$dx^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}(v)\,dx^{\alpha}$$

$$= \Lambda^{\alpha'}{}_{0}(v)\,dt$$

$$dt' = \Lambda^{0}{}_{0}(v)\,dt$$

$$dx'^{i} = \Lambda^{i}{}_{0}(v)\,dt$$

$$\boxed{\frac{dx^{i}}{dt} = \frac{\Lambda^{i}{}_{0}(v)}{\Lambda^{0}{}_{0}} = -v^{i}}$$

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^{2} = \frac{1}{1-v^{2}}$$

$$\boxed{\Lambda^{0}{}_{0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^{2}}}}$$

$$\boxed{\Lambda^{0}{}_{i} = -v^{i}\,\gamma(v)}$$

Parece que si Λ satisface la condición (ii) $\Rightarrow$ $R\Lambda$ también lo hace, donde R es una rotación espacial.

$$R^{T}1R = 1$$

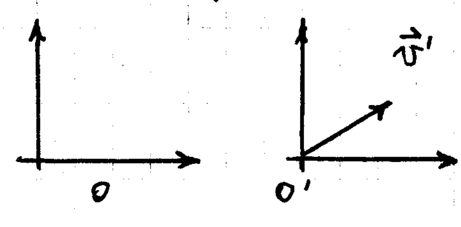
$$\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$$

Entonces para el a) hay que demostrar que el producto de TL es una TL

b) $\Lambda^{0''}{}_{0}(v) = \gamma(v_c)$

c) $\Lambda^{i''}{}_{0}(v) = -v^{i}_{c}\,\gamma(v_c)$

Sea otro caso, de un boost sin rotación:



$$\Lambda^{\alpha''}{}_{\alpha'}(v') = \begin{pmatrix} \gamma(v') & -\gamma(v')v^{i} \\ -\gamma(v)v^{i} & \delta_{ij} + \end{pmatrix}$$

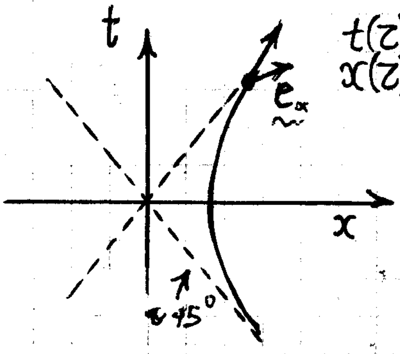
Para b) debo considerar toda la matriz. Pero tengo datos.

3-9-8

Estamos considerando un obs. acelerado en Minkowsky. Resultaba conveniente tener una base orton. Las mediciones del obs. son referidas a esa base: proyectores de los 4-v sobre esos ejes

Teoría

● Observador con cuadri-aceleración constante ‡



$t(\tau)=a^{-1}\operatorname{senh}(a\tau)$
$x(\tau)=a^{-1}\cosh(a\tau)$

t. propio

- Se quiere hallar base ortonormal
- frecuencia de observación de fotones (emitidos en el origen)

Suponemos movimiento sólo en x, ... $\hat{y},\hat{z}$ es constante.

La línea de mundo la determinan $t, x(\tau)$; calcularemos:

$$\boxed{(U_{obs})^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}} \Rightarrow$$

$$(U_{obs})^t = \cosh(a\tau)$$
$$(U_{obs})^x = \operatorname{senh}(a\tau)$$

‡ El obs. acelerado se ve a sí mismo quieto

Intuitivamente el tipo viene en $-\infty = t$ a una gran distancia se acerca y luego se aleja

$$(U_{obs})^{y,z} = 0$$

, asintóticamente toma la velocidad 'c'.

$$V^x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{d\tau/dt} = \tanh(a\tau)$$

$$\boxed{V^x \xrightarrow[\tau \to \pm\infty]{} \pm 1}$$

, la cuadriaceleración es

$$a^\alpha = \frac{dU^\alpha}{dt} \Rightarrow \eta_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = a^2$$

, es constante porque su módulo no varía. Es un caso particular de trayectorias que siguen objetos sometidos a fuerza constante.

Ahora quiero una base ortonormal:

$$e_{\hat{0}} \quad e_{\hat{1}} \quad e_{\hat{2}} \quad e_{\hat{3}}$$

$$\boxed{e_{\hat{0}} = U_{obs} = (\cosh(a\tau), \operatorname{senh}(a\tau), 0, 0)}$$

$$e_{\hat{3}} = (0,0,0,1)$$

$$e_{\hat{2}} = (0,0,1,0)$$

$$e_{\hat{1}} = (a(\tau), b(\tau), 0, 0)$$

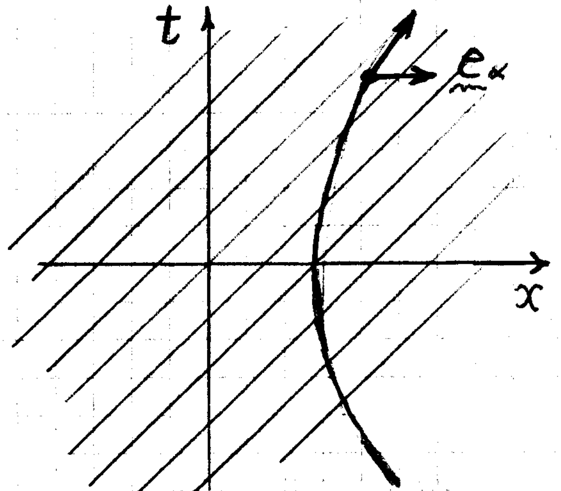
$$\left\{\begin{array}{l} e_{\hat{1}} \cdot e_{\hat{1}} = 1 \\ e_{\hat{0}} \cdot e_{\hat{1}} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$-a(\tau)\cdot\cosh(a\tau) + b(\tau)\cdot\operatorname{senh}(a\tau) = 0$$

$$-a^2(\tau) + b^2(\tau) = 1$$

$$\boxed{e_{\hat{1}} = (\operatorname{senh}(a\tau), \cosh(a\tau), 0, 0)}$$

Si el observador está siendo bombardeado con fotones (líneas a 45° del origen) que salen a diferentes 't' del origen de coordenadas



$\underset{\sim}{P} = (E, \vec{p}) = \hbar \underset{\sim}{k} = \hbar(\omega, \vec{k})$

$\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{P} = 0 \Rightarrow |\vec{k}| = \omega$, para un fotón moviéndose en $\hat{x}$ será:

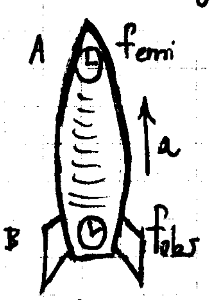
$$\underset{\sim}{k} = \omega(1,1,0,0)$$

La frecuencia obs. por nuestro sujeto será la proyección de $\underset{\sim}{k}$ en $\underset{\sim}{e}_0$ ⇒

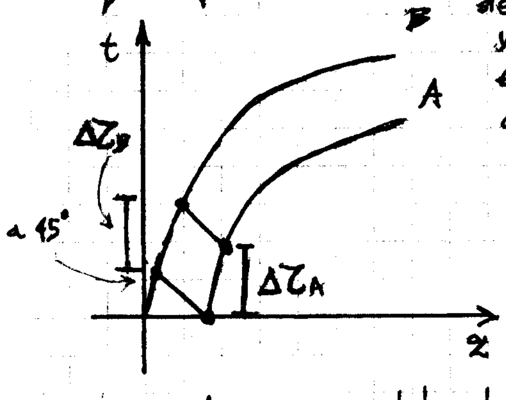
$$\omega_{obs} = -\underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{e}_0 = -\underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{U}_{obs}$$

$$\boxed{\omega_{obs} = \omega \cdot e^{-a\tau}}$$

Detalle caso cohete para cálculo corrimiento al rojo



tomamos dos observadores acelerados 'A','B'. Sea que 'A' emite pulsos hacia abajo para que 'B' reciba. La $f_{emisión}$ es la frecuencia propia de emisión $1/\Delta\tau_A$, y la frecuencia de observación será: $1/\Delta\tau_B$



Cuando el mov. es NO REL. los $\Delta\tau$ son iguales, pero relativísticamente no serán los mismos.

● Gravedad & Geometría

Asumiremos que siendo ausente la gravedad

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

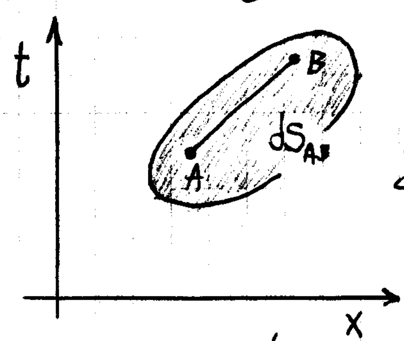
, y en su presencia:

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu}$$

Entonces:

> LA MATERIA Y LA ENERGÍA MODIFICAN LA MANERA DE MEDIR TIEMPOS Y DISTANCIAS (GEOMETRÍA DEL e-t)

La información de ésto se mete en la métrica $g_{\mu\nu}(x)$



donde A y B son puntos cercanos

Ahora para evaluar la distancia debe hacerse la cuenta:

$$dS^2_{AB} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

, pero si A,B están temporalmente separados:

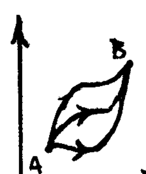
$$dS^2_{AB} < 0 \Rightarrow \boxed{-dS^2_{AB} = d\tau^2_{AB}}$$

Supondremos también que:

> LA TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA DE PRUEBA ES LA QUE HACE EXTREMO AL TIEMPO PROPIO

Aún con gravedad vale el principio variacional

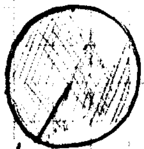
, entonces vemos que la masa 'm' de la partícula de prueba no determina este movimiento.



Ahora queremos ver que una partícula que satisface el principio var., satisface las Leyes de Newton.

A esto le llamamos

- **Límite Newtoniano**



objeto masivo

$\frac{GM}{R} \ll 1 \rightarrow$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ [campo débil]

, consideramos

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(\vec{x})$$

, es una partícula de prueba relativista.

$$\tau_{AB} = \int_A^B (-ds^2)^{1/2} = \int_A^B (-g_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu)^{1/2}$$

La métrica es simétrica

$$\tau_{AB} = \int_A^B [-g_{00}\, dt^2 - 2g_{0i}\, dX^i dt - g_{ij}\, dX^i dX^j]^{1/2}$$

, usando como parámetro el tiempo:

$h_{ij} \ll 1$

$\frac{dX^k}{dt} \ll 1$

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \Big[1 - h_{00} - 2h_{0i}\frac{dX^i}{dt} - v^2 - \underbrace{h_{ij}\cdot\frac{dX^i}{dt}\cdot\frac{dX^j}{dt}}_{\sim 0 \text{ lo tiramos}} \Big]^{1/2}$$

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$$

$$g_{0i} = \underbrace{\cancel{\eta_{0i}}}_{=0} + h_{0i}$$

, si considero los términos restantes y aproximo a 1er orden la raíz:

$$\int_{t_A}^{t_B} dt \Big[1 - \Big(\frac{v^2}{2} + h_{0i}v^i + \frac{h_{00}}{2} \Big) \Big] \simeq \tau_{AB}$$

, calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange serán:

$$\boxed{\frac{d^2X^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}}$$

, pero como en física clásica:

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi$$

podemos obtener Newton si tomamos:

$$\boxed{h_{00} = -2\phi}$$

, las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas son equivalentes a las obtenidas de la acción

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \Big(\frac{v^2}{2} + h_{0i}v^i + \frac{h_{00}}{2} \Big) dt$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}$$

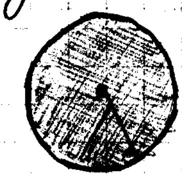
$$\frac{d}{dt}\big[v^i + h_{0i}\big] = \cancel{\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} h_{0j}\Big) v^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

, me quedo a orden 1 en todas partes, con lo cual tiro dos términos

$$\frac{dh_{0i}}{dt} = \frac{dX^j}{dt}\cdot\frac{\partial h_{0i}}{\partial X^j}$$

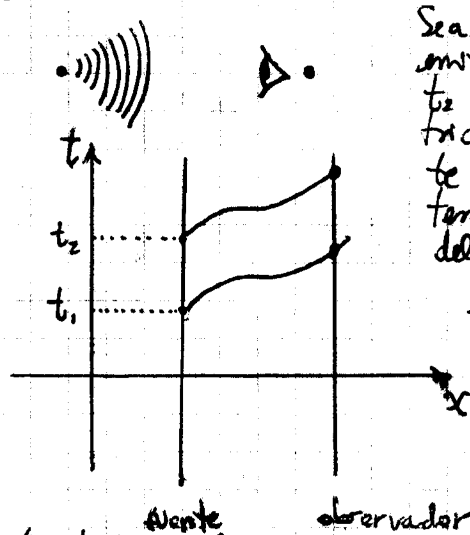
$$\boxed{\frac{d^2X^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}}$$

Para el caso del corrimiento al rojo gravitacional. Supondremos una métrica que no dependa del tiempo:



$$g_{\mu\nu}(\vec{x})$$

Habíamos visto que las frecuencias de emisión y observación eran diferentes. Veamos una deducción diferente.



Sea que la fuente emite en t_1 y en t_2 como la métrica es invariante en el 't' tengo invariancia del dibujo

$$t_2 - t_1 = \Delta t_{em} = \Delta t_{obs}$$

porque el dibujo está trasladado al rojo.

Parecería que no hay corrimiento, pero es en el $\Delta\tau$ donde se manifiesta el cambio.

$$(\Delta\tau_{em})^2 = -g_{00}\cdot X_{em}(\Delta t_{em})^2$$

$$\Delta\tau_{em} = \sqrt{-g_{00}(x_{em})}\,\Delta t$$

$$\Delta t_{em} = \Delta t_{obs} = \Delta t$$

$$\Delta\tau_{obs} = \sqrt{-g_{00}(x_{obs})}\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\tau_{em}}{\Delta\tau_{obs}} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_{em})}{g_{00}(x_{obs})}} = \frac{f_{obs}}{f_{em}}$$

$$\Rightarrow f_{obs} = \frac{1}{\Delta\tau_{obs}}, \quad f_{em} = \frac{1}{\Delta\tau_{em}}$$

Esto se había deducido para el límite de campo débil, aunque aquí es más general.
Volviendo a ese límite:

$$g_{00}(x) \simeq -1 + h_{00}(x)$$
$$= -1 - 2\phi(x)$$

, luego:

$$f_{obs} = f_{em}\sqrt{\frac{1+2\phi(x_{em})}{1+2\phi(x_{obs})}}$$

$$\boxed{f_{obs} \simeq f_{em}\left[1 + \phi(x_{em}) - \phi(x_{obs})\right]}$$

(si $\phi(x) \ll 1$)

La idea es que parece resultar equivalente la gravedad con lo que se anida en el intervalo ds^2 merced a la métrica $g_{\mu\nu}$.

Más adelante veremos que se puede elegir coordenadas en una situación de campo débil tal que:

$$ds^2 = -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)\times (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

, en este supuesto vemos que el intervalo de tiempo propio resulta

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt\left(1 - \frac{V^2}{2} + \phi\right)$$

(caso NR). Esta expresión se puede pensar como la acción de una partícula sometida a gravedad (recorrido de partícula libre). Si pienso en que la estoy forzando a ese recorrido veo que es directamente el 'τ' (tiempo propio) en la trayectoria $A \to B$.
El transcurso del tiempo diferente se debe a la dilatación del tiempo y al corrimiento al rojo

---

● Sistemas localmente inerciales
La métrica $g_{\mu\nu}$ dependerá del sistema de coordenadas. En cada punto del et podemos elegir un sistema de coordenadas tal que la métrica en el nuevo sistema en ese punto será igual a la métrica de Minkowsky y además las derivadas respecto de las coordenadas en ese punto sean nulas

$$\forall P\ \exists\ X'^{\mu} : g'_{\mu\nu}\Big|_P = \eta_{\mu\nu} \ \wedge$$

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial X'^{\rho}}\Big|_P = 0$$

, y este es el llamado sistema localmente inercial.

■ Práctica
● Problema
Vemos la acción de una partícula en un campo EM

$$S = S_{\substack{PART.\\LIBRE}} + S_{INT.}$$

$$S_{PL} = -mc^2\int d\tau = -mc\int d\sigma \times \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\nu}{d\sigma}\eta_{\mu\nu}}$$

$$= -mc^2\int \underbrace{\sqrt{1 - v^2/c^2}}_{\sim\, 1 - \frac{1}{2}v^2/c^2}\,dt$$

$\sigma = ct = x^0$

$T - V_0$

$$\mathcal{L}^{int} = -q\phi$$

$$S_{NR}^{int} = -\frac{q}{c}\int \phi\, dt \cdot c$$

$$= \frac{q}{c}\int A_0\, dx^0$$

, para el caso relativista es

$$S_R^{in} = \frac{q}{c}\int A_\mu\, dX^\mu$$

$$S_R^{in} = \frac{q}{c}\int\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{v}}{c} - \phi\right)dt$$

, donde se recupera lo que ya sabemos para el caso NR.

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - q\phi\right)dt$$

$$\vec{X} \longrightarrow \vec{X} + \delta\vec{X} \quad \text{con}$$

$\delta\vec{X}(t_1) = \delta\vec{X}(t_2) = 0$, pero aquí no estamos sopesando 't' y $\vec{x}$ de igual manera. Podemos hacerlo explícitamente covariante

$$S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\left(-m.c\sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dX^\nu}{d\sigma}\cdot\eta_{\mu\nu}}^{\;\star} + \frac{q}{c}A_\mu\frac{dX^\mu}{d\sigma}\right), \text{ con}$$

$$X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu \quad \delta X^\mu(\sigma_1) = \delta X^\mu(\sigma_2) = 0$$

$$\delta S = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\left(-\frac{m.c}{2}\frac{-2}{\sqrt{}}\frac{d\,\delta X^\mu}{d\sigma}\cdot\frac{dX^\nu}{d\sigma}\eta_{\mu\nu} + \frac{q}{c}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}\delta X^\nu\frac{dX^\mu}{d\sigma} + \frac{q}{c}A_\nu\frac{d\delta X^\nu}{d\sigma}\right)$$

$$= \left(\frac{m.c}{\sqrt{}}\delta X^\mu\frac{dX_\mu}{d\sigma} + \frac{q}{c}A_\mu\delta X^\mu\right)\Bigg|_{\sigma_1}^{\sigma_2}$$

$$+\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\left(-m.c\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{}}\frac{dX_\mu}{d\sigma}\right] - \frac{q}{c}\frac{dA_\mu}{d\sigma} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\cdot\frac{dX^\nu}{d\sigma}\right)\delta X^\mu$$

$$\star\ \sqrt{} = d\tau/d\sigma$$

Por valer cero en los bordes se hacen nulas las expresiones allí evaluadas. Escribimos:

$$\frac{dA_\mu}{d\sigma} = \frac{dX^\nu}{d\sigma}\partial_\nu A_\mu$$

$$\frac{dX^\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\sigma}$$

$\delta S = 0$ con lo cual:

$$mc\,\frac{\cancel{d\tau}}{\cancel{d\sigma}}\cdot\frac{d^2X_\mu}{d\tau^2} - \frac{q}{c}\cdot\frac{\cancel{d\tau}}{\cancel{d\sigma}}\partial_\nu A_\mu . U^\nu + \frac{q}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\cdot\frac{\cancel{d\tau}}{\cancel{d\sigma}} = 0$$

$$p_\mu = m.\frac{dX_\mu}{d\tau}$$

$$c\frac{dp_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c}U^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = 0$$

$$\boxed{\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c^2}F^\mu_{\ \nu}U^\nu}$$

, con:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

, usando

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$E_i = F^{0i}\,;\quad F^{ij} = \epsilon^{ijk}B_k$$

$$B_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jik}F^{ik}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c}F^0_{\ i}U^i$$

$$U = (\gamma(v), \gamma(v)\cdot\vec{v})$$

$$\frac{dp^0}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{q}{c}\vec{E}\cdot\vec{v}\,\gamma(v)$$

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{q}{c}\vec{E}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q/c\, \vec{E}\cdot\vec{v}$$

energía

Es fácil ver que se tiene:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

, pero si hacemos acá escalar con:

$\vec{p}$ y usando $\frac{\vec{p}\cdot c^2}{\mathcal{E}} = \vec{v}$

se llega al resultado pedido.

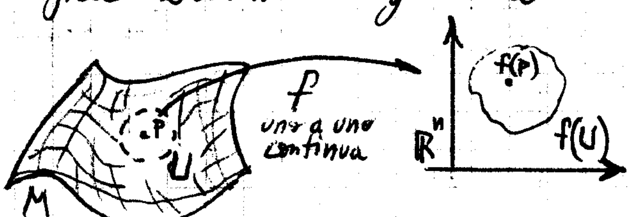
Teoría

- Intro espacio-curvado

Podemos ver algo más en: SCHUTZ, B., "Geometrical Methods of Mathematical Physics".

Supondremos espacio curvo, que matemáticamente denominaremos VARIEDAD en 4D. Si M es un conjunto cualquiera le damos una estructura topológica definiendo cuando un conjunto es abierto.

Así podemos definir ENTORNO. Nos restringiremos a espacios topológicos localmente iguales a $\mathbb{R}^n$.



, suponemos existe $f: M \to \mathbb{R}^n$ que mapea el entorno U de P en un conjunto f(U) en $\mathbb{R}^n$.

Si esto ocurre se dice que f(U) es una variedad de dimensión 'n'.

Las coordenadas de P serán:

$$[x^1(P), \ldots, x^n(P)] \equiv \text{Coordenadas de } P$$

En este espacio introducimos una noción de distancia. Sean dos puntos cercanos P y P', entonces la distancia será:

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu}$$

, donde $g_{\mu\nu}(x)$ es la métrica de la variedad. Suponemos que es simétrica, real, de $n\times n$ la métrica, $g_{\mu\nu}(x)$ y además $\det \neq 0$. Como es real y simétrica es diagonalizable siempre. Si λ son los autovalores

- $\lambda > 0 \Rightarrow$ Métrica Riemanniana
- algún $\lambda < 0$, resto $\lambda > 0 \Rightarrow$ Métrica Lorentziana ★

, esto se refleja en la SIGNATURA de la métrica.

En algún punto de la variedad es la signatura dada $\Rightarrow$ no puede cambiar para otros puntos de la variedad. Se desprende del $\det \neq 0$. Si para algún punto es positivo debe pasar por el cero para cambiar de signo pero ello implicaría $\det = 0$. 8-9-08

El cambio de coordenadas se escribe:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu(x')$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha \qquad dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu =$$

$$= \underbrace{g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}}\, dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$ds^2 = g'_{\alpha\beta}(x')\, dx'^\alpha dx'^\beta$$

, es la métrica en el MISMO PUNTO P pero en función de las nuevas coordenadas

$$\boxed{g'_{\alpha\beta}(x') = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}} \quad [1]$$

Este hecho es remarcable: la geometría no cambia pero sí el sistema coordenado. Vamos el ejemplo de $\mathbb{R}^2$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad g_{11} = 1 = g_{22}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad g'_{11} = 1,\ g'_{22} = r^2, \quad g'_{12} = g'_{21} = 0$$

- Sistemas localmente inerciales

Queremos ver que en todo punto P de una variedad Lorentziana de dimensión 'n' es posible elegir un

★ Usaremos ésta

sistema de coordenadas primado: la métrica sea la de Minkowski:

Es decir:

- $$g'_{\mu\nu}\Big|_p = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- $$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\rho}}\Big|_p = 0 \quad (3)$$

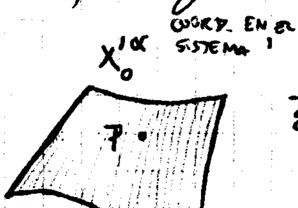
, pero en general NO es posible anular todas las segundas derivadas.

Buscamos un cambio de coordenadas:

localmente inercial: no puedo distinguir si hay o no gravedad.

$$(x^\mu, g_{\mu\nu}[x]) \longrightarrow (x'^\lambda, g'_{\alpha\rho}[x'])$$

tal que valga [1]. Supongamos:



$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big|_p + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\gamma}\Big|_p (x'^\gamma - x'^\gamma_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\gamma \partial x'^\lambda}\Big|_p (x'^\gamma - x'^\gamma_0)(x'^\lambda - x'^\lambda_0)$$

, tenemos un desarrollo serie de Taylor. Desarrollemos para el término en ν, ρ (en [1]).

$$g_{\alpha\rho}(x) = g_{\alpha\rho}(x[x']) = g_{\alpha\rho}(x')$$

, luego:

$$g_{\alpha\rho}(x) = g_{\alpha\rho}\Big|_p + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x'^\gamma}\Big|_p (x'^\gamma - x'^\gamma_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g_{\alpha\rho}}{\partial x'^\gamma \partial x'^\lambda}\Big|_p (x'^\gamma - x'^\gamma_0)(x'^\lambda - x'^\lambda_0)$$

Ahora metemos el desarrollo para las derivadas parciales en la métrica

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\rho}\Big|_p^{\text{orden cero}}$$

$$+ (x'^\gamma - x'^\gamma_0)\left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\cdot\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x'^\gamma} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\gamma} g_{\alpha\rho} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\gamma}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\rho}\right]\Bigg|_p$$

$$+ \frac{1}{2}(x'^\gamma - x'^\gamma_0)(x'^\lambda - x'^\lambda_0)\left[\cdots\right]\Big|_p$$

donde la cosa $[\cdots]$ contiene derivadas segundas de $g_{\alpha\rho}$ y derivadas terceras de x^α.

Cerca del punto 'P' el cambio de coordenadas está definido por las derivadas

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big|_p ; \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda}\Big|_p ; \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda \partial x'^\gamma}\Big|_p$$

Meteremos estas condiciones para lograr el objetivo. Quiero $g(P)$ que sea Minkowski. Es decir busco cumplir (2) lo cual se halla con:

$$\boxed{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\cdot g_{\alpha\rho}\Big|_p = \eta_{\mu\nu}}$$

, que es una igualdad de dos matrices 'n×n' simétricas. Tendremos:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

ecuaciones ~~de~~ [tachado] independientes. En 4D serán 10 ecuaciones.

Las incógnitas serán $n^2 \rightarrow$

$$n^2 > \frac{n(n+1)}{2} \quad (n>1)$$

de manera que siempre podemos elegir derivadas primeras para que sean las de Minkowski; sobrando

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ecuaciones. Con $n=4$ tengo $(16-10)$ ecuaciones y estas 6 sobrantes refieren a la transformación de Lorentz (3 boosts y 3 rotaciones). Refieren a los 6 parámetros libres del grupo de Lorentz.

Vemos que al orden más bajo se puede imponer (2).

Ahora queremos imponer (3).

Ahora queremos anular la derivada primera, es decir anular el término entre corchetes lineal;

$$\left[\begin{smallmatrix}1^{er}\\ \text{CORCHETE}\end{smallmatrix}\right]=0$$

, aparecen derivadas segundas del tipo:

$$\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial X'^\mu \partial X'^\nu}$$

para ajustar (porque hemos ya usado las derivadas primeras en el punto anterior).

Ahora tengo $\frac{n^2(n+1)}{2}$ ecuaciones siendo el número de incógnitas el mismo $n.\frac{n(n+1)}{2}$, lo cual se ve en los índices y usando la simetría de la matriz.

El hecho de que no podamos anular todas las derivadas segundas se desprende

$$\left.\frac{\partial^2 g'_{\mu\nu}}{\partial X'^\sigma \partial X'^\rho}\right| = 0 \leftarrow \text{ecuaciones } \underbrace{\tfrac{1}{2}n(n+1)}_{\text{ARRIBA}}.\underbrace{\tfrac{1}{2}n(n+1)}_{\text{ABAJO}}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2^{do}\\ \text{CORCHETE}\end{smallmatrix}\right]_P = 0 \quad \frac{\partial^3 X^\alpha}{\partial X'^\lambda \partial X'^\nu \partial X'^\rho} \leftarrow \text{incógnitas}$$

$$n$$

$$\lambda=\nu=\rho \rightarrow n$$

$$\neq \text{todos} \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \rightarrow \text{conmutan las derivadas}$$

$$\lambda=\nu\neq\rho \rightarrow \frac{n(n-1)}{2}$$

entonces la suma de todas las posibilidades dará:

$$n+n(n-1).\left(\frac{n-2}{3!}+1\right) \Rightarrow$$

$$\#\text{INCÓGNITAS}: \frac{n^2(n-1)(n+2)}{3!}$$

Un breve cuadrito

	ECUACIONES	INCÓGNITAS
$n=2$	9	8
$n=3$	36	30
$n=4$	100	80

, entonces NO SE PUEDEN ANULAR todas a la vez.

$$\eta = M g M^T \quad , g \ \mathbb{R} \text{ y sim.}$$

arbitraria $M = D.O$ (diagonal x ortogonal)

$$\eta = D O g O^T D$$

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad O g O^T = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & g_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

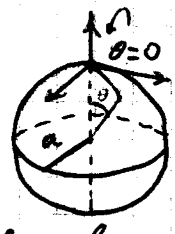
autov. métrica

$$\eta = \begin{pmatrix} g_1 d_1^2 & & \\ & g_2 d_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

, y estos se pueden hacer valer -1, 1, 1, 1. Si la métrica es riemanniana se puede hacer que la métrica sea $\mathbb{1}$ (sistema localmente plano).

Consideremos el

- EJEMPLO



$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\varphi^2)$$

$$l = a.\theta$$

, sea 'l' la longitud del segmento. Cerca del polo norte:

$$\left[\begin{array}{l} x = a.\theta . \cos\varphi \\ y = a.\theta . \text{sen}\,\varphi \end{array}\right.$$

, como si fuese plano. El cambio de coordenadas es:

$$\theta = 1/a\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \text{atan}(y/x)$$

La métrica en el sistema XY

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}[x^2, y^2, xy]$$

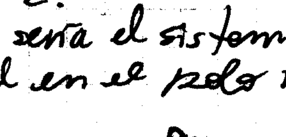
, es la identidad más cosas de orden 2.

Este será el sistema localmente inercial en el polo norte.

- Distancias e Intervalos temporales

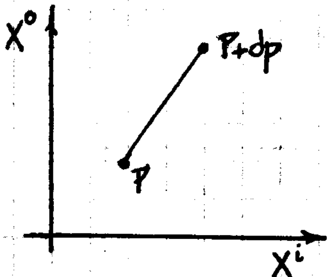
Queremos evaluar distancias espaciales‡.

Supongamos relojes con una coordenada marcada



‡Referencia: Landau, L.D, Clasic theory of Fields

Es un sistema $(x^0,\vec{x})$.



$ds^2 < 0$ temporalmente separados

$\Downarrow$

$ds^2 = -d\tau^2$

es la interpretación física.

Supongamos que 'P' y 'P+dP' se hallan en el mismo LUGAR:

$$\left.\begin{array}{l} P = (x^0, \vec{x}) \\ P+dP = (x^0+dx^0, \vec{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

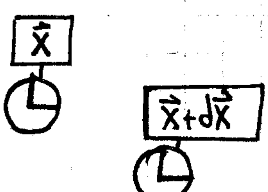
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = g_{00}[dx^0]^2 = -d\tau^2$$

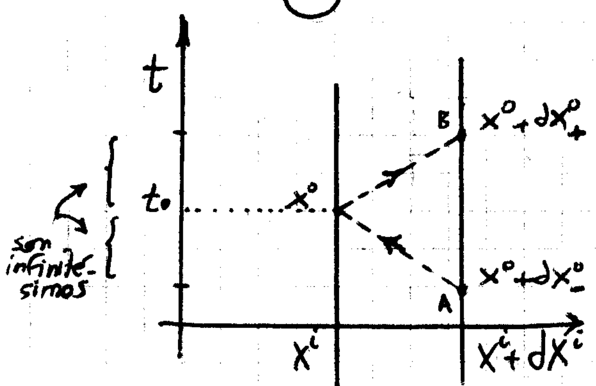
$$\Rightarrow \boxed{d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dx^0}$$

tiempo propio — tiempo coordenado

¿Cuál es la distancia entre los puntos de coordenadas x^i y x^i+dx^i?



Lo mediremos mediante rayos de luz. Ilustremos:



, definiré la distancia espacial propia:

$$dl = \frac{1}{2} c\, \Delta\tau_{AB}$$

$$ds^2 = 0 \quad \left[\text{DEFINE LOS CONOS DE LUZ}\right]$$

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i dx^j + 2 g_{0i}\, dx^i dx^0$$

, escrito explícitamente. Supongamos por simplicidad una métrica que no mezcla espacio-tiempo ($0i = 0$, con $i=1,2,3$). Si vale que $(ds)^2 = 0 \rightarrow$

$$(dx^0)^2 = -g_{ij}\, dx^i dx^j / g_{00}$$

$$\boxed{dx^0_\pm = \pm\sqrt{-\frac{g_{ij}\, dx^i dx^j}{g_{00}}}}$$

, donde los $\pm$ se corresponden a los de la figura.

$$dl = \frac{1}{2} c \sqrt{-g_{00}}\,(dx^0_+ - dx^0_-)$$

$$\boxed{dl = c\sqrt{+g_{ij}\, dx^i dx^j}}$$

Si $g_{0i} \neq 0$ la dl es algo más complicado.

$$dl = \sqrt{\gamma_{ij}\, dx^i dx^j}\; c$$

, con $\gamma_{ij} = g_{ij} - (g_{0i} \cdot g_{0j})/g_{00}$

■ Práctica

● Continuación

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k \\ F^{0i} = E_{0i} \end{array}\right.$$

c) Queremos deducir:

$$S = \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu\right]$$

, se hace desde el $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad t \rightarrow \varphi_i(t)$$

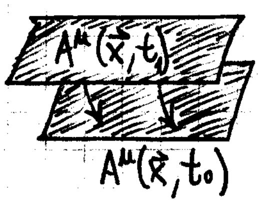
$$L\left[\{A_\mu(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}\}, \{\dot{A}_\mu(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}\}, t\right] \qquad t,\ A^\mu(\vec{x}, t)$$

$$S = \int dt\, L[\quad] = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}[\quad]$$

, donde se introduce la densidad lagrangiana $\mathcal{L}[\ ]$.

$$A^\mu \to A^\mu + \delta A^\mu$$

$$\delta A^\mu|_{t_0} = \delta A^\mu|_{t_1} = 0$$



Quiero algo explícitamente covariante. Ahora lo mandamos a

$$A^\mu \to A^\mu + \delta A^\mu$$

$$\delta A^\mu\Big|_{\partial R} = 0$$

$\partial R \to$ Frontera de la región

, esto debería ser manifiestamente covariante. El $\mathcal{L}[\ ]$ debe ser un escalar de Lorentz:

$$\mathcal{L}[A^\mu, \partial_\mu A^\nu, x^\mu]$$

$$S = \int_R d^4x\, \mathcal{L}[A^\mu, \partial_\mu A^\nu, x^\mu]$$

Entonces variaremos la acción:

$$\delta S = \int_R d^4x \left[-\frac{1}{4}\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + J_\mu \delta A^\mu \right]$$

$$\delta S = \int_R d^4x \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) + J_\mu \delta A^\mu \right]$$

$$= \int_R d^4x \left[\frac{-\partial_\mu (F^{\mu\nu}\delta A_\nu)}{2} + \frac{\partial_\nu (F^{\mu\nu}\delta A_\mu)}{2} \right] + \int_R d^4x \left[\frac{\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu}{2} - \frac{\partial_\nu F^{\mu\nu}}{2} \delta A_\mu + J_\mu \delta A^\mu \right]$$

$$d^4x\, \delta A_\nu \left[\frac{\partial_\mu F^{\mu\nu}}{2} - \frac{\partial_\mu F^{\nu\mu}}{2} + J^\nu \right]$$

una métrica dónde vueltas?

$$= \int_R d^4x\, \delta A_\nu \left[\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J})$$

$\nu = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = -\rho = \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0}$$

$$-\rho = -\partial_i E_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho}$$

$$J^i = \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij}$$

$$J^i = -\frac{\partial E^i}{\partial t} + \partial_j B_k \varepsilon^{ijk}$$

$$J^i = -\frac{\partial E^i}{\partial t} + (\vec{\nabla}\times\vec{B})_i$$

Pero faltarían las ecuaciones con fuentes de Maxwell; que se logran con:

$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0$ → antisimetrización de índices

$$\boxed{\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0}$$

Con esto obtenemos las ecuaciones homogéneas de MAXWELL.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

El tensor dual:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}_{\ \ \mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ perm. par} \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ perm. impar} \\ 0 & \text{dos índices iguales} \end{cases}$$

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \nu}\Lambda^{\nu'}_{\ \mu} F^{\mu\nu}$$

■ Teoría 10-9-08

● Tiempos Propio & Longitud Propias

Habíamos diferenciado entre sistemas de 4D y de 3D+1D (posición y tiempo)

x^0 = coordenada temporal

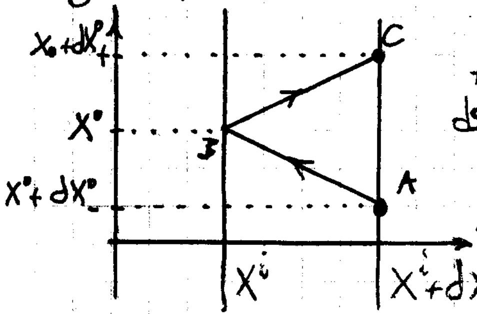
x^i = coordenada espacial, $i = 1,2,3$

Arribamos a:

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dx^0$$

$d\tau$ ← tiempo propio (físico); dx^0 ← tiempo coordenada

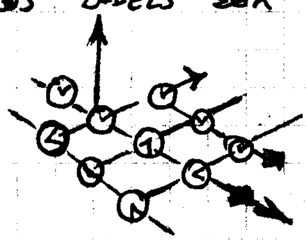
, para el tiempo propio. Para la longitud propia la medimos con un rayo de luz.



En la trayectoria vale $ds^2=0$. De esto extraemos que:

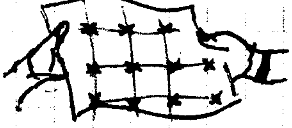
DISGRESIÓN

La idea es que el sistema coordenado son los relojes indicadores cuyos "LABELS" son fijos para cada uno de ellos.



La distancia entre ellos cambiará dependiendo de la metrica.

Si metemos puntos en una banda flexible es posible "estirar" el espacio-tiempo de manera de conservar las coordenadas pero variando las distancias entre ellas.



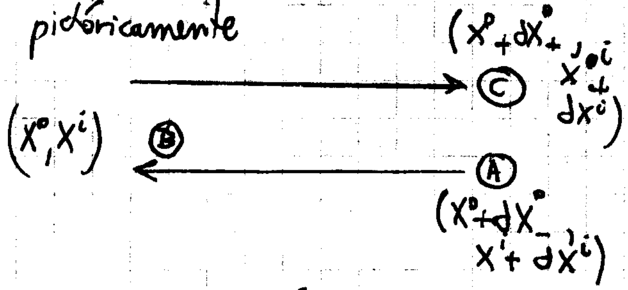
Una idea de esto se puede vislumbrar con las marcas sobre el globo que representan un universo en expansión.

---

si la métrica satisface $g_{0i}=0 \Rightarrow$

$$\boxed{dl=\sqrt{g_{ij}\,dX^i dX^j}}$$

pictóricamente



$$ds^2=0=g_{00}(dX^0)^2+g_{ij}\,dX^i dX^j+2g_{0i}\,dX^0 dX^i$$

$$(dX^0)^2=\frac{-g_{ij}\,dX^i dX^j}{g_{00}} \Rightarrow$$

$$(dX^0)_{\pm}=\mp\sqrt{\frac{g_{ij}\,dX^i dX^j}{g_{00}}}$$

Entonces, en general, será:

$$dl=\sqrt{\left[g_{ij}-\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right]dX^i dX^j}$$

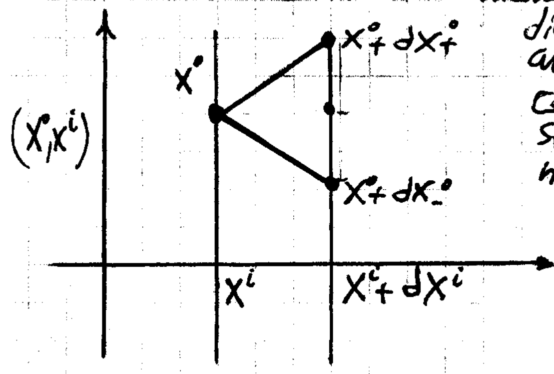
el que da las distancias entre puntos cercanos. Para puntos lejanos:

$$l=\int dl$$

Si $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}[x^0,\vec{x}]$, Si $g_{\mu\nu}$ depende de t.

- Simultaneidad

Queremos definir una manera de dictaminar cuando dos cosas son simultáneas.



$$(X^0,X^i) \xrightarrow[\text{CON}]{\text{ES SIMULTÁNEO}} \left(X^0+\frac{1}{2}[dX^0_+ + dX^0_-]\right)$$

$$\boxed{dX^0_{\pm}=\frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0i}dX^i\mp\left\{(g_{0i}g_{0j}-g_{ij}g_{00})\,dx^i dx^j\right\}^{1/2}\right]}$$

Si $g_{0i}=0 \Rightarrow \quad dX^0_+ + dX^0_- = 0$

$g_{0i}\neq 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(dX^0_+ + dX^0_-)=-\frac{g_{0i}dX^i}{g_{00}}$

Esta definición de simultaneidad permite otra definición de la Longitud propia:

$$dl^2=dS^2_{\text{entre } P \text{ y } P'}$$

, donde
- $P=(x^0,x^i)$
- $P'=\left(X^0+\frac{1}{2}[dX^0_+ + dX^0_-],\ X^i+dX^i\right)$

- Area y Volumen

Sea que $g_{\mu\nu}$ es diagonal, entonces:

$$ds^2 = g_{00}(dX^0)^2 + g_{11}(dX^1)^2 + g_{22}(dX^2)^2 + g_{33}(dX^3)^2$$

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22}}\, dX^1 dX^2 = dl_1 dl_2$$

$$dV_{spa} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\, dX^1 dX^2 dX^3$$

$$dV_{spa\,tem} = \sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}}\, dX^0 dX^1 dX^2 dX^3$$

$$\boxed{dV_{spa\,tem} = \sqrt{|g|}\, d^4X} \leftarrow \text{VALE EN GENERAL}$$

, con $g = det(g_{\mu\nu})$.

Al hacer un cambio de coordenadas

$$X^\alpha \to X'^\alpha$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} . \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} . g_{\alpha\beta}$$

, luego tomando determinante se tendrá:

$$det(g'_{\mu\nu}) \equiv g' = J^2 g$$

donde J^2 es el jacobiano cuadrático.

Si el sistema primado es el localmente inercial, se ve que:

$$\sqrt{|g|} = \frac{1}{|J|}, \quad g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

$$d^4X' = \left|\frac{\partial X'}{\partial X}\right| d^4X$$

$$d^4X' = |J|^{-1} d^4X = \sqrt{|g|}\, d^4X$$

$$\boxed{d^4X' = \sqrt{|g|}\, d^4X}$$

● EJEMPLO

Consideramos:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 \times \left[d\theta^2 + sen^2\theta . d\phi^2\right]$$

, una variedad Lorentziana descrita por esta cosa (t, r, θ, ϕ)

● Si: $A(r) = B(r) = 1$

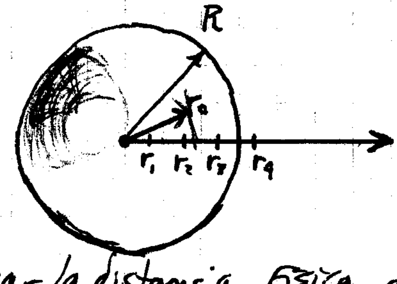
, esto es la métrica de Minkowski

● $$B(r) = \begin{cases} 1/1 - \frac{2Mr^2}{R^3} & r<R \\ 1/\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & r>R \end{cases}$$

La parte $A(r)$ no me interesará para el ejemplo

, es la métrica describiendo interior y exterior de una estrella de masa 'M' y radio 'R'. Veamos un poco intuitivamente. Si el radio es la longitud propia de un punto con el origen de coordenadas.

La métrica no depende del tiempo.



Quiero evaluar la distancia física del origen al punto 'r_0' (en AZUL). Será:

$$dl = \sqrt{B(r)}\, dr \Rightarrow$$

$$l = \int_0^{r_0} dr\, [B(r)]^{1/2} = \boxed{a . asen\left(\frac{r_0}{a}\right)}$$

, donde definimos una constante:

$$a = \left(\frac{R^3}{2M}\right)^{1/2}$$

Esta cuenta usa $G=1$, si $r_0 \ll 1$ vemos que $l \to r_0$ [Lo esperable]

, entonces 'r' no nos da la Longitud Física (no me da el radio).

Sea ahora el volumen propio.

$$V = \int_0^{r_0} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{\sqrt{B(r)}}_{g_{11}^{1/2}} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{g_{22}^{1/2}} \underbrace{\sqrt{r^2 sen^2\theta}}_{g_{33}^{1/2}}$$

, amasando se puede hacer:

$$\boxed{V = 4\pi a^3 . \left[\frac{1}{2} . asen\left(\frac{r_0}{a}\right) - \frac{r_0}{2a}\left[1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right]}$$

, por supuesto; con el límite $r_0 \ll a$

$$V \approx 4\pi a^3 \frac{1}{3}\left(\frac{r_0}{a}\right)^3 = \frac{4\pi r_0^3}{3}$$

, con dicho límite se obtienen los resultados euclídeos.

Se puede elegir un valor de R para que se reproduzca el valor euclídeo en el área pero NO en el volumen. Se puede hacer al revés y perdemos la del área en beneficio del volumen.

La idea es que parado en el centro puedo definir una coordenada radial de modo de que el valor calculado de esa coordenada represente REALMENTE el radio.

Yendo más lejos puedo hacer otro cambio de coordenadas

- $B(r).dr^2 = d\rho^2$
- $\frac{d\rho}{dr} = [B(r)]^{1/2} \Rightarrow$

$$ds^2 = -A(r[\rho])\,dt^2 + d\rho^2 + r^2[\rho]\left(d\theta^2 + sen^2\theta . d\phi^2\right)$$

, en este sistema de coordenadas ρ es la distancia propia al origen. ($\ell = \rho$), y se integrará en $\rho = 0$ y $\rho = \rho_0$.

La interpretación física de la coordenada t sería el tiempo propio medido por observadores muy alejados de la estrella. Así:

$$\text{en } r \to \infty \quad A(r), B(r) \to 1$$

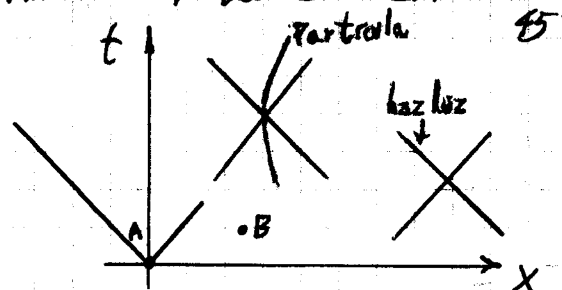
$$ds^2 = ds^2_{MINKOWSKI}$$

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,.dt$$

$$d\tau = \sqrt{A(r)}\,.dt$$

- EJEMPLO: Conos de Luz

Sabemos que en la métrica de MINKOWSKY los conos son rectas a 45°



, soluciones de $ds^2 = 0$.

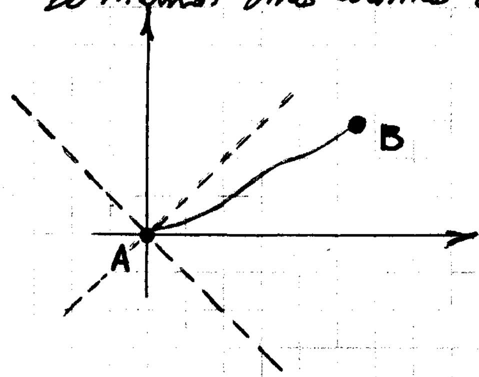
Para una partícula su trayectoria debe estar DENTRO del cono de luz; y un haz de luz en los bordes. A y B no pueden estar conectados causalmente.

Existe una métrica de (1994) tal que en la trayectoria de A↔B los conos estén orientados (modificando el espacio-tiempo) en una forma que sea posible su conexión causal.

Definimos unas cuantas cosas:

$X_s(t)$

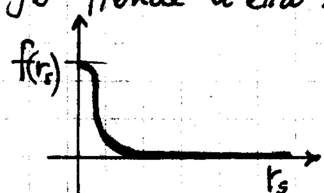
$V_s = \frac{dX_s}{dt}$



$$r_s^2 = (x - X_s[t])^2 + y^2 + z^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + \left[dx - V_s(t) f[r_s] dt\right]^2 + dy^2 + dz^2$$

, cerca de la curva es muy diferente de Minkowski, pero cuando me alejo tiende a ella.

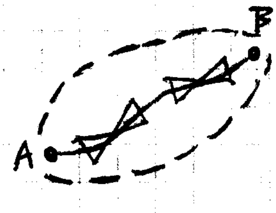


Los conos de luz (olvidando y, z) quedarán ubicados según

$$ds^2 = 0$$

$$dt = \pm\left[dx - V_s f(r_s)\,dt\right]$$

, cerca de la curva los conos de luz se torcerán del modo ilustrado.



Igualmente habría que buscar una forma de torcer la estructura del espacio-tiempo. Igual se puede ver no es posible realizar esa torcida.

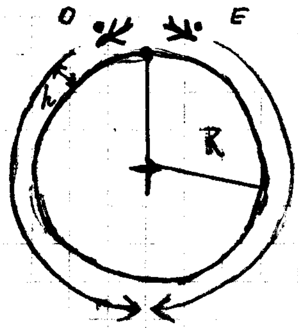
■ Práctica

La guía 3 trata de espacios curvos

- Problema 4

Algunas cuentitas de dilatación tem

poral y corrimiento al rojo gravitatorio.



$$\|v_{e,o}\|_{\oplus} = v$$

$$^{\dagger} v_{\oplus} \cong \frac{2\pi R_{\oplus}}{24\,hs}$$

La idea es comparar la lectura de los tres relojes.

$d\tau_{\oplus}$ es el tiempo propio de un observador en la Tierra

En general:

$$d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) \times \sum_i^3 (dx^i)^2$$

donde t será el tiempo medido en el ∞ o en el origen de coordenadas. El potencial será:

$$\phi(R) = -\frac{M_{\oplus}G}{R}, \quad R > R_{\oplus}$$

$\phi = 0$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$$

$$d\tau_{\oplus}^2 = \left[1 + \frac{2\phi(R_{\oplus})}{c^2}\right]dt^2 - \frac{1}{c^2}\left[\left(1 - \frac{2\phi(\theta)}{c^2}\right)\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right] dt^2$$

$v_{\oplus}$

$\Rightarrow$ podemos aproximar

$$\simeq \left[\left(1 + \frac{2\phi(R_{\oplus})}{c^2}\right) - \frac{v_{\oplus}^2}{c^2}\right]dt^2$$

$$\left[d\tau_{\oplus} = dt\left[1 + \frac{\phi(R_{\oplus})}{c^2} - \frac{v_{\oplus}^2}{2c^2}\right]\right]$$

Usaremos la aproximación:

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{con } \epsilon \ll 1$$

$$d\tau_{e,o} = dt\left[\left(1 + \frac{\phi(R_{\oplus}+h)}{c^2}\right) - \frac{1}{2c^2} v_{e,o}^2\Big|_s\right]$$

$\dagger$ Es la $\left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|$

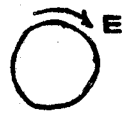
$$\frac{v_{e,o}^2}{c^2}\Big|_s \approx \frac{[v_{e,o} + v_{\oplus}]^2}{c^2}$$

$$d\tau_{e,o} = dt\left[1 + \frac{\phi(R_{\oplus}+h)}{c^2} - \frac{(v_{e,o})^2}{c^2} - \frac{v_{\oplus}^2}{c^2} - \frac{2 v_{e,o} v_{\oplus}}{c^2}\right]$$

En la 130s de HARTLE se comenta el experimento

$$\int d(\tau_{e,o} - \tau_{\oplus}) = \int dt\left[\underbrace{\frac{\phi(R_{\oplus}+h) - \phi(R_{\oplus})}{c^2}}_{A} \underbrace{- \frac{v_{e,o}}{2c^2}(v_{e,o} + 2v_{\oplus})}_{B}\right] = \Delta\tau$$

Consideramos el siguiente esquema de signos



positivo giro hacia el Este

$$v_{\oplus} > 0, \quad v_E = v, \quad v_O = -v$$

$$\Delta(\tau_E - \tau_O) < \Delta(\tau_O - \tau_{\oplus})$$

Tenemos los dos efectos (dilatación temporal y corrimiento al rojo)

Si $h \ll R_{\oplus}$

$$A \rightarrow \frac{hg}{c^2}$$

$$\Delta\tau_{e,o}\Big|_{\oplus} = \int dt\left[\frac{hg}{c^2} - \frac{v}{2c^2}(v \pm 2v_{\oplus})\right]$$

$+ \rightarrow E$, $- \rightarrow O$

hay una competencia entre ambos efectos

■ Teoría

15-9-08

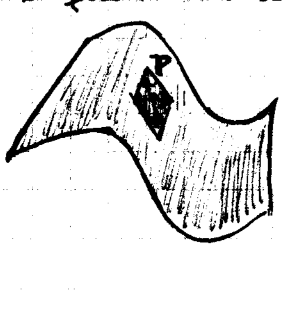
● Aspectos Matemáticos de la GR

Programa de temas:

- Vectores y tensores en et curvos
- Transporte paralelo y derivada covariante
- Geodésicas
- Tensor de curvatura (2 clases)

● Vectores en espacios curvos

Intuitivamente pensamos en una superficie curva (riemanniana). La idea es que cerca de un punto 'P' (es como si fuese un plano) y consideramos pequeñas flechas sobre la superficie.

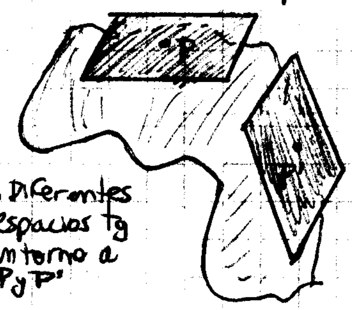


Luego, formalmen

te puedo considerar el producto por un escalar, la suma, etc. para nuestro espacio-vectorial.

$$\underset{\sim}{a} \to \lambda \underset{\sim}{a}$$
$$\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b} \to \lambda(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b})$$

Considero un plano tangente a la superficie, donde en dicho plano ocurre lo que estamos considerando. Pero en diferentes puntos los vectores viven sobre diferentes planos tangentes y para derivar debería trasladar de un plano al otro (habría que definir una derivada apropiada).



Diferentes espacios tg entorno a P y P'

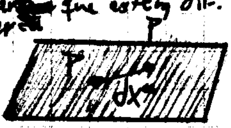
En cada punto P, P', introduzco una base $\underset{\sim}{e}_\alpha$

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$$

, veremos dos tipos de base: coordenada y ortonormal.

La base coordenada es aquella en la cual un vector formado con pequeños apartamientos da el vector cercano; es decir dado P un vector cercano, P', se escribe como los incrementos en las coordenadas:

Están cerca como para que estén dif. cerca



$$X^\alpha_{P'} = X^\alpha_P + dX^\alpha$$
$$\underset{\sim}{dx} = dX^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$$

$$\boxed{\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = a^\alpha b^\beta \underset{\sim}{e}_\alpha\cdot\underset{\sim}{e}_\beta} \quad [1]$$

, esto es el producto interno usual.

Los $\underset{\sim}{e}_\alpha$ no están aún normalizados y no son los versores usuales.

Ahora quiero definir el producto [1] de forma que

$$\underset{\sim}{e}_\alpha\cdot\underset{\sim}{e}_\beta \equiv g_{\alpha\beta}$$

Esto junto definirá la base coordenada.

La base ortonormal la notaremos con $\underset{\sim}{e}_{\hat\alpha}$, y definiremos/consideraremos que

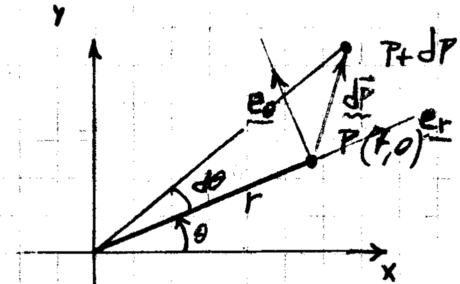
$$\boxed{\underset{\sim}{e}_{\hat\alpha}\cdot\underset{\sim}{e}_{\hat\beta} = \eta_{\alpha\beta}}$$

esto se puede hacer con CL y reescalamiento [ortonormalización].

$$\boxed{\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha = a^{\hat\beta} \underset{\sim}{e}_{\hat\beta}}$$

, donde vemos que las componentes en general serán diferentes. Veamos el siguiente ejemplo: $\mathbb{R}^2$ y coordenadas polares

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + dR^2$$



Sea el esquema y supongamos que quiero escribir el $\underset{\sim}{dP}$

$$\underset{\sim}{dP} = dr\,\underset{\sim}{e}_r + d\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta$$
$$\underset{\sim}{e}_r\cdot\underset{\sim}{e}_r = g_{rr} = 1$$

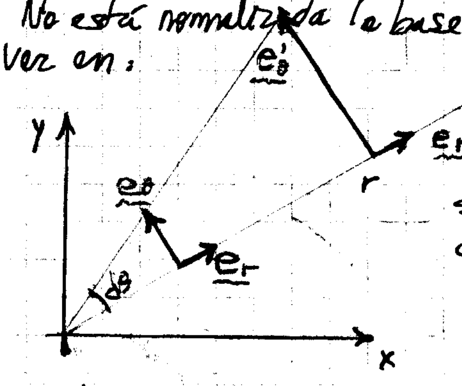
, entonces $\underset{\sim}{e}_r$ está normalizado a 1, pero

$$\underset{\sim}{e}_\theta\cdot\underset{\sim}{e}_\theta = g_{\theta\theta} = r^2$$

no está normalizado (depende de 'r'). Y además

$$\underset{\sim}{e}_r\cdot\underset{\sim}{e}_\theta = 0$$

No está normalizada la base, y se puede ver en:



Trivialmente se ve que $\underset{\sim}{e}_\theta$ crece con r

Debido a que a veces es necesario que esto no suceda definimos nuevos vectorcillos en cada punto. Ahora definimos:

$$\underset{\sim}{e}_{\hat{r}} \, ; \, \underset{\sim}{e}_{\hat{\theta}}$$

como base ortogonal; entonces:

$$\underset{\sim}{e}_\alpha \cdot \underset{\sim}{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

Una opción de base ortonormal será:

$$\boxed{\underset{\sim}{e}_{\hat{r}} \equiv \underset{\sim}{e}_r} \quad \boxed{\underset{\sim}{e}_{\hat{\theta}} = \underset{\sim}{e}_\theta / r}$$

, con lo cual tenemos compensada la variación del $\underset{\sim}{e}_\theta$. En esta nueva base

$$d\underset{\sim}{P} = dr\,\underset{\sim}{e}_{\hat{r}} + r.d\theta . \underset{\sim}{e}_{\hat{\theta}}$$

$$d\underset{\sim}{P} = dr\,\underset{\sim}{e}_r + d\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta$$

No se puede conseguir en estas coordenadas que sean la misma la base coordenada y la ortogonal.

Ahora quisiéramos ver el cambio de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$$

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{a} = a'^\beta \underset{\sim}{e}'_\beta$$

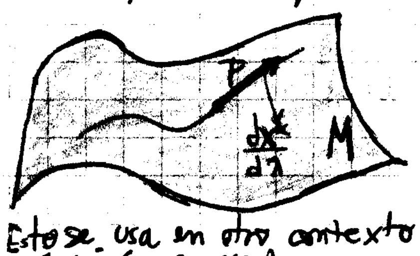
, donde la $\underset{\sim}{e}'_\beta$ es una base coordenada asociada a x'^α. Veamos que el cambio es:

$$d\underset{\sim}{x} = dx^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha = dx'^\alpha \underset{\sim}{e}'_\alpha$$

, pero: $dx'^\alpha = \dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad \Rightarrow$

$$\boxed{a'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} a^\beta} \; \dagger$$

Veamos una definición más precisa. Sea una variedad, un punto P y una curva pasando por ese punto



† Esto se usa en otro contexto como definición de vector.

$$x^\alpha(\lambda) \equiv \text{curva que pasa por } P$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$ función que lleva de la variedad a $\mathbb{R}^n$

$$f(x^\alpha(\lambda))$$

Entonces la derivada de la función a lo largo de la curva será:

$$\boxed{\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}}$$

derivada direccional

, donde $dx^\alpha/d\lambda$ tiene el sentido de vector tangente a la curva. Definimos

$$\frac{d}{d\lambda} \equiv \text{VECTOR TANGENTE A LA CURVA EN EL PUNTO } P$$

, o sea que el vector es un operador diferencial. Siempre puedo escribir

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda} = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}$$

EL VECTOR ES UNA DERIVADA DIRECCIONAL

, donde 'a^α' son las componentes del vector y '$\partial/\partial x^\alpha$' será la base coordenada.

Con estos objetos formo un espacio vectorial, dadas varias curvas que pasan por P defino con ellos el susodicho espacio de dimensión 'n' (dim. de la variedad); que es el espacio tangente a la variedad en el punto 'P'.

$$\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\phi}, \frac{d}{d\mu}, \ldots \longrightarrow EV$$

, Hemos formalizado el concepto de vectores como flechitas pequeñas, cercanas a 'P'.

Un cambio de coordenadas finalmente se ve como:

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha . \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = a'^\alpha . \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} ,$$

y dado

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta}$$

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta}$$

$$= a^\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} . \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = a'^\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{a'^\alpha = a^\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}}$$

Podemos emplear una notación:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \underset{\sim}{e}_\alpha} \quad [2]$$

y a esto [2] lo llamamos base coordenada. Podemos relacionar ambas bases:

$$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha = a'^\alpha \underset{\sim}{e}'_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \underset{\sim}{e}_\alpha = \underset{\sim}{e}'_\beta \cdot \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \\ \hline \underset{\sim}{e}'_\alpha = \underset{\sim}{e}_\beta \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \end{array}}$$

- Covectores, vectores duales o 1-formas

Una 1-forma $\underline{\omega}$

transf. lineal $T_p \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underline{\omega}(\underset{\sim}{a}) = \#\text{real}$

$\underline{\omega}(a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha) = a^\alpha \underline{\omega}(\underset{\sim}{e}_\alpha)$

EL conjunto de transformaciones lineales de $T_p \to \mathbb{R}$ forman un espacio vectorial T_p^* (dual a T_p).

En T_p^* introducimos una base:

$$\underline{\omega} = \omega_\alpha \underline{e}^\alpha$$

, donde $\underline{\omega}$, $\underline{e}^\alpha$ son transformaciones lineales y ω_α son las componentes de la TL en la base $\underline{e}^\alpha$.

Definiré una base dual; a través de:

$$\underline{e}^\alpha(\underset{\sim}{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$$

En esta base

$$\underline{\omega}(a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha) = \omega_\beta \underline{e}^\beta(a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha)$$

$$= \omega_\beta a^\alpha \underline{e}^\beta(\underset{\sim}{e}_\alpha) \quad \text{lin.}$$

$$\underline{\omega}(a^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha) = \omega_\beta a^\alpha \delta^\beta_\alpha$$

Si estamos en la base dual ésta es la acción de una 1-forma sobre la base

, entonces: $\boxed{\omega_\alpha = \underline{\omega}(\underset{\sim}{e}_\alpha)}$

Veamos un ejemplo usual: el gradiente de una función:

$$\underline{\nabla} f(\underset{\sim}{t}) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad \left(\begin{array}{c}\text{1 FORMA}\\ \text{GRAD de f}\\ \text{sobre un}\\ \text{vector}\end{array}\right)$$

$$\underline{\nabla} f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda}$$

En la base dual los componentes de la 1-forma será:

$$(\underline{\nabla} f)_\alpha = \underline{\nabla} f(\underset{\sim}{e}_\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

, las componentes de la 1-forma son las componentes del gradiente.

Ante un cambio de coordenadas

$$\underline{\omega} = \omega_\alpha \underline{e}^\alpha$$

$$\underline{\omega} = \omega'_\alpha \underline{e}'^\alpha$$

, pero como $\omega_\alpha = \underline{\omega}(\underset{\sim}{e}_\alpha)$

$$\omega_\alpha = \underline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \quad y$$

$$\omega'_\alpha = \underline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\right) = \omega_\beta \underline{e}^\beta \underset{\sim}{e}_\alpha$$

$$\delta^\beta_\alpha$$

$$\omega'_\alpha = \underline{\omega}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

$$\omega'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\underline{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\omega_\beta} \quad \text{Cambio coordenadas de una 1-forma}$$

, pero los vectores cambiaban:

$$a'^\alpha = a^\beta \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$$

$$a^\alpha \longrightarrow dx^\alpha \qquad \text{Transforman "como"}$$

$$\omega_\alpha \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

- Tensores.

Definiremos los tensores como tensor $\binom{M}{N}$ una transformación que va desde M×N asignándole un número real con

$$\underbrace{T_P^* \times T_P^* \times \dots \times T_P^*}_{M \text{ formas}} \times \underbrace{T_P \times T_P \times \dots T_P}_{N \text{ vectores}}$$

$$\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\underline{\omega}_1,\dots,\underline{\omega}_M, \underset{\sim}{a}_1,\dots,\underset{\sim}{a}_N)\longrightarrow\mathbb{R}$$

y un tensor $\binom{1}{3}$ por ejemplo es:

$$T(\omega_1, a_1, a_2, a_3) \longrightarrow \#$$

Definimos las componentes del tensor como la acción sobre las coordenadas; entonces

$$T(\underline{e}^\alpha, \underset{\sim}{e}_\beta, \underset{\sim}{e}_\gamma, \underset{\sim}{e}_\delta) = T^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$$

, son las componentes del tensor. Conociendo esto conozco la acción del tensor sobre cualquier cosa (es como tener el comportamiento sobre la base en el álgebra usual).

Veamos ahora el cambio de las componentes ante un cambio de coordenadas. Como ejemplo:

$$\binom{1}{1} \quad T^\alpha{}_\beta = T(\underline{e}^\alpha, \underset{\sim}{e}_\beta)$$

$$\boxed{T'^{\alpha}{}_\beta = \underbrace{\overset{\text{Como vector}}{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}}}_{\text{Como una 1 forma}} \cdot \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} T^\gamma{}_\delta}$$

$$T'^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\gamma} \times T^{\delta\epsilon}{}_\tau$$

• Tensor Métrico

Un tensor principal es el tensor métrico que tiene esta forma

$$\binom{0}{2} \quad \text{con} \quad g(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \#\mathbb{R} \qquad g: T_P\times T_P \to \mathbb{R}$$

, pidiéndole que sea:

- Simétrico $g(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = g(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{a})$
- tiene que $\exists$ inversa

En la base coordenada serán las componentes de evaluar el tensor en la base

$$g(\underset{\sim}{e}_\alpha, \underset{\sim}{e}_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad \text{(propiedad 1)}$$

$$\exists [g_{\alpha\beta}]^{-1} \equiv g^{\alpha\beta} \quad \text{(propiedad 2)}$$

> Si existe un tensor métrico puedo establecer una biyección entre vectores y 1-formas

Dado un $\underset{\sim}{a}$ fijo, me fabrico una 1-forma

$$g(\underset{\sim}{a}, \ ) \doteq \underline{a} \qquad \text{1-forma asociada al vector } \underset{\sim}{a}$$

, entonces

$$a_\alpha = g(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{e}_\alpha) = g(a^\beta \underset{\sim}{e}_\beta, \underset{\sim}{e}_\alpha) = a^\beta g(\underset{\sim}{e}_\beta, \underset{\sim}{e}_\alpha)$$

$$a_\alpha = a^\beta g_{\beta\alpha} \underset{\text{simetría}}{=} a^\beta g_{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_\alpha = g_{\alpha\beta}\, a^\beta}$$

, desde aquí también podríamos meter la inversa para expresar:

$$\boxed{a^\alpha = g^{\alpha\beta}\, a_\beta}$$

Así nos podemos olvidar del tema componentes covariantes y contravariantes.

■ Práctica

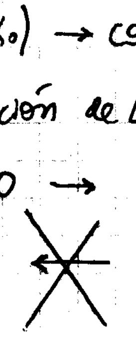
• Problema 7

$$(v, x) \qquad ds^2 = -x\,dv^2 + 2\,dv\,dx$$

a) $(v_0, x_0) \to$ conos de luz

b) ¿Variación de los conos con x?

c) $x>0 \to x<0$



Esto nos dará idea de la estructura causal del espacio-tiempo. Esta propiedad ocurre en presencia de BH.

(a)

$$2\cancel{dv}\,dx = x\,dv^{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

1. $dv = 0 \rightarrow \boxed{v = v_p(cte)}$
2. $2\,dx = x.dv \rightarrow$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$v(x) = \ln(x^2) + cte$$

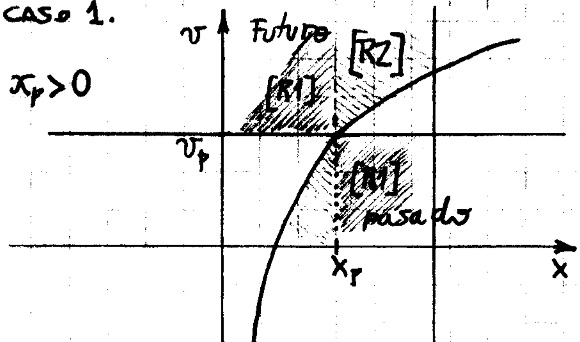
$$\boxed{v(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x_p^2}\right) + v_p}$$

Acá están las dos líneas del cono $x \neq x_p \rightarrow v = \ln + v_p$

$x = x_p$

$v = v_p$

CASO 1. $x_p > 0$



Decidir la causalidad implica ver que $ds^2 < 0$ o $ds^2 > 0$.

$ds^2 < 0 \qquad -x\,dv^2 < -2\,dx\,dv$

$$dv^2 > \frac{2}{x}\,dx\,dv$$

abre dos caminos:

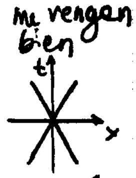
$dx\,dv < 0 \rightarrow$ VALE [R1]

$dx\,dv > 0 \rightarrow$ VALE [R2]

$$\frac{dv}{dx} > \frac{2}{x}$$

Ahora, qué es pasado y futuro necesita elegir la flecha del tiempo. Por ejemplo v crec. hacia el futuro, deja el esquema marcado en rojo sangre en el gráfico.

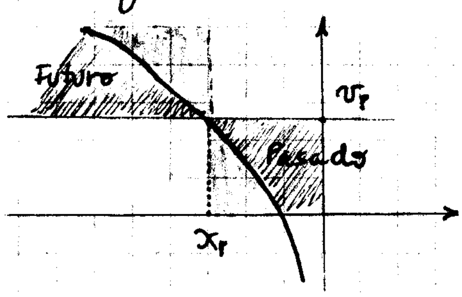
el rol de la coordenada temporal no siempre está claro. Se pueden elegir de acuerdo a como me vengan bien



$ds^2 = -dt^2 + dx^2$

No se ve fácil porque no vale

CASO 2.



$ds^2 < 0$

$-x\,dv^2 + 2\,dv\,dx < 0$

$$dv^2 < \frac{2}{x}\,dx\,dv$$

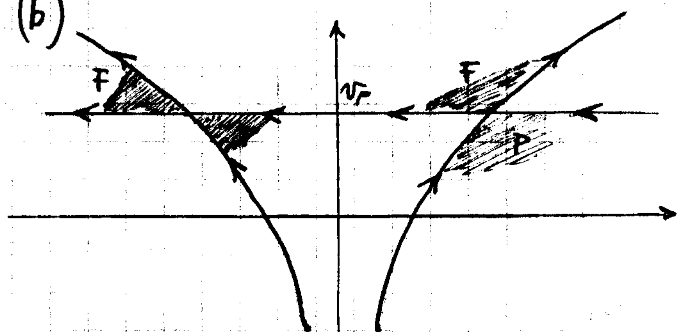
abre dos caminos

$dx\,dv > 0$ NO VALE

$dx\,dv < 0$ VALE

$$\frac{dv}{dx} > \frac{2}{x}$$

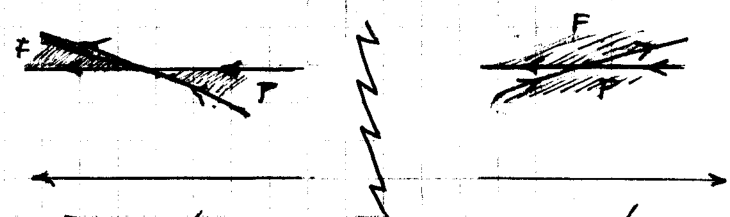
(b)



$v = v_p$

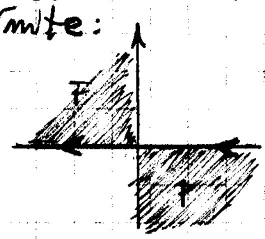
$v(x) = \ln\left(\frac{x}{x_p}\right)^2 + v_p \quad (v_p \text{ fixed})$

En los límites esperamos



Por otro lado yendo al origen se tiene:

Puede ir desde $x > 0$ a $x < 0$ siendo el caso límite:



La partícula que atraviesa $x = 0$ ya no puede regresar

● Problema 9 [Comentario]

Una métrica conformemente plana

$$ds^2 = \underbrace{\Omega^2(x^\alpha)}_{\text{factor conforme}} ds^2_{\text{MINK.}}$$

no cambia el carácter espacial temporal o nulo en una métrica conforme. Si están relacionados de esta forma tienen idéntica estructura CAUSAL y viceversa.

Dado una variedad de dimensión 'n' con una métrica y un ds^2 asociado, si Ω es suave y $\Omega > 0$ con $d\underset{\sim}{s}^2 = \Omega^2 ds \Rightarrow$

$$\underset{\sim}{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

decimos que la métrica $\underset{\sim}{g}_{\mu\nu}$ surge de la $g_{\mu\nu}$ a partir de una transformación conforme.

■ Teoría

● Bases Duales

Venimos usando 1-formas, también llamadas "vectores duales"

$$\boxed{\underline{\omega} = \omega_\alpha \underline{e}^\alpha},$$

con $\boxed{\underline{e}^\alpha(\underset{\sim}{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta}$ *

Notemos que el vector dual tiene el índice arriba (la base)

$$\underline{\omega}(\underset{\sim}{a}) = \omega_\alpha a^\alpha \quad (\# \mathbb{R})$$

El cambio de coordenadas se hacía como

$$\omega'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\omega_\beta$$

Los tensores $\binom{M}{N}$ serán tales que

$$F(M \text{ vectores duales}, N \text{ vectores}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\underline{e}^\alpha; \underline{e}^\beta; \ldots; \underset{\sim}{e}_\gamma; \underset{\sim}{e}_\delta, \ldots) = F^{\alpha\beta\cdots(M)}{}_{\gamma\delta\cdots(N)}$$

son los componentes del tensor. EL cambio de coordenadas se materializa como

* Define la base dual $\underline{e}^\alpha$

$$\boxed{F'^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\gamma} F^{\delta\epsilon}{}_\tau}$$

es decir que cambian como $A^\alpha B^\beta C_\gamma$ (vectores los dos primeros y dual el último).

EL tensor métrico $\binom{0}{2}$ cumplirá

$$g(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b}$$

$$g(\underset{\sim}{e}_\alpha, \underset{\sim}{e}_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

$$(g_{\alpha\beta})^{-1} = g^{\alpha\beta}$$

Existe una correspondencia entre vectores y vectores duales. Dado $\underset{\sim}{a}$ (con componentes a^α) se construye la 1-forma

$$\boxed{\underline{a} \equiv g(\underset{\sim}{a}, \quad)}$$

y se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} a_\alpha &= g_{\alpha\beta}\, a^\beta \\ a^\alpha &= g^{\alpha\beta}\, a_\beta \end{aligned}}$$

Podemos considerar a^α, a_α como las componentes contravariantes y covariantes de un único vector $\underset{\sim}{a}$.

Así:

$$\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{b} = g(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$$

$$= a_\beta b^\beta = a^\alpha b_\alpha$$

$$= g^{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta = \underline{a}(\underset{\sim}{b})$$

Ahora consideramos la base dual $\{\underline{e}^\gamma\}$, ¿cuál será el vector asociado?

Ahora la base tiene el índice arriba

$$\underline{e}^\gamma = g(\underset{\sim}{e}^\gamma, \quad)$$

$$\underline{e}^\gamma(\underset{\sim}{e}_\beta) = \delta^\gamma_\beta \Rightarrow g(\underset{\sim}{e}^\gamma; \underset{\sim}{e}_\beta) = \delta^\gamma_\beta$$

deberíamos probar que:

$$g(g^{\gamma\delta}\underset{\sim}{e}_\delta; \underset{\sim}{e}_\beta) = \delta^\gamma_\beta$$

para concluir que el vector asociado a $\underline{e}^\gamma$ es $\underset{\sim}{e}^\gamma$. Como $g(\ ;\ )$ es lineal

$$g(g^{\gamma\delta}\underset{\sim}{e}_\delta; \underset{\sim}{e}_\beta) = g^{\gamma\delta}g(\underset{\sim}{e}_\delta; \underset{\sim}{e}_\beta)$$

$$= g^{\gamma\delta}g_{\delta\beta} = \delta^\gamma_\beta \Rightarrow$$

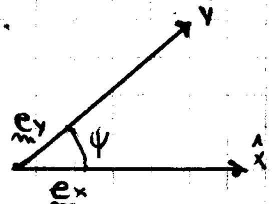
NB. La transformación conforme preserva ángulos y la estructura causal.

22-9-08

$$\underset{\sim}{e}^{\alpha} \Leftrightarrow g^{\gamma\delta}\, \underset{\sim}{e}_{\delta} = \underset{\sim}{e}^{\gamma} \quad y$$

$$\boxed{\underset{\sim}{e}^{\gamma}(\underset{\sim}{e}_{\beta}) = \delta^{\gamma}_{\ \beta} = \underset{\sim}{e}^{\gamma} \cdot \underset{\sim}{e}_{\beta}}$$

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$, donde escribimos una métrica



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos\psi\, dx\, dy$$

$$g_{xx} = g_{yy} = 1$$

$$g_{xy} = g_{yx} = \cos\psi$$

La base coordenada luce:

$$\underset{\sim}{e}_{\alpha} \cdot \underset{\sim}{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$\underset{\sim}{e}_x \cdot \underset{\sim}{e}_x = \underset{\sim}{e}_y \cdot \underset{\sim}{e}_y = 1$$

$$\underset{\sim}{e}_x \cdot \underset{\sim}{e}_y = \cos\psi$$

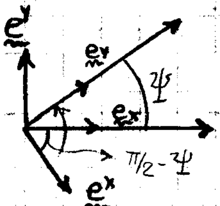
, y queríamos ver quiénes son $\underset{\sim}{e}^x, \underset{\sim}{e}^y$. Como vale

$$\underset{\sim}{e}^{\gamma} \cdot \underset{\sim}{e}_{\beta} = \delta^{\gamma}_{\ \beta}$$

$$\underset{\sim}{e}^x \cdot \underset{\sim}{e}_y = 0 \qquad \underset{\sim}{e}^y \cdot \underset{\sim}{e}_x = 0$$

$$\underset{\sim}{e}^x \cdot \underset{\sim}{e}_x = 1 \qquad \underset{\sim}{e}^y \cdot \underset{\sim}{e}_y = 1$$

, esto gráficamente se visualiza según el dibujo. Analíticamente planteamos que:



$$\underset{\sim}{e}^x \cdot \underset{\sim}{e}_x = 1 = |\underset{\sim}{e}^x||\underset{\sim}{e}_x| \cos(\pi/2 - \psi)$$

$\underset{\sim}{e}_x \cdot \underset{\sim}{e}_y = \cos\psi$

$|e_x||e_y| = \cos\psi$

$= 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$

, pero $|\underset{\sim}{e}_x| = 1$ con lo cual

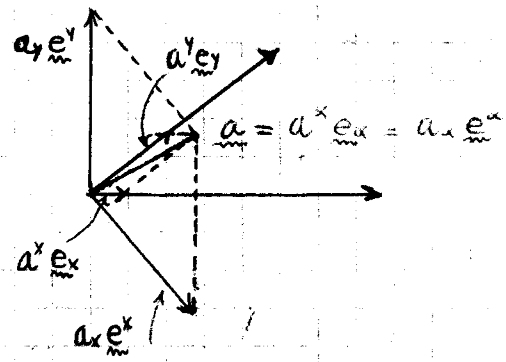
$$|\underset{\sim}{e}^x| = \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi)},$$

y a su vez:

$$|\underset{\sim}{e}^y| = \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi)}$$

Para un vector $\underset{\sim}{a}$ cualquiera será posible descomponerlo según la figura de la columna siguiente.

Esto ilustra la idea de que dado un vector $\underset{\sim}{a}$ es el mismo en cualquier sistema de coordenadas y la variación



de las coordenadas en diferentes sistemas es compensada por la variación de la base.

Las identidades entre tensores se deben mantener en todos los sistemas inerciales:

$$F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} \Leftrightarrow F^{\mu}_{\ \nu} = H^{\mu}_{\ \nu}$$

$$\Leftrightarrow F^{\mu\nu} = H^{\mu\nu}, \text{ con}$$

$$F^{\mu}_{\ \nu} = g^{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} \ \wedge \ F^{\mu}_{\ \nu} = g_{\nu\delta} F^{\mu\delta}$$

$$A^{\alpha} = B^{\alpha} \Leftrightarrow A_{\alpha} = B_{\alpha}$$

Las relaciones entre tensores <u>NO DEPENDEN DEL SISTEMA DE COORDENADAS</u>. Así, si tenemos

$$F_{\mu\nu} - H_{\mu\nu} = 0$$

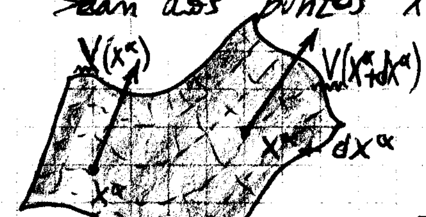
$$\boxed{S_{\mu\nu} = 0}$$

en un sistema, entonces vale en TODO sistema, pues las transformaciones de coordenadas son lineales. Luego:

$$S_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow S'_{\mu\nu} = 0$$

● Derivada covariante

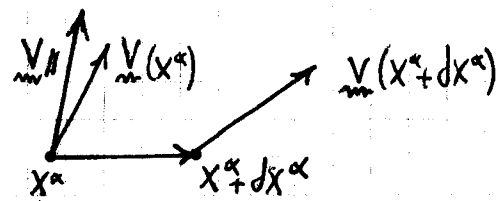
Sean dos puntos X^{α} y $X^{\alpha} + dX^{\alpha}$ en variedades diferentes (diferentes "T")



Definiremos

$$\boxed{\underset{\sim}{V}_{\parallel} \equiv \underset{\sim}{V}(x + dx)}$$

transportados paralelamente



entonces:

$$d\underset{\sim}{x} = \epsilon\, \underset{\sim}{t}$$

y definimos la DERIVADA COVARIANTE en la dirección $\underset{\sim}{t}$:

$$\boxed{\nabla_{\underset{\sim}{t}} \underset{\sim}{V} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\underset{\sim}{V}_{\parallel}(x) - \underset{\sim}{V}(x)}{\epsilon}}$$

, y ahora definamos qué carajos es el TRANSPORTE PARALELO

Tenemos dos definiciones posibles • I

$$V^\alpha_{\parallel}(x) = V^\alpha(x+dx) + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x) \cdot V^\gamma(x)\, \epsilon\, t^\beta$$

, donde $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x)$* es la «conexión afín». Así:

$$(\nabla_{\underset{\sim}{t}} \underset{\sim}{V})^\alpha = t^\beta\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} V^\gamma\right)$$

• II

Diremos que la derivada covariante es tal que en un SLI coincide con la derivada ordinaria

$$(\nabla_{\underset{\sim}{t}} \underset{\sim}{V})^\alpha = t^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad \text{(EN UN SLI)}$$

Entonces defino que $\nabla \underset{\sim}{V}$ sea el tensor $\binom{1}{1}$ tal que en el SLI tiene componentes:

$$\text{En SLI: } \boxed{\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \equiv \nabla_\beta V^\alpha \doteq V^\alpha{}_{;\beta}}\ ‡$$

Es decir que esta igualdad vale SOLO en el SLI (en general).

Ahora sea que cambiamos de sistema de coordenadas. Si "X'" es el SLI, y "X" es un sistema general. Para un objeto de dos índices se tendría:

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \cdot \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} \cdot \underbrace{\frac{\partial V'^\delta}{\partial x'^\epsilon}}_{\partial_\epsilon V'^\delta}$$

, donde el último factor es la derivada de las componentes del vector en el SLI respecto de las coordenadas en el SLI.

Para un objeto de un índice

$$V'^\delta = \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\rho} V^\rho$$

, entonces:

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta}\frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\epsilon}\left(\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\rho} V^\rho\right)$$

, con el ( ) siendo

$$(\ \ ) = \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\rho}\frac{\partial V^\rho}{\partial x'^\epsilon} + \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x'^\epsilon \partial x^\rho} V^\rho$$

, y la derivada segunda se reescribe:

$$\frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\epsilon}$$

, entonces:

$$= \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta}\frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\rho \partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\epsilon} V^\rho$$

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \cdot \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\rho \partial x^\beta} V^\rho \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta} V^\rho} \qquad \text{DERIVADA COVARIANTE}$$

, donde los $\Gamma^\alpha_{\rho\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\rho}$ es la conexión afín: los símbolos de Christoffel.

Pero notemos que $\partial V^\alpha / \partial x^\beta$ y los $\Gamma^\alpha_{\rho\beta}$ no son tensores. Si los calculo en otro sistema las componentes en ese sistema no son CL de éstas. En el SLI son $\Gamma = 0$ y ahí sí es un tensor $\nabla_\beta V^\alpha \doteq \partial_\beta V^\alpha$.

Análogamente podemos definir: tensor $\binom{0}{2}$: $\boxed{\nabla_\beta V_\alpha = \partial_\beta V_\alpha}$ (EN UN SLI)

y se llega a

$$\boxed{\nabla_\beta V_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} V_\rho}$$

En general:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\gamma} = \partial_\beta T^{\alpha\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} T^{\delta\gamma} + \Gamma^\gamma_{\beta\delta} T^{\alpha\delta}$$

$$\nabla_\rho T^{\alpha\ldots}{}_{\gamma\ldots} = \partial_\rho T^{\alpha\ldots}{}_{\gamma\ldots} + \overset{\text{índice contravariante}}{\Gamma^{\alpha\ldots}_{\ldots}}\, T^{\ldots}_{\ldots} - \overset{\text{índice covariante}}{\Gamma_{\ldots}}\, T_{\ldots}$$

• Relación entre $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ y $g_{\mu\nu}$

* $\Gamma^\alpha_{\beta\delta}$ NO es un tensor

‡ notación de derivada covariante. Para derivada ordinaria es $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \partial_\beta V^\alpha \doteq V^\alpha{}_{,\beta}$

$$\boxed{\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0}$$ (EN el SLI)

dados que en el SLI, la derivada covariante coincide con la ordinaria y esta última es nula.
Recordemos que

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$
$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$$

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} \quad (1)$$

$$\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = 0$$

$$\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\lambda\alpha} \quad (2)$$

$$\nabla_\mu g_{\alpha\nu} = 0$$

$$\nabla_\mu g_{\alpha\nu} = \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} \quad (3)$$

Mediante permutaciones de índices, y haciendo

$$(2) + (3) - (1) = 0$$

$$2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\alpha\lambda} = \partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}$$

multiplicando a izquierda por $g^{\alpha\rho}$ será:

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = \frac{g^{\alpha\rho}}{2}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)$$

y he despejado los símbolos en función de la métrica.
Podemos escribir:

$$\boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{g^{\alpha\rho}}{2}\left(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\alpha} - g_{\mu\nu,\alpha}\right)}$$

donde vemos que se cumple

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

Otra alternativa para obtener el mismo resultado es
- A: imponer simetrías
- B: imponer derivada covariante nula

$$\begin{aligned} &\bullet A \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} \\ &\bullet B \quad \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

- Propiedades de la Derivada Covariante

- Regla de Leibnitz

$$\nabla_\alpha \left(A^\mu B_\nu\right) = \left(\nabla_\alpha A^\mu\right) B_\nu + A^\mu\left(\nabla_\alpha B_\nu\right)$$

- Índices contraídos hacen que se comporte como vector una cantidad de rango mayor

$$\nabla_\rho \left[T^{\mu\lambda}{}_\lambda\right] = \partial_\rho T^{\mu\lambda}{}_\lambda + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\nu\lambda}{}_\lambda$$

- La métrica sale fuera

$$\nabla_\rho \left(g^{\mu\nu} T^\alpha_{\mu\sigma}\right) = g^{\mu\nu} \nabla_\rho \left(T^\alpha_{\mu\sigma}\right)$$

- La diferencia de derivadas con índices traspuestos anula los símbolos

$$\nabla_\rho V_\mu - \nabla_\mu V_\rho = \partial_\rho V_\mu - \partial_\mu V_\rho$$

- Existe una "especie" de divergencia covariante

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu\left(\sqrt{g}\, V^\mu\right)$$

Para un escalar tenemos

$$\Box \varphi \equiv \nabla^\alpha \left(\nabla_\alpha \varphi\right)$$

$$\nabla^\mu(\nabla_\mu \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu \varphi\right)$$

, donde φ es una función escalar.

■ Práctica

● Conceptos de Tensores

Dada una variedad de dimensión 'n' Lorentziana

$g(\ ,\ )$ tensor $\binom{0}{2}$ simétrico no degenerado

$g(v, v_\perp) = 0 \quad \forall v \Rightarrow v_\perp = 0$

Dado $P \in M$:

$g(\ ,\ ) \quad T_P \times T_P \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(U,V) = U.V = V.U$ con $U, V \in T_P$

Dado V E $g(\ ,V) \in T_P^*: T_P \to \mathbb{R}$

$g(\ ,\ ): T_P \to T_P^* \quad (V \to g(\ ;V))$

Entonces existe una biyección:

$$\underset{\sim}{V} \in T_P \Longleftrightarrow \underline{V} \in T_P^*$$

de forma tal que:

$$g(\ ,\underset{\sim}{V}) \equiv \underline{V}$$

Recordemos que:

$\underset{\sim}{V} = V^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$ VECTOR ESCRITO EN LA BASE DE VECTORES

$\underline{V} = V_\beta\, \underline{e}^\beta$ 1-FORMA escrito en la base de 1-forms

Tomando un punto P de la variedad M, y un sistema Localmente inercial (SLI) de coordenadas ξ^α_P, defino una base coordenada

$$\{\underset{\sim}{e}^P_\alpha\}$$

, y tendré una base ortonormal

$$\{\underset{\sim}{e}^P_{\hat\alpha}\}$$

En ese punto 'P' la métrica es la de MINKOWSKI

$$g(\underset{\sim}{e}^P_{\hat\alpha}, \underset{\sim}{e}^P_{\hat\beta}) = \eta_{\hat\alpha\hat\beta}$$

Esta métrica transformará de acuerdo a:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^{\hat\lambda}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \xi^{\hat\delta}}{\partial x^\beta}\,\eta_{\hat\lambda\hat\delta} \qquad [1]$$

, pero

$$\frac{\partial \xi^{\hat\lambda}}{\partial x^\alpha} = (e^P_\alpha)^{\hat\lambda}$$

$$\frac{\partial \xi^{\hat\delta}}{\partial x^\beta} = (e^P_\beta)^{\hat\delta}$$

, y entonces

$$g_{\alpha\beta} = g(\underset{\sim}{e}^P_\alpha, \underset{\sim}{e}^P_\beta)$$

En [1] vemos que los primeros factores son los vectores de la nueva base escritos en la base vieja [matriz cambio de base]

$$g(\ ,\ ) = \eta_{\hat\alpha\hat\beta}\, \underline{e}^{\hat\alpha}(\ ) \otimes \underline{e}^{\hat\beta}(\ )$$

, donde

$$\boxed{\underline{e}^{\hat\alpha}(\underset{\sim}{e}_{\hat\epsilon}) = \delta^{\hat\alpha}_{\hat\epsilon}}$$

y siempre usando que

$\{\underline{e}^{\hat\alpha}\}$ es base de T_P^*

Recapitulando a la 1-forma definida vemos que

$$g(\ ,\cancel{V}) = g_{\alpha\beta}\, \underline{e}^{\hat\alpha}(\ ) \otimes \underline{e}^{\hat\beta}(\ )$$

Ahora vemos que valen:

$$\underset{\sim}{V} = V^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha \qquad \underline{V} = V_\alpha \underset{\sim}{e}^\alpha$$

$$g(\ ,\underset{\sim}{V}) = g_{\alpha\beta}\, \underline{e}^\alpha(\ ) \otimes e^\beta(\underset{\sim}{V})$$

$$= g_{\alpha\beta}\, \underline{e}^\alpha(\ ) \otimes e^\beta(V^\gamma \underset{\sim}{e}_\gamma)$$

$$= V^\gamma g_{\alpha\beta}\, \underline{e}^\alpha(\ )\, \delta^\beta_\gamma \qquad [2]$$

$$= g_{\alpha\beta} V^\beta\, \underline{e}^\alpha(\ )$$

$$= \underset{\sim}{V}.(\ )$$

$$= V^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha.(\ )$$

$$= \underline{V}(\ ) \equiv V_\alpha \cdot \underline{e}^\alpha(\ )$$

$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$

$$\boxed{\underline{V}(\ ) \equiv V^{\alpha} \underset{\sim}{e_{\alpha}} \cdot (\ \ )}\ [3]$$

Entonces evaluar una 1 forma es equivalente a multiplicar a los dos vectores

Comparando [2] con [3] vemos que

$$V_{\alpha} = g_{\alpha\beta} V^{\beta}$$

Existe una identificación entre el espacio tangente y el dual al bajar índices con la métrica.

Asimismo como la métrica es inversible, por definición, resulta ser:

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\lambda} = \delta^{\lambda}_{\alpha}}$$

, con lo cual

$$V^{\beta} = g^{\beta\alpha} V_{\alpha}$$

Resumiendo:

$$\boxed{\underline{V}(\ ) = \underset{\sim}{V} \cdot (\ )}$$

En particular, para un vector de la base

$$g_{\alpha\beta}\, \underline{e}^{\beta}(\ ) = \underset{\sim}{e_{\alpha}} \cdot (\ ),$$

entonces

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\, e^{\beta} = e_{\alpha}}$$

y nos olvidamos de "—" y "~" para usar el producto en lugar de evaluar 1-formas.

Para un vector a y ver sus componentes, es

$$a_{\alpha} = \underset{\sim}{e_{\alpha}} \cdot \underline{a} = \underline{a}(\underset{\sim}{e_{\alpha}})$$

$$a^{\alpha} = \underset{\sim}{e^{\alpha}} \cdot \underline{a}$$

, ahora usaremos

$$a_{\alpha} = \underset{\sim}{e_{\alpha}} \cdot \underset{\sim}{a}$$

$$a^{\alpha} = \underset{\sim}{e^{\alpha}} \cdot \underset{\sim}{a}$$

sin las líneas.

Con esta información podemos encarar el problema 11 de la guía. Queremos ver que:

$$g_{\alpha\beta}\, e^{\beta} = e_{\alpha}$$

, multiplico por la inversa que existe

$$g^{\alpha\lambda} g_{\alpha\beta}\, e^{\beta} = g^{\alpha\lambda} e_{\alpha}$$

$$\delta^{\lambda}_{\beta}\, e^{\beta} = e_{\alpha}\, g^{\alpha\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\lambda} = e_{\alpha}\, g^{\alpha\lambda}}$$

Para ver que: $g^{\alpha\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta}$ uso

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha} \cdot e_{\beta},$$

multiplicamos dos veces por la inversa:

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\beta} = g^{\lambda\alpha} e_{\alpha} \cdot e_{\beta}$$

$$\delta^{\lambda}_{\beta} = g^{\lambda\alpha} e_{\alpha} \cdot e_{\beta}$$

$$\delta^{\lambda}_{\beta} = e^{\lambda} \cdot e_{\beta}$$

$$g^{\delta\beta} \delta^{\lambda}_{\beta} = g^{\delta\beta}\, e^{\lambda} e_{\beta}$$

$$= e^{\lambda} g^{\delta\beta} e_{\beta}$$

$$\boxed{g^{\delta\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{\delta}}$$

En página 425 del Hartle se hacen algunas de estas cuentitas.

24 - 9 - 08

Teoría

● Propiedades de la derivada covariante

1. Leibnitz

$$\boxed{\nabla_\lambda (A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu) B_\nu + A^\mu (\nabla_\lambda B_\nu)}$$

2. $$\boxed{\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu [\sqrt{g}\, V^\mu]}$$, donde $g \equiv |\det g_{\mu\nu}|$

Veamos entonces algunas demostraciones

1. $\nabla_\lambda [A^\mu B_\nu]$ = tensor $\binom{1}{2}$,

que en el SLI tiene por componentes:

$$\partial_\lambda [A^\mu B_\nu] =$$
$$(\partial_\lambda A^\mu) B_\nu + A^\mu (\partial_\lambda B_\nu)$$

, pero ésto en otro sistema serán:

$$(\nabla_\lambda A^\mu) B_\nu + A^\mu (\nabla_\lambda B_\nu)$$

entonces hallé una igualdad válida entre tensores en el SLI y eso vale en general.

> si tengo una identidad tensorial en el SLI ⇒ vale en cualquier sistema de coordenadas. EL yeite acá es escribir las RELACIONES entre TENSORES.

2. Sabemos que: símbolos de Christoffel

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\nu \Rightarrow$$
$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\nu} V^\nu$$

, pero será:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\mu\sigma,\nu} = (\ln\sqrt{g})_{,\nu} \quad \bigstar$$

para la cual usamos:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left[g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}\right]$$

expresión que vimos en anterior oportunidad. Al reemplazar $\rho \to \mu$ vemos lo que sucede:

$$\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left[g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\nu\mu,\alpha}\right]$$

, el producto de cosas antisimétricas por algo simétrico va a cero en la contracción

$$g^{\alpha\mu} A_{\alpha\mu}$$
$$(g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\nu\mu,\alpha}) \leftarrow \text{ANTISIMÉTRICO}$$

Es decir:

$$\underbrace{S^{\mu\nu}}_{\text{simétrico}} \underbrace{A_{\mu\nu}}_{\text{antisimétrico}} = S^{\nu\mu} A_{\nu\mu}$$

, por ser índices mudos; usando la simetría:

$$S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = S^{\nu\mu} A_{\nu\mu}$$
$$S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = S^{\mu\nu} (-A_{\mu\nu})$$
$$S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \Rightarrow$$
$$\boxed{S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0}$$

Ahora queremos demostrar ★. Puedo escribir:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\mu\sigma,\lambda} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \mathbf{g}^{-1} \mathbf{g}_{,\lambda}$$

$\mathbf{g}$ = matriz

Calcularé:

$$\ln|\det[\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}]| - \ln|\det \mathbf{g}|$$
$$\ln|\det(\mathbf{g} + \delta\mathbf{g})\,\mathbf{g}^{-1}|$$
$$\ln|\det(\mathbb{1} + \delta\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}^{-1})|$$

, el determinante de $(\mathbb{1} + \delta\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}^{-1})$ es [a orden 1]:

$$1 + \mathrm{Tr}(\mathbf{g}^{-1}\cdot\delta\mathbf{g})$$

entonces

$$\ln|1 + \mathrm{Tr}(\mathbf{g}^{-1}\delta\mathbf{g})| \approx \mathrm{Tr}[\mathbf{g}^{-1}\cdot\delta\mathbf{g}]$$

De esto deducimos que:

$$[\ln|\det \mathbf{g}|]_{,\lambda} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{g}_{,\lambda}$$

Metiendo una raíz cuadrada se llega

$$\left[\ln\sqrt{|\det g|}\right]_{,\lambda} = \frac{1}{2}Tr\left(g^{-1}g_{,\lambda}\right)$$

, luego:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,Tr\; g^{-1}g_{,\lambda} = (\ln\sqrt{g})_{,\lambda}$$

y entonces:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,\nu}V^\nu$$

$$\boxed{\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g})V^\mu}$$

NB
Los Γ también son $\neq 0$ cuando en un espacio plano uso otras coordenadas que las cartesianas

Yendo un poco más lejos podemos meter una 1-forma en

$$\nabla_\mu V^\mu = \nabla^\mu V_\mu \quad , \text{ con } V_\mu = \partial_\mu\varphi$$

$$\nabla^\mu(\partial_\mu\varphi) \equiv \Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left[\sqrt{g}\,\partial^\mu\varphi\right]$$

, se generaliza el D'Alembertiano

$$\boxed{\Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right)}$$

La derivada covariante de un escalar coincide con la derivada ordinaria

$$\boxed{\nabla_\mu\varphi \equiv \partial_\mu\varphi}$$

, porque no hay transporte paralelo. Esta derivada es un tensor (una uno-forma). Pero $\partial^2_{\mu\nu}\varphi$ NO es un tensor.

● Transporte paralelo y geodésico

Si el vector se transporta a lo largo de la curva dada por:

$$t^\beta = \frac{dx^\beta}{d\sigma}$$

y la ecuación que define dicho transporte es:

$$\nabla_{\underset{\sim}{t}}\underset{\sim}{V} = 0 = t^\beta\nabla_\beta V^\alpha$$

$$\nabla_{\underset{\sim}{t}}\underset{\sim}{V} = t^\beta\partial_\beta V^\alpha + t^\beta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}V^\gamma$$

, se puede reescribir como:

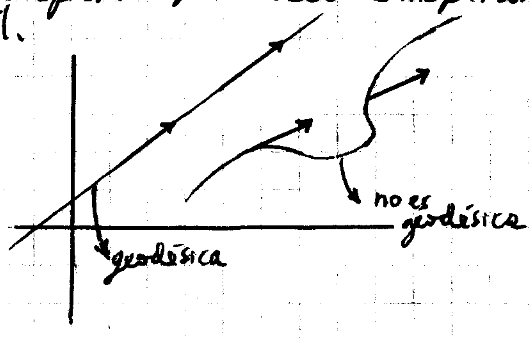
$$t^\beta = \frac{dx^\beta}{d\sigma} \quad , \quad \partial_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \Rightarrow$$

$$\boxed{0 = \frac{dV^\alpha}{d\sigma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}V^\gamma}$$

ecuación del transporte paralelo

Con esto vamos a definir un conjunto de curvas que se parezca a una recta en $\mathbb{R}^n$. Tomo de todas las posibles curvas la que minimice la distancia entre dos puntos. Este enfoque es el más general.

Otro enfoque es considerar el transporte paralelo e inspirarse en él.



Dado un vector tangente en un punto, el trasladado paralelamente sigue siendo tangente a la recta. Esto no sucede en una curva.

$x^\alpha(r)$ define una curva geodésica si $t^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\sigma}$ en un punto, trasladado paralelamente a otro punto cualquiera de la curva, sigue siendo recta tangente a la curva.

$$\nabla_{\underset{\sim}{t}}\underset{\sim}{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dt^\alpha}{d\sigma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}t^\beta t^\gamma = 0}$$

, esta es entonces la ecuación de las geodésicas.

$$[1]\quad \boxed{\frac{d^2X^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dX^\beta}{d\sigma}\cdot\frac{dX^\gamma}{d\sigma}=0}$$

, y serán de tipo

tiempo $t^\alpha t_\alpha < 0$

NULA $t^\alpha t_\alpha = 0$

ESPACIAL $t^\alpha t_\alpha > 0$

Así escrito [1], se dice que σ es un parámetro AFÍN.

Otra definición que podríamos haber tomado es decir:

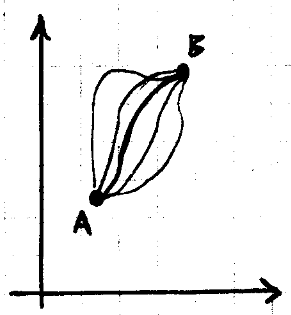
$$\nabla_t \underset{\sim}{t} = f(\sigma)\underset{\sim}{t}$$

que darán lugar a los mismos puntos en la curva pero recorridos con otra parametrización.

Ahora consideramos definir como la curva que minimiza distancias. Podríamos prever un principio variacional.

Las geodésicas serán las curvas que hacen extremo el tiempo propio [análogo a la distancia].

Geodésica tipo tiempo: curva que extremiza el tiempo propio entre A y B



$$\tau_{AB}=\int_A^B d\tau = $$

$X^\alpha(\sigma)$

$$\int_0^1 d\sigma\sqrt{-g_{\alpha\beta}\frac{dX^\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{dX^\beta}{d\sigma}}$$

, puedo pensar la $\sqrt{\ }$ como una especie de lagrangiano y σ una especie de tiempo $\rightarrow$

$$\int dt\,\mathcal{L} \overset{\text{EQUIVALENCIA}}{\longleftrightarrow} \int d\sigma\sqrt{\ }$$

los cuales, vía extremos, me deben llevar a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\boxed{\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dX^\mu}{d\sigma}\right)}\right]=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\mu}}$$

$$x^\alpha(\sigma)\quad,\ \alpha=1,2,\dots,N$$

Ahora hay que hacer la cuenta

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{-g_{\mu\nu}\,dX^\nu/d\sigma}{\sqrt{\ }}\right\}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\ }}\left(-g_{\alpha\beta,\mu}\frac{dX^\alpha}{d\sigma}\frac{dX^\beta}{d\sigma}\right)\quad[2]$$

conviene usar como parámetro el τ para facilitar el cálculo pues $d\tau=\sqrt{\ }\,d\sigma$. Se simplifica [2] de forma que queda,

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{-g_{\mu\nu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\right\}=-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}\frac{dX^\alpha}{d\tau}\frac{dX^\beta}{d\tau}$$

, y ahora entro en un renglón! Amasando:

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2X^\nu}{d\tau^2}+\underbrace{g_{\mu\nu,\beta}\frac{dX^\beta}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}}_{\dagger}\cdot$$

$$-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}\frac{dX^\alpha}{d\tau}\cdot\frac{dX^\beta}{d\tau}=0$$

, como $\dagger$ es simétrico hago el truco de:

$$\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\beta}+g_{\mu\beta,\nu}\right)=g_{\mu\nu,\beta}$$

, donde el antisimétrico se ha muerto. Entonces:

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2X^\nu}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\beta}+g_{\mu\beta,\nu}\right)\frac{dX^\beta}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}$$

$$-\frac{1}{2}g_{\nu\beta,\mu}\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\beta}{d\tau}=0$$

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2X^\nu}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\frac{dX^\beta}{d\tau}\cdot\frac{dX^\nu}{d\tau}\left[g_{\mu\nu,\beta}+g_{\mu\beta,\nu}-g_{\nu\beta,\mu}\right]$$

$$=0$$

Ahora multiplico todo por $g^{\mu\lambda}$, que es la inversa de $g_{\mu\nu}$. Así

$$\frac{d^2X^\lambda}{d\tau^2} + \frac{g^{\mu\lambda}}{2}\left[g_{\mu\nu,\beta}+g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu}\right]\frac{dX^\beta}{d\tau}\cdot\frac{dX^\nu}{d\tau}=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2X^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\nu\beta}\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\beta}{d\tau}=0}$$

Hemos llegado a la misma ecuación anterior. Para una geodésica tipo tiempo llegamos a la misma forma por haber usado el parámetro afín: τ.

Si usáremos otro también sería equivalente pero más complicado.

● Principio Variacional Alternativo

Resulta más sencillo usar un lagrangiano del tipo que se ilustra abajo:

[3] $$\boxed{S_{AB} = \int_A^B g_{\mu\nu}(x)\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda}d\lambda}$$

, en el cual hemos sacado la $\sqrt{\ }$. Este extremo sirve para todos los tipos de geodésicas.

A partir de las ecuaciones de movimiento en [3] sacamos explícitamente los símbolos de christophel.

● Simetrías & Leyes de Conservación

En [3] la métrica depende de las X pero no de las λ; analogía mediante se tiene la conservación de la energía.

(1) $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de λ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dX^\mu}{d\lambda}\right)} - \mathcal{L} = H}$$

$$\dot{q}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\Big\}p - \mathcal{L} = H$$

Reminiscencia de Mecánica Clásica

Estaremos usando que las partículas libres se mueven en geodésicas que no varían de carácter

29-9-8

, y esta cuenta trivialmente resulta

$$H = \boxed{g_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda} = cte}$$

, que no es otra cosa que

$$\boxed{t^\mu t_\mu}$$

entonces se conserva el carácter TEMP, ESP, NULO de la geodésica a lo largo de la trayectoria.

(2) Sea que $\mathcal{L}$ no depende de alguna coordenada X^α

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left[\frac{dX^\alpha}{d\lambda}\right]} = \text{cte de movimiento}$$

Esta condición implicará que la métrica [redacted] no depende de alguna de las coordenadas.

$$g_{\alpha\beta}\frac{dX^\beta}{d\lambda} = cte = g_{\alpha\beta}U^\beta$$

se conserva la componente de la cuadrivelocidad asociada a la que no aparece [la covariante]

$$\boxed{U_\alpha \ cte.}$$

Esto lo podemos expresar de varios modos

$$m\,U_\alpha = p_\alpha = cte.$$

o introducimos

$$\underset{\sim}{\xi} = (0,0,\dots,\underset{\uparrow}{1},\dots,0,0)$$

componente α

, Lo que se conservará entonces es

$$\underset{\sim}{\xi}\cdot\underset{\sim}{p} = cte.$$

, el producto escalar.

■ Práctica
Clase de Consultas

■ teoría
● Comentario
Buena discusión en GRAVITATION

(Thorne, Misner, Wheeler) sobre relojes en campos gravitatorios intensos (pág. 393)

● Geodésicas

Se tenía, según los dos diferentes modos, y usando el parámetro afín

Geodésicas →
$$\boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0}$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int d\sigma\left[-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right]^{1/2}$$

, pero podemos usar otro principio variacional basado en el cuadrado del lagrangiano

$$S_{AB} = \int_A^B d\lambda\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

que nos lleva a una ecuación de la geodésica en función del parámetro afín.

● Leyes de conservación

Cuando el lagrangiano no depende EXPLÍCITAMENTE del parámetro

• $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\lambda) \Rightarrow$

$$\boxed{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = cte.}$$

Además cuando tenga coordenada cíclica (no depende EXPLÍCITAMENTE de alguna coordenada)

• $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(x^\alpha) \Rightarrow$

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = cte}$$

Como ejemplo tenemos:

$$U_\alpha = cte \Leftrightarrow P_\alpha = m U_\alpha = \overset{cte.}{\downarrow}$$

La ley de conservación la podemos poner definiendo un

$$\underset{\sim}{\xi} = (0, 0, \ldots, \overset{\swarrow \text{lugar } \nu}{1}, 0, \ldots, 0)$$

$$\underset{\sim}{\xi} \cdot \underset{\sim}{P} = cte$$

$$\xi^\mu P_\mu = P_\alpha \quad \text{, donde}$$

$\underset{\sim}{\xi}$ = vector de Killing

● EJEMPLO: situación de campo débil. Sea una métrica

$$ds^2 = -(1+2\phi(\vec{x}))dt^2 + (1-2\phi(\vec{x}))(dx^2+dy^2+dz^2) \quad \text{con } \phi(\vec{x}) \ll 1$$

, una métrica que describe el campo gravitacional en las cercanías del Sol. Todas las componentes son independientes del tiempo.

$$g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t) \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\xi} = (1,0,0,0) \leftarrow \text{vector asociado a la simetría}$$

Una partícula con $m \neq 0$ tendrá esto como constante de movimiento:

$$\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{\xi} = P_0 \quad (cte.)$$

Veamos:

$$\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{P} = -m^2,$$

$$m^2 \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{U} = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta$$

, quiero el P_0 en función del $\vec{P}$ y el ϕ

$$-m^2 = -(1+2\phi)(P^0)^2 + (1-2\phi)(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$$

$$(P^0)^2 = \frac{1}{(1+2\phi)}\left(m^2 + (1-2\phi)\vec{P}^2\right)$$

En realidad yo quiero ver el P_0 (covariante)

$$(P^0)^2 = \frac{m^2}{(1+2\phi)}\left(1 + (1-2\phi)\frac{\vec{P}^2}{m^2}\right)$$

Consideremos que la partícula es no relativista $\vec{P}^2/m^2 \ll 1$ y el campo es débil

■ Aproximación Newton (Límite de Newton) $\left\{\begin{array}{c}\text{CAMPO DÉBIL} \\ + \\ \text{PART. NO RELATIVISTA}\end{array}\right.$

$$(P^0)^2 \approx m^2(1-2\phi)\left(1 + \frac{\vec{P}^2}{m^2}\right)$$

$$(P^0)^2 \approx m^2\left(1 + \frac{\vec{P}^2}{m^2} - 2\phi\right)$$

$$\boxed{P^0 \approx m\left(1 + \vec{P}^2/2m^2 - \phi\right)}$$

NB La relación entre P^α y P_α es NO TRIVIAL cuando la métrica es no trivial

Pero lo que se conserva es

$$P_0 = g_{0\alpha} P^\alpha \overset{\text{métrica diagonal}}{=} g_{00} P^0$$

$$P_0 = -(1+2\phi)m\left(1+\frac{\vec{P}^2}{2m^2}-\phi\right)$$

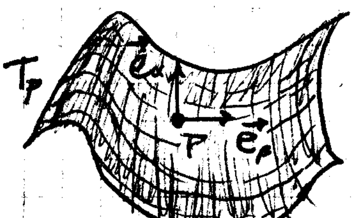
$$\boxed{P_0 \approx -\left[m + \phi \cdot m + \frac{\vec{P}^2}{2m}\right]}$$

y esto es la energía cinética + pot. con el signo cambiado. La energía es lo que se conserva cuando es independiente del tiempo.

- **Coordenadas normales de Riemann**

Esto es un ejemplo de SLI sea una variedad riemaniana (métrica con signatura positiva + + + + ...)

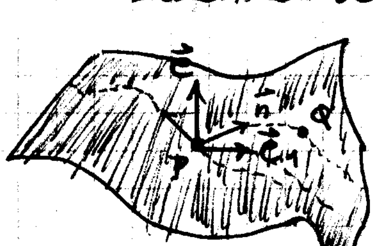
Es el SLI por antonomasia



Elijo n vectores ortonormales $\vec{e}_\alpha$ con (en T_P) $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

Supongamos que la base es tal que: $\{\vec{e}_\alpha\}$ es base coordenada, es base ortonormal

Consideremos todas las geodésicas salientes de P que cabalgan sobre la variedad con vector tangente $\vec{n}$.



Le damos coordenadas a los puntos sobre la geodésica.

$$Q^\alpha = (sn^1, sn^2, \ldots, sn^n)$$

donde s = distancia medida a lo largo de la geodésica entre P y Q. n^α son las componentes del vector $\vec{n}$ en la base $\vec{e}_\alpha$.

Para la geodésica en $\vec{e}_1$ tendré $n^\alpha = (1, 0, \ldots 0)$ y vemos así porque es una base coordenada. Porque no importa cuan lejos vaya pues siempre estoy con vector tangente $\vec{e}_1$

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\big|_P = \delta_{\alpha\beta}},$$

usando esta base

La derivada en el punto P. es la delta La curva se puede parametrizar →

$$X^\alpha(s) = s \cdot n^\alpha$$

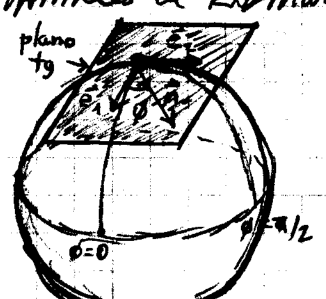
pero por ser una geodésica tiene que satisfacer la ecuación.

$$\underbrace{\frac{d^2X^\alpha}{ds^2}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{dX^\beta}{ds}\frac{dX^\gamma}{ds}}_{\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} n^\beta n^\gamma = 0} = 0$$

luego:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \Rightarrow g_{\alpha\beta,\gamma}\big|_P = 0$$

Veamos en un ejemplo de coordenadas normales de Riemann sobre una esfera.

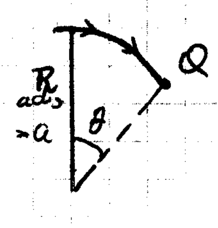


Elijo dos vectores $\vec{e}_1\, \vec{e}_2$ (en ⊢) correspondientes a que $\phi = 0$ ó $\pi/2$

Elijo $\vec{n}$

$$\vec{n} = \cos\phi\, \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\phi\, \vec{e}_2$$

El punto Q que coordenadas normales tendrá?



Q → φ, θ ← esféricas

Q → ¿Riemann?

$$Q = (s.\cos\phi \;,\; s.\operatorname{sen}\phi)$$

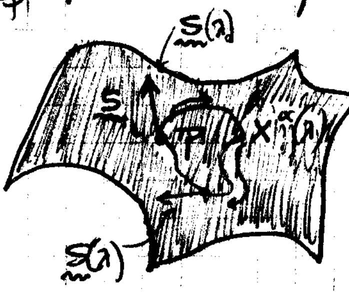
coord. e_1 nor. Riemann — coord. e_2

$$\boxed{\mathcal{Q} = (a\theta\cos\phi,\ a\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)}$$

Esto da que en el polo norte la $g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ y es un sistema SLI.

- **tensor de Curvatura**

Cantidad local para darnos una medida de la curvatura. La idea es que parado en un punto queremos determinar la "curvatura". Haremos un enfoque general que sirva para espacios generales.



Considero un punto P, una curva cerrada infinitesimal dada por $X^\alpha(\lambda)$, un vector S. Lo trasladaremos ∥ con el «transporte paralelo» recorriendo la curva y viendo como termina.

$$X^\alpha(\lambda_0) = X^\alpha(\lambda_1)$$

$$\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1$$

Diremos que la variedad es localmente plana si el vector coincide luego del recorrido. Pediremos que se verifique la ecuación del transporte paralelo

$$\nabla_t S = 0 \Leftrightarrow$$

$t^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda}$

$$\frac{dS_\mu}{d\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\frac{dX^\beta}{d\lambda}S_\alpha = 0$$

Desarrollaremos todo esto con Taylor en torno a P.‡

$$\Gamma^\alpha_{\mu\beta}(X[\lambda]) = \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\big|_p + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta}\big|_p \times [X^\delta(\lambda) - X^\delta(\lambda_0)]$$

$$S_\alpha = S_\alpha\big|_p + (\Gamma^\epsilon_{\alpha\delta}S_\epsilon)_p \times (X^\delta(\lambda) - X^\delta(\lambda_0))$$

$$\Delta S_\mu = S_\mu(\lambda_1) - S_\mu(\lambda_0) =$$

variación del vector en una vuelta

‡ El desarrollo de la cuenta está en Weinberg

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda\,\frac{dX^\beta}{d\lambda}\Big\{\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\big|_p + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\epsilon}\big|_p\big(X^\delta(\lambda) - X^\delta(\lambda_0)\big)\times \Big(S_\alpha\big|_p + (\Gamma^\epsilon_{\alpha\delta}S_\epsilon)_p \times \big(X^\delta(\lambda) - X^\delta(\lambda_0)\big)\Big)\Big\}$$

$$\Delta S_\mu = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda\,\frac{dX^\beta}{d\lambda}\Big\{\big(X^\delta(\lambda) - X^\delta(\lambda_0)\big)\times \overbrace{\big(\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\epsilon_{\alpha\delta}S_\epsilon + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta}S_\alpha\big)_p}^{\text{dummies}}\Big\}$$

No evalúo contrib. cuadráticas y las que son nulas × integral en curva cerrada

pero como está evaluado en P el paréntesis puede salir de la integral

$$\Delta S_\mu = \big(\Gamma^\epsilon_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\epsilon\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta}\big)S_\alpha\big|_p \times \underbrace{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} X^\delta\,dX^\beta}_{\equiv A^{\delta\beta}} =$$

Juntando todo

$$\Delta S_\mu = A^{\delta\beta}\overbrace{\big(\Gamma^\epsilon_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\epsilon\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta}\big)}^{\equiv H}S_\alpha$$

pero el $A^{\delta\beta}$ es antisimétrico respecto del intercambio $\delta\leftrightarrow\beta$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} x^\delta\,dx^\beta = \oint d\big(x^\delta x^\beta - x^\beta\,dx^\delta\big)$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} x^\delta\,dx^\beta = -\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} x^\beta\,dx^\delta$$

Pero dado los dummies δ,β puedo reemplazar por

$$H = \frac{1}{2}\big(H - H_{\beta\leftrightarrow\delta}\big)$$

, luego

$$\boxed{\Delta S_\mu = \frac{1}{2}A^{\delta\beta}S_\alpha\big(\Gamma^\epsilon_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\epsilon\delta} - \Gamma^\epsilon_{\mu\delta}\Gamma^\alpha_{\epsilon\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta} - \Gamma^\alpha_{\mu\delta,\beta}\big)}$$

Para respetar convención de signos del Hartle

$$\Delta S_\mu = \ominus\frac{1}{2}A\,S\,\big(\ominus\Gamma\,\Gamma \oplus \Gamma\,\Gamma \ominus \Gamma \oplus \Gamma\big)$$

Se puede abreviar algo todo esto

definiendo

$$\boxed{\Delta S_\mu = -\frac{1}{2} A^{\delta\beta} S_\alpha R^\alpha{}_{\mu\beta\delta}}$$

, aunque los símbolos de Cristophel no son tensores el

$$\boxed{R^\alpha{}_{\mu\beta\delta}}$$

sí es un tensor. Pero ΔS_μ es un vector y así

$$\begin{array}{ccccc} \Delta S & & A & S & R \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \doteq & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \\ v & & t & v & \text{TENSOR} \end{array}$$

, necesariamente lo que queda en R tiene que ser un tensor en (1 3) para que transforme bien el vector.

Si [redacted] un tensor es 0 en un sistema será 0 en otro sistema

$$\boxed{R^\alpha{}_{\mu\beta\delta} \equiv \text{TENSOR DE RIEMANN O TENSOR DE CURVATURA}}$$

Si $R^\alpha{}_{\mu\beta\delta} = 0$ para todo punto de la variedad existe sistema de coordenadas:

$$g_{\mu\nu}(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} \delta_{\mu\nu} & \text{Riemann} \\ \eta_{\mu\nu} & \text{Lorentz} \end{cases}$$

Nos dice el R si la variedad es curva o no curva

Esta condición es más fuerte que pedirle SLI.

SUPER NB: En el SLI se anulan los Γ pero no los $\Gamma_{,\lambda}$

Existen maneras alternativas y equivalentes de definir el tensor de curvatura

1. Ecuación de desviación de las geodésicas. (lo veremos más adelante)

2. Definir tensor de curvatura a partir del conmutador de las derivadas covariantes*

$$\nabla_\lambda(\nabla_\nu V^\mu) - \nabla_\nu(\nabla_\lambda V^\mu) \neq 0$$

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] V^\mu \neq 0$$

* la ∇_μ no conmuta

$$\nabla_\nu V^\mu = V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\varepsilon} V^\varepsilon$$

$$\boxed{(V^\mu{}_{;\nu})_{;\lambda} \equiv V^\mu{}_{;\nu\lambda}} \rightarrow$$

$$V^\mu{}_{;\nu\lambda} - V^\mu{}_{;\lambda\nu} = (V^\mu{}_{;\nu})_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(V^\rho{}_{;\nu})_{\mathrm{I}} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}(V^\mu{}_{;\rho})_{\mathrm{II}}$$

reemplacemos ahora:

$$\mathrm{I.}\ V^\rho{}_{,\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\varepsilon} V^\varepsilon$$

$$\mathrm{II.}\ V^\mu{}_{,\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\varepsilon} V^\varepsilon$$

$$V^\mu{}_{;\nu\lambda} = V^\mu{}_{,\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\varepsilon,\lambda} V^\varepsilon + \Gamma^\mu_{\nu\varepsilon} V^\varepsilon{}_{,\lambda} + \dots$$

Esta ecuación tiene que ser una ecuación tensorial, entonces quiero ver a qué es igual en el SLI. Me muevo ahí, entonces

$$V^\mu{}_{;\nu\lambda} = V^\mu{}_{,\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\varepsilon,\lambda} V^\varepsilon \quad \left(\text{ya en SLI}\right)$$

$$V^\mu{}_{;\nu\lambda} - V^\mu{}_{;\lambda\nu} = \left(\Gamma^\mu_{\nu\varepsilon,\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\varepsilon,\nu}\right) V^\varepsilon$$

entonces:

$$V^\mu{}_{;\nu\lambda} - V^\mu{}_{;\lambda\nu} = R^\mu{}_{\varepsilon\lambda\nu} V^\varepsilon$$

$$\boxed{[\nabla_\lambda, \nabla_\nu] V^\mu = R^\mu{}_{\varepsilon\lambda\nu} V^\varepsilon}$$

, pero es una identidad en el SLI entre tensores entonces debe valer siempre

- Otras Definiciones
  - $R_{\mu\varepsilon\lambda\nu} = g_{\mu\alpha} R^\alpha{}_{\varepsilon\lambda\nu}$
  - $R_{\mu k} = R^\alpha{}_{\mu\alpha k}$ (con $R_{\mu k} = R_{k\mu}$) TENSOR DE RICCI $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
  - $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\nu{}_\nu$ (escalar de Ricci = invariante frente a cambio de coorden.)

- **Tensor de Einstein**

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$$

- **Algunas Propiedades Algebraicas**
  - $R_{\underbrace{\lambda\mu}\underbrace{\nu\kappa}} = R_{\underbrace{\mu\lambda}\underbrace{\kappa\nu}}$
  - $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu}$
  - $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$
  - $\Rightarrow R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$

Identidad de Bianchi

1. $$\boxed{R_{\lambda\mu\underbrace{\nu\kappa;\eta}_{\text{CÍCLICO}}} = 0}$$

2. $$\boxed{\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \cancel{\Gamma\Gamma} - \cancel{\Gamma\Gamma}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau}\left(g_{\tau\nu,\rho} + g_{\tau\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\tau}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau}\left(g_{\tau\nu,\rho\sigma} + g_{\tau\rho,\nu\sigma} - g_{\nu\rho,\tau\sigma}\right) + \frac{1}{2} g^{\mu\tau}{}_{,\sigma}\cancel{(\ldots)}$$

Ahora si vamos al SLI se mueren algunos términos (x)

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho}\right)}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma,\lambda} = \frac{1}{2}\left[R_{\mu\nu\rho\sigma}\right]_{,\lambda}}$$ ← ESTO NO ES TRIVIAL QUE VALGA ASÍ

- $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$

  $\mu \leftrightarrow \rho$, $\nu \leftrightarrow \sigma$ vale en el SLI

- $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}$

  $\mu \leftrightarrow \nu$ vale en el SLI (x comprobación)

- $R_{\mu\kappa} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\kappa} = g^{\alpha\beta} R_{\underbrace{\beta\mu}\underbrace{\alpha\kappa}}$

  $= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\kappa\beta\mu}$

  $R_{\mu\kappa} = R^{\beta}{}_{\kappa\beta\mu} = R_{\kappa\mu}$

  $\Rightarrow$ **el tensor de Ricci es simétrico.**

El tensor de Riemann en n dimensiones [redacted] tiene

$$\boxed{\frac{1}{12} n^2(n^2-1)}$$ ← componentes independientes

$A \equiv \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$ derivada 2^{da} de la métrica

$B \equiv \frac{1}{6} n^2(n+1)(n+2)$ parámetros disponibles para derivada 2^{da}

Luego se ve que

$$A - B = \frac{1}{12} n^2(n^2-1)$$

> La idea es que el tensor de curvatura da la mínima matemática no espúrea que describe bien la física.

Para n= ... $\frac{16 \cdot 15}{12}$ ... 20 ... Componentes

Práctica

- Problema 1 (GUÍA 4)

$$[\underbrace{\nabla_\alpha T^{\beta}{}_{\gamma}}_{\text{componentes de tensor}}]_{SLI} = \partial_\alpha T^{\beta}{}_{\gamma}$$

, donde en el SLI se cumple que:

$$\text{SLI} \begin{cases} \eta_{\alpha\beta} & \text{(métrica)} \\ \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 & \text{(cristofel son nulos)} \end{cases}$$

Tengo dos bases para los componentes

contravariantes $\rightarrow \{e_\alpha\}$
covariantes $\rightarrow \{e^\alpha\}$

$$e^{\alpha} \cdot e_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

Llamaremos

A. $\{X'^\alpha\}$ **SLI**

B. $\{X^\mu\}$ **SGC**

A. $\partial_{\alpha'} = \dfrac{\partial}{\partial x'^\alpha} = e_{\alpha'}$

B. $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = e_\mu$

que se relacionan con chain rule como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu}\frac{\partial}{\partial X'^\alpha}$$

$$V = V^{\alpha'}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} =$$

$$\boxed{V = V^\mu \frac{\partial X'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial X'^\alpha}}$$

$$V^{\alpha'} = V^\mu \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu}$$

Veamos la diferencia entre covariantes y contravariantes

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega_\alpha e^\alpha = \omega_{\alpha'} e^{\alpha'}$$

$$\omega_\alpha = \underset{\sim}{\omega} \cdot e_\alpha$$

$$\omega_\alpha = \omega_{\alpha'} \underbrace{e^{\alpha'} \cdot e_\alpha}_{\frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\alpha} e_{\beta'}}$$

$$\omega_\alpha = \omega_{\alpha'} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\alpha}\delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

$$\boxed{\omega_\alpha = \omega_{\beta'}\frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\alpha}}$$

Quiero escribir $\nabla_\alpha T^\beta{}_\gamma$ en un sistema general de coordenadas, sabiendo la expresión en el SLI.

$$\nabla_\rho T^\mu{}_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\beta}\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}\frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\rho} \times$$

$$\left[\nabla_{\alpha'} T^{\beta'}{}_{\gamma'}\right]_{SLI}$$

ESCRITO EN EL SISTEMA 1'

la primer transformación luce

$$T^{\beta'}{}_{\gamma'} = \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\epsilon}\frac{\partial X^\sigma}{\partial X'^\gamma} T^\epsilon{}_\sigma$$

$$\nabla_\rho T^\mu_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\beta}\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}\frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\rho}\frac{\partial}{\partial X'^\alpha} \times \left[\frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\epsilon}\frac{\partial X^\sigma}{\partial X'^\gamma} T^\epsilon{}_\sigma\right]$$

$$\nabla_\rho T^\mu_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\beta}\underbrace{\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}}\left[\frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\rho \partial X^\epsilon}\underbrace{\frac{\partial X^\sigma}{\partial X'^\gamma}} T^\epsilon{}_\sigma + \underbrace{\frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\epsilon}}\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial X^\rho \partial X'^\gamma} T^\epsilon{}_\sigma + \underbrace{\frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\epsilon}}\frac{\partial X^\epsilon}{\partial X'^\gamma}\frac{\partial}{\partial X^\rho} T^\epsilon{}_\sigma\right]$$

Esto se simplifica usando que:

$$\boxed{\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial X'^\gamma} = \delta^\sigma_\nu}$$

entonces:

$$\nabla_\rho T^\mu_\nu = \overbrace{\frac{\partial X^\mu}{\partial X'^\beta}\frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\rho \partial X^\epsilon}}^{=\Gamma^\mu_{\rho\epsilon}} T^\epsilon{}_\nu + \underbrace{\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}\cdot\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial X^\rho \partial X'^\gamma}}_{=\Pi} T^\mu{}_\sigma + \frac{\partial}{\partial X^\rho} T^\mu{}_\nu$$

EL término Π es casi un símbolo de cristofel, con lo cual

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X^\rho}\left(\frac{\partial X'^\gamma}{\partial X^\nu}\frac{\partial X^\epsilon}{\partial X'^\gamma}\right)}_{\delta^\sigma_\nu} - \frac{\partial^2 X'^\gamma}{\partial X^\rho \partial X^\nu} \times \frac{\partial X^\sigma}{\partial X'^\gamma}$$

$$= -\Gamma^\sigma_{\rho\nu}$$

$$\boxed{\nabla_\rho T^\mu{}_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\rho\epsilon} T^\epsilon{}_\nu - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} T^\mu{}_\sigma}$$

Ojo con la no conmutatividad de las derivadas cuando están escritos en diferentes sistemas de coordenadas.

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \neq \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\rho}$$

Pero tenemos otra forma de llegar a este resultado:

$$[\nabla_\alpha g_{\mu\nu}] \underset{SLI}{=} \partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

$\Rightarrow$ se verá que:

$$\boxed{\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{g^{\rho\sigma}}{2}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)}$$

- **Problema 2**

Buscamos transformación de los símbolos usando que:

$$\boxed{\nabla_\mu V^\nu \equiv V^\nu{}_{;\mu} \doteq V^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho}$$

, para todo V vector.

$$\boxed{V^\nu{}_{,\mu} \equiv \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}}$$

La idea es que mostremos que es cero en un SLI pero no en otro con lo cual <u>NO ES UN TENSOR</u>.

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\nabla_\rho V^\delta$$

base coordenada $\{x'^\mu\}$

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\rho'} V^{\rho'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\delta + \Gamma^\delta_{\rho\sigma} V^\sigma\right]$$

, con $V^\delta = (\partial x^\delta/\partial x'^\epsilon) V^\epsilon$

$$= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\epsilon} V^{\epsilon'}\right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\epsilon}\Gamma^\delta_{\rho\sigma} V^\sigma$$

$$= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left[\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\epsilon} V^{\epsilon'}\right] + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\Gamma^\delta_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\epsilon} V^{\epsilon'}$$

$$= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\mu \partial x'^\epsilon} V^{\epsilon'} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\epsilon}\frac{\partial x^{\epsilon'}}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}\Gamma\frac{\partial x}{\partial x} V^{\epsilon'}$$

$$= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\epsilon}\Gamma^\delta_{\rho\sigma} V^{\epsilon'} + \cancel{\frac{\partial V^{\nu'}}{\partial x'^\mu}} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\mu \partial x'^\epsilon} V^{\epsilon'} = \cancel{\frac{\partial V^{\nu'}}{\partial x'^\mu}} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\epsilon'} V^{\epsilon'}$$

Luego transforman como un tensor más un término inhomogéneo:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\epsilon'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\epsilon}\Gamma^\delta_{\rho\sigma} + \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\mu \partial x'^\epsilon}}_{= -\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\delta}\cdot\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\epsilon}}$$

Si $\{x^\mu\} \to SLI \quad \Gamma^\delta_{\rho\sigma} = 0 \to$

$$[\Gamma^{\nu'}_{\mu'\epsilon'}]_{SGC} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^\mu \partial x'^\epsilon}$$

, entonces como el símbolo puede ser nulo en un sistema y no nulo en otro No transforma como un tensor.

- **Problema 4** (comentario)

Útil para el problema 15 de la guía 3.

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V})^i = \frac{\epsilon^{ijk}}{2\sqrt{g}}(V_{k,j} - V_{j,k})$$

Falta en el enunciado

, donde la métrica es euclídea y 3D.

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V})^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk} V_{k,j}$$

Pero Levi.Civita no es un tensor porque no transforma

$$\boxed{\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & (ijk)^{\#}\ \text{perm. par} \\ -1 & (ijk)^{\#}\ \text{perm. impar} \\ 0 & \text{otra} \end{cases}}$$

$$[\vec{\nabla}\times\vec{V}]_{SLI} = \epsilon^{i'j'k'}\partial_{j'}V_{k'}\underbrace{e_{i'}}_{``\partial_{i'}}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1' & \partial_2' & \partial_3' \\ V_1' & V_2' & V_3' \end{vmatrix} \quad \underset{SLI}{\{X'^i\}}$$

La idea es transformar a un sistema general de coordenadas

$$[\vec{\nabla}\times\vec{V}]^i = \frac{\partial X^i}{\partial X'^l}\,[(\nabla\times V)^l]_{SLI}$$

Entonces se usa una manganetta similar para arribar a:

$$[\dots] = \underbrace{\frac{\partial X^i}{\partial X'^l}\frac{\partial X^r}{\partial X'^j}\frac{\partial X^s}{\partial X'^k}\epsilon^{l'j'k'}}_{\circledast}\partial_r V_s$$

$$= \det\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)\epsilon^{irs}\partial_r V_s$$

Como $\circledast$ es totalmente antisimétrico y proporcional a ϵ^{irs} con constante de proporcionalidad hallada con $irs=123$

OBS: Al meter 1,2,3 en $\circledast$ esto resulta igual a $\det\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)$

Quiero ver que sea $1/\det(g)$

$$g_{ij} = \frac{\partial X'^m}{\partial X^i}\frac{\partial X'^n}{\partial X^j}g_{m'n'}$$

$$\det(g_{ij}) = \left[\det\left(\frac{\partial X'}{\partial X}\right)\right]^2\det(g')$$

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\left|\det\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)\right|}\sqrt{g'}$$

, pero $\{X'^i\}$ son SLI $\Rightarrow g'=1$ y ya estamos

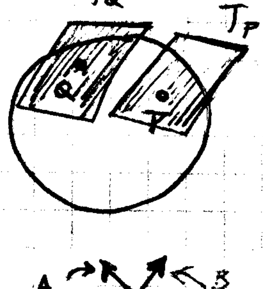
Hay un temita con el signo debido al carácter pseudovectorial del rotor.

Problema 6

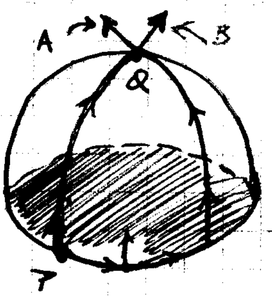
El transporte paralelo generaliza el transporte en un plano de un vector que se mantiene constante.

En $\mathbb{R}^2$ definimos a los vectores como transportables al origen para hacer algunos cálculos.

En el et 4D tengo en cada punto asociado un espacio vectorial, tengo un espacio tangente, pero es más delicado el transporte aquí.



En una esfera podemos pensar en dos caminos para un transporte paralelo.



Vemos que el transporte paralelo de un vector por dos caminos A,B depende del camino porque no se obtiene el mismo resultado.

Los símbolos de Christoffel son la conexión que permite el transporte.

La métrica de Schwarzchild es la de una fuente simétricamente esférica.

$$(ds)^2 = -\left(1-\frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2MG}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\cdot d\varphi^2\right)$$

Considerar una circunferencia dada por

$$\left.\begin{array}{l} t = cte = t_0 \\ r = r_0 \\ \theta = \pi/2 \end{array}\right\} \quad ds^2\Big|_{CURVA} = r_0^2\,d\varphi^2$$

, pero r_0 no es el radio de la circunferencia

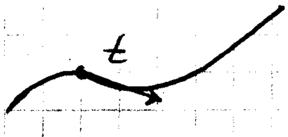
$$p \rightarrow \left(t_0, r_0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\right)$$

$V_r = \left(1-\frac{2MG}{r_0}\right)^{1/2}$ $\quad V_\varphi = \frac{1}{r_0}$

$V = V_r\, e^r$

$U = U_\varphi\, e^\varphi$

$\{e^\mu\} \to \{\partial_\mu\}$ $(\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)$



$\underset{\sim}{t} \to$ campo vectorial tangente a la curva

$$X^\mu = \left(t_0, r_0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \varphi(\lambda)\right)$$

$$\frac{dX^\mu}{d\lambda} = t^\mu$$

Tomando $\lambda = \varphi$, $\underset{\sim}{t} = 1\,\partial_\varphi$

V se transporta a lo largo de la curva en forma paralela si

$$\boxed{\nabla_{\underset{\sim}{t}} \underset{\sim}{V} = 0}$$

$$t^\mu \nabla_\mu V_\nu = t^\mu \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} t^\mu V_\rho$$

$$t^\rho = 1\,\delta^{\rho\phi}$$

$$t = \partial_\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial_\phi V_\mu - \Gamma^\nu_{\phi\mu} V_\nu = 0} \quad [1]$$

tiene que cumplirse [1] en todo punto a lo largo de la curva.
Quiero calcular:

$$\Gamma^\nu_{\phi\mu}\Big|_{CURVA}$$

• $\mu = t$

$$\Gamma^\nu_{\phi t} = \frac{g^{\nu\sigma}}{2}\left(\overbrace{\partial_\phi g_{\sigma t}}^{0} + \overbrace{\partial_t g_{\sigma\phi}}^{0} - \underbrace{\partial_\sigma g_{\phi t}}_{0}\right)$$

, pero $g_{tt} = -\left(1-\frac{2MG}{r}\right)$,

$$g_{rr} = \left(1-\frac{2MG}{r}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow \Gamma^\nu_{\phi t} = 0$ (no dependen de t, ϕ)

• $\mu = \theta$ $\quad \Gamma^\nu_{\phi\theta} = 0$, desde

$$\Gamma^\nu_{\phi\theta} = g^{\rho\phi} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

, pero sobre la curva $\theta = \pi/2$

• $\mu = r$ $\quad \Gamma^\phi_{\phi r}\Big|_{curva} = \frac{1}{r_0}$

$\Gamma^\nu_{\phi r} = 0$ (si $\nu \neq \varphi$)

• $\mu = \varphi$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r_0\left(1-\frac{2MG}{r_0}\right)$$

$\Gamma^\nu_{\phi\phi} = 0$ (si $\nu \neq r$)

Consideremos ahora que X^μ puede ser V, U ¿con lo cual:

$$\partial_\phi X_\mu - \Gamma^\nu_{\phi\mu} X_\nu = 0$$

$$V_r(\varphi=0) = \left(1-\frac{2MG}{r_0}\right)^{1/2}$$

$$U_\varphi(\varphi=0) = \frac{1}{r_0}$$

• $\mu = t$

$$\partial_\phi X_t - \Gamma^\nu_{\phi t} X_\nu = 0$$

$\partial_\phi X_t = 0$ $\quad V_t| = 0$

$U_t| = 0$

$V_t|_{curva} = U_{t\,curva}|$ = nulo

• $\mu = \theta$ $\quad \partial_\phi X_\theta = 0 \to V_\theta|_{curva} = U_\theta|_{curva} = 0$

• $\mu = r$ $\quad \frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \underbrace{\Gamma^\nu_{\phi r} X_\nu}_{\Gamma^r_{\phi r} X_r + \Gamma^\theta X_\theta} = 0$

6-10-08

(A) $\frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \frac{I}{r_0} X_\phi = 0$

$\searrow \Gamma^{\varphi}_{\phi r}$

• $\mu = \phi$

(B) $\frac{\partial X_\phi}{\partial \phi} + r_0\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right) X_r = 0$

$\frac{\partial}{\partial \phi}$ (B) $\Rightarrow$ $(r_0 - 2MG) X_r$

$(r_0 - 2MG)$

$$\frac{\partial^2 X_\phi}{\partial \phi^2} + r_0\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right)\frac{\partial X_r}{\partial \phi} = 0$$

$$X_\phi = A \cdot \cos\left(\sqrt{1 - \frac{2MG}{r_0}}\,\varphi + C\right)$$

$$X_r = \frac{A}{r\sqrt{1 - \frac{2MG}{r_0}}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1 - \frac{2MG}{r_0}}\,\varphi + C\right)$$

Usando las condiciones iniciales se tendrá:

$$V_r = \sqrt{1 - \frac{2MG}{r_0}}\cos\left(\sqrt{}\,\varphi\right)$$

$$V_\varphi = -r_0\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right)\mathrm{sen}\left(\sqrt{}\,\varphi\right)$$

$$V_t = V_\theta = 0$$

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\nu}{}_{\nu}$

$$U_r = \frac{1}{r_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{}\,\varphi\right)$$

$$U_\phi = \frac{1}{r_0} \cdot \cos\left(\sqrt{}\,\varphi\right)$$

$$U_t = U_\theta = 0$$

Se mantiene la ortogonalidad

$V \cdot U|_p = 0 \qquad V \cdot V|_p = V \cdot V|_Q$

$V \cdot U|_Q = 0 \qquad U \cdot U|_p = U \cdot U|_Q$

■ Teoría

• Algunos Comentarios Extras sobre el Tensor de curvatura R

Una de las propiedades importantes es que permite determinar si la variedad es plana.

A partir de las propiedades podemos ver que el # de componentes independientes era:

$$\boxed{\frac{1}{12} n^2(n^2 - 1)} \quad [1]$$

Habíamos visto que en un SLI podíamos

• $g_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu}$

• $g_{\mu\nu,\sigma}|_p = 0$

• $g_{\mu\nu,\rho\sigma}|_p = 0$ (NO TODAS CUMPLEN ESTO)

, y el número de derivadas 2^{das} que no se anulaban es [1]. Entonces el tensor de Riemann es el tensor más general que me puedo construir con ∂^2 de la métrica (con CL de ellas)

Aveces tiene interes, en GR, estudiar teorías 2D, 3D para aproximar el espacio-tiempo 4D (toy theory). Desde [1] resulta:

	$R_{\mu\nu\rho\sigma}$	
$n=2 \rightarrow$	1	DEFINIMOS EN TERMINOS DE R escalar de Richi
$n=3 \rightarrow$	6	$R_{\mu\nu}$ (6 comp. indeptes)
$n=4 \rightarrow$	20	

Si el $R_{\mu\nu} = 0$ entonces el $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ debe ser cero. Para $n=4$, el $R_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes y se queda chico para caracterizar.

En $n \geq 4$ se puede anular $R_{\mu\nu}$ y no $R_{\mu\nu\rho\sigma}$

la igualdad de Bianchi

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda}=0} \text{ cíclico}$$

permite demostrar que el tensor de Einstein cumple:

$$\boxed{\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)_{;\nu}=0}$$

, donde se define:

$$\boxed{G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}}$$

Se prueba explícitamente como:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda}+R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma}+R_{\mu\nu\sigma\lambda;\rho}=0$$

, queremos contraer índices, entonces metemos una matriz (inversa de la métrica):

$$\rightarrow g^{\mu\rho}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda}+R_{\mu\nu\lambda\rho;\sigma}+R_{\mu\nu\sigma\lambda;\rho}\right)=0$$

, pero $R_{\nu\sigma}=g^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y hay una derivada covariante pero la métrica puede entrar y salir de ahí:

$$R_{\nu\sigma;\lambda}=\left(g^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma}\right)_{;\lambda}$$

$$R_{\nu\sigma;\lambda}=g^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda}$$

entonces

$$R_{\nu\sigma;\lambda}-R_{\nu\lambda;\sigma}+R^{\mu}{}_{\nu\sigma\lambda;\mu}=0$$

y el $(-)$ se originó en que intercambié índices

$$\rightarrow g^{\nu\sigma}\left(R_{\nu\sigma;\lambda}-R_{\nu\lambda;\sigma}+R^{\mu}{}_{\nu\sigma\lambda;\mu}\right)=0$$

$$R_{;\lambda}-R^{\nu}{}_{\lambda;\nu}-R^{\mu}{}_{\lambda;\mu}=0$$

$$R_{;\lambda}-2R^{\nu}{}_{\lambda;\nu}=0$$

$$\left(Rg^{\nu}{}_{\lambda}-2R^{\nu}{}_{\lambda}\right)_{;\nu}=0$$

, donde usamos algunas propiedades como:

$$g^{\nu\sigma}g_{\sigma\lambda}=g^{\nu}{}_{\lambda}$$

$$g^{\nu\sigma}=\left(g^{-1}_{\sigma\lambda}\right)$$

y subo índices haciendo

$$g^{\lambda\mu}\left(Rg^{\nu}{}_{\lambda}-2R^{\nu}{}_{\lambda}\right)_{;\nu}=0$$

$$\boxed{\left(Rg^{\nu\mu}-2R^{\nu\mu}\right)_{;\nu}=0}$$

, multiplicando por (-2^{-1}) llegamos a la ecuación buscada.

$g_{\mu\nu;\lambda}=0$ Vale en todo Sistema

$g_{\mu\nu,\lambda}=0$ solo en SLI

- **Ecuaciones de Einstein (INTRO)**

Antes de meternos con esta necesitamos conocernos con el tensor de energía-impulso.

Partimos de Poisson en gravedad newtoniana

$$\boxed{\nabla^2\phi=4\pi G\rho}$$

, laplaciano del potencial es proporcional a la densidad de masa.

Las ecuaciones de Einstein generalizan esto y deberían recuperarlo como límite de campo débil.

En SR se tiene

$$\nabla^2 g_{00}=-8\pi G\rho=-8\pi G\,\underline{T_{00}},$$

$$g_{00}=-(1+2\phi)$$

$$\nabla^2 g_{00}=-2\nabla^2\phi$$

, podemos designar como T_{00} (la componente 00 de un dado tensor) y buscar ECUACIONES TENSORIALES. Un tensor relacionado con la métrica, igual a otro tensor relacionado con el contenido de materia y energía.

Tendrá que ser simétrico y cuadridivergencia nula

$$\boxed{S_{\mu\nu}=8\pi G\,T_{\mu\nu}}$$

Haciendo una reminiscencia a fluidos (los perfectos):

$$P,\rho \qquad P=P(\rho)$$

Metemos un tensor de impulso

$$\boxed{T_{ik} = p\,\delta_{ik} + \rho\, v_i v_k}$$

, y donde p (presión), ρ (densidad) v_i (componente $\vec{v}\cdot\hat{i}$). La interpretación es que

$T_{ik} \hat{=}$ flujo de impulso i en la dirección k

La dinámica del fluido nos la da la ecuación de Euler

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} p}$$

, o en términos del tensor

$$\partial_\mu(\rho v_i) = -\sum_{k=1}^{3} \partial_k T_{ik}$$

Esto lo queremos generalizar para el espacio tiempo 4D. Las componentes de $\vec{p}$ obviamente no son un tensor, aunque combinando con la energía sí lo son.

P^α es el cuadrimpulso

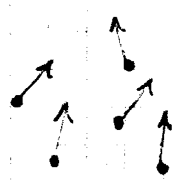
$P^\alpha = m_0 U^\alpha$

Definimos:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{cases} T^{\alpha i} \hat{=} \text{flujo de comp } \alpha \text{ de cuadrimpulso en dirección } 'i' \\ T^{\alpha 0} \hat{=} \text{densidad de } P^\alpha \end{cases} \quad (\alpha,\beta = 0,1,2,3)$$

Partículas puntuales

Comencemos considerando partículas, y definiremos un vector que será el flujo de partículas



$$N^\alpha(t,\vec{x}) = \sum_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))\frac{dX_N^\alpha}{dt}$$

considerando que:

$$X_N^\alpha = (t, \vec{X}_N(t))$$

y N^α es la densidad de partículas. Quiero definir un flujo de partículas

$$N^0(t,\vec{x}) = \sum \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))\frac{dX_N^0}{dt}$$

$$N^i(t,\vec{x}) = \sum_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))\frac{dX_N^i}{dt}$$

, entonces un flujo será algo como

FLUJO A TRAVÉS DE S $\propto \int_S \vec{N}\cdot d\vec{S}$

Deberíamos ver que N^α transforma como un cuadrivector. Esto se puede ver en el libro de WEINBERG. Reescribiremos N^α para que sea obvio que forman un cuadrivector

$$N^\alpha = \sum_N \int dt' \frac{dX_N^\alpha}{dt'} \underbrace{\delta^3(\vec{x}-\vec{X}_N(t))\,\delta(t - X_N^0(t'))}_{\delta^4(x^\alpha - x_N^\alpha(t))}$$

ahora parametrizo las trayectorias con τ

$$N^\alpha = \sum_N \int d\tau \frac{dX_N^\alpha}{d\tau}\delta^4(x^\alpha - x_N^\alpha(t))$$

$$N^\alpha(x) = \sum_N \int \underbrace{d\tau}_{\text{escalar}}\, \underbrace{U_N^\alpha(\tau)}_{\text{vector}}\, \underbrace{\delta^4(x^\alpha - x^\alpha(\tau))}_{\text{escalar}}$$

así escrito se ve que: N^α es un cuadrivector. Por supuesto la deducción para J^α sería idem. Esperaríamos que se cumpla algo como:

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0$$

La cuenta es más fácil en la expresión que no es explícitamente covariante. Arranquemos espacialmente con:

$$\sum_i^3 \partial_i N^i = \sum_i^3 \sum_N \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\delta(\vec{x}-\vec{x}_N(t))\right]}_{-\frac{\partial}{\partial x_N^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))}\frac{dX_N^i}{dt}$$

$$= -\sum_N \frac{d}{dt}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N[t]) = -\partial_0 N^0 \Rightarrow$$

$$\partial_0 N^0 + \partial_i N^i = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial_\alpha N^\alpha = 0}$$

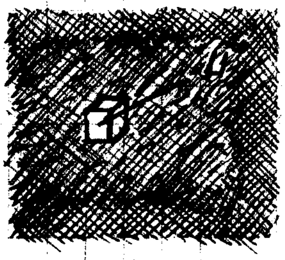
Entonces N^α tiene cuadridivergencia nula. Eso significa que hay una cantidad que se conserva.

$\partial_\alpha N^\alpha = 0 \Rightarrow$

$$\int d^3x\, N^0(t,\vec{x}) = cte$$

$$\boxed{\int d^3_x\, N^0(t,\vec{x}) = N_{total}}$$

Ahora pasemos a un fluido, en lugar de considerar partículas puntuales. Consideremos un sistema donde el elemento de volumen se halla en reposo. Defino:



$n \equiv$ DENSIDAD de PARTÍCULAS

$$N^\alpha_{REPOSO} = n\, U^\alpha_{REPOSO} \text{, con}$$

$$U^\alpha_{REPOSO} = (1,0,0,0)$$

En un sistema cualesquiera:

$$N^\alpha = nU^\alpha = \frac{n\,(1,\vec{v}(\vec{x},t))}{\sqrt{1-v^2(\vec{x},t)}}$$

$$N^\alpha(\vec{x},t) = \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\vec{v}\cdot n}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

En una situación donde no hay fuentes ni sumideros

$$\boxed{\partial_\alpha N^\alpha = 0}$$

$$N_T = \int d^3x\, \frac{n(\vec{x},t)}{[1-v^2(\vec{x},t)]^{1/2}} = cte$$

Generalicemos algo esto ahora con el

● Tensor de Energía Impulso

Sigo considerando un sistema de partículas puntuales

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \sum_N P_N^\alpha \frac{dX_N^\beta}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))$$

, para $T^{\alpha 0}$ es la densidad de impulso P_N^α

$$T^{\alpha 0} = \sum_N P_N^\alpha \overbrace{\frac{dX_N^0}{dt}}^{=1}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))$$

, para $T^{\alpha i}$ es el flujo de P^α en dirección $\hat{i}$

$$T^{\alpha i} = \sum_N P_N^\alpha \frac{dX_N^i}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{X}_N(t))$$

Metemos una variable dummy para que se lea explícitamente covariante.

ESTOS NO ESTÁN SUMADOS

$$= \sum_N \int dt'\, P_N^\alpha(t')\, \frac{dX_N^\beta}{dt'}(t')\, \delta^4(x^\alpha - x_N^\alpha[t])$$

$$= \sum_N \int d\tau\, P_N^\alpha(\tau)\, U_N^\beta(t)\, \delta^4(x^\alpha - x_N^\alpha(t))$$

, luego:

$$\boxed{T^{\alpha\beta}(x) = \sum_N m_N \int d\tau\, U_N^\alpha(\tau)\, U_N^\beta(\tau) \times \delta^4[X - X_N(\tau)]}$$

y claramente es un tensor porque son productos de cosas que transforman como vectores, escalares, etc. Sin embargo resulta ser que:

$$\boxed{\partial_\beta T^{\alpha\beta} \neq 0}$$

, porque tenemos un término en el impulso ahora, entonces:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \sum_N \frac{dP_N^\alpha}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))$$

vemos que si el impulso no se conserva (por un campo externo, etc) no será nula la $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$. Será nula sin campos externos y cuando las interacciones son por choques localizados [lo que gana una partícula lo pierde la otra]

Hay contracción de Longitudes

$N^0 = \gamma n^0$ → EN REPOSO

■ Práctica

Convenciones de signos

Según Misner, Wheeler, Thorne una convención se da con tres signos

S1 S2 S3

■ S1: signatura de la métrica

$$\eta^{\mu\nu} = [S1] \times \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

■ S2: tensor de curvatura

$$R^\nu{}_{\alpha\beta\gamma} = [S2]\left(\Gamma^\mu_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma}\right.$$

$$+\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\alpha}\Big)$$

■ S3: Ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu}=[S3]\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Por otro lado

$$R_{\mu\nu}=[S2][S3]R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

En este esquema:

GRAVITATION	(+ + +)
Hartle	(+ + +)
Weinberg	(+ − −)
Wald	(+ + +)
T'Hoft	(+ + −)
Carroll	(+ + −)

● Problema 10

1 ● $R_{\lambda\mu\nu\rho}=R_{\nu\rho\lambda\mu}$

2 ● $R_{\lambda\mu\nu\rho}=-R_{\mu\lambda\nu\rho}$

3 ● $R_{\lambda[\mu\nu\rho]}=0$

$$\frac{1}{3!}\Big(R_{\lambda\mu\nu\rho}-R_{\lambda\mu\rho\nu}-R_{\lambda\nu\mu\rho}+R_{\lambda\nu\rho\mu}+R_{\lambda\rho\mu\nu}+R_{\lambda\rho\nu\mu}\Big)$$

USANDO LAS 2 PROP.

$$\frac{2}{3!}\Big(R_{\lambda\mu\nu\rho}+R_{\lambda\nu\rho\mu}+R_{\lambda\rho\mu\nu}\Big)$$

$\Rightarrow$ equivale a

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu\rho}+R_{\lambda\rho\mu\nu}+R_{\lambda\nu\rho\mu}=0}$$

Queremos ver cuáles son sus componentes independientes en "n" dimensiones de la variedad.

Podemos escribir:

$$R_{AB}=R_{BA}$$

, donde agrupo:

$$\underbrace{A=(\lambda\mu)}_{N}\ \wedge\ \underbrace{B=(\nu\rho)}_{N}$$

entonces la cantidad de componentes independientes serían los de una matriz simétrica en N dimensiones

$$N\frac{(N+1)}{2}$$

Si sólo se cumple 1. sería $N=n^2$. Pero sabemos que cambiando

$$(\lambda\mu)\longrightarrow(\mu\lambda)$$

lleva a un cambio de signo

$$R_{\lambda\mu B}=-R_{\mu\lambda B}$$

$$N=\frac{n(n-1)}{2}$$

porque es el # de componentes de una matriz de $n\times n$. Hasta ahora con 1 y 2 es

$$\frac{N(N+1)}{2}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2}$$

Si imponemos la propiedad 3 vemos que está relacionada. Si $\mu=\nu$ es nulo ó $\mu=\rho$, etc. ésto no da constraint sobre el R. Sólo tendré alguna condición que aporte cuando:

$$\mu\neq\nu\neq\rho$$

Si $\lambda=\mu$

$$\underbrace{R_{\mu\mu\nu\rho}}_{\substack{=0\\(\text{por }2.)}}+\underbrace{R_{\mu\rho\mu\nu}+R_{\mu\nu\rho\mu}}_{\substack{=0\\(\text{Usando las prop. }1,2.)}}=0$$

, donde el último transforme:

$$R_{\mu\nu\rho\mu}\overset{1.}{\rightarrow}R_{\rho\mu\mu\nu}\overset{2.}{\rightarrow}-R_{\mu\rho\mu\nu}$$

Otra vez veo que no tengo información extra.

Tendremos una condición solo si

$$\lambda\neq\mu\neq\nu\neq\rho$$

, una cosa del tipo

$$\Delta_{\lambda\mu\nu\rho}=0$$

dará como cada índice toma n valores

$$\binom{n}{4}=\frac{n!}{(n-4)!4!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Entonces el # de componentes independientes será:

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2} - \binom{n}{4}$$

, amasando

$$\boxed{\# = \frac{n^2(n^2-1)}{2}}$$

Con un número de dimensiones

$n=1 \longrightarrow 0$ componentes indeptes.
$n=2 \longrightarrow 1$ componentes indeptes.
$n=3 \longrightarrow 6$ componentes indeptes.
$n=4 \longrightarrow 20$ componentes indeptes.

, en $n=1$ no hay noción de curvatura. En 1D un círculo no es curvo, es curvo en 2D si lo veo como figura 2D (en una dimensión mayor).
En 2D el escalar de Ricci me basta para conocer el tensor de Riemann.
En 3D con $R_{\mu\nu}$ (6 componentes) ya lo determina.

- Problema 9
Observaciones

2-esfera $= S^2 \rightarrow$

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\varphi^2)$$

, las componentes $\neq 0$ de los símbolos:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta . \text{sen}\,\theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cot\theta$$

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma,\beta} - \ldots$$

, por argumentos de simetría la componente independiente es

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi,\theta} - \underbrace{\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta,\varphi}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta}}_{=0}\Gamma^{\sigma}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\sigma\varphi}\Gamma^{\sigma}_{\theta\varphi}$$

$$= \partial_\theta(-\cos\theta . \text{sen}\,\theta) - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} \cdot \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}$$

$$= \text{sen}^2\theta$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$$

$$R_{\theta\theta} = R^{\lambda}{}_{\theta\lambda\theta} = R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta}$$

$$R_{\theta\theta} = g^{\varphi\varphi} R_{\theta\varphi\theta\varphi} = g^{\varphi\varphi} g_{\theta\theta} R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}$$

$$R_{\theta\theta} = 1$$

$$R_{\varphi\theta} = R^{\lambda}{}_{\varphi\lambda\theta} = 0$$

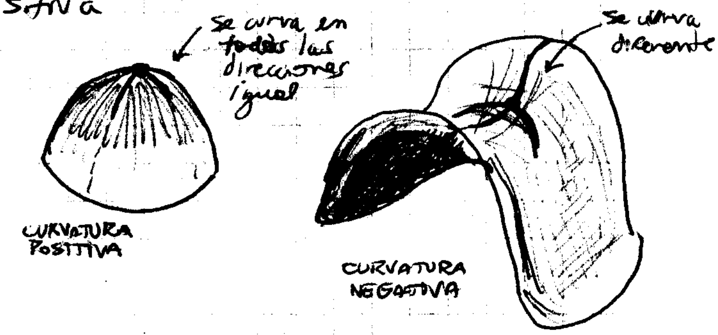
$$R_{\varphi\varphi} = R^{\lambda}{}_{\varphi\lambda\varphi} = R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \text{sen}^2\theta$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta}$$

$$\boxed{R = 2/a^2}$$

, el escalar de Ricci tiene signo definido y nos lleva a curvatura positiva

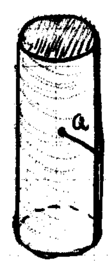


En 2D se puede escribir

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{2}\left(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right)$$

Para un cilindro

$$dl^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2$$



Como el tensor depende de derivadas de la métrica → en una métrica constante es NO CURVO

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$
con $g_{\mu\nu} = cte$

8-10-08

Teoría

● overview clase anterior

$$\boxed{N^{\alpha}(\vec{x},t) = \sum_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))\,\frac{dx^{\alpha}_N}{dt}}$$

N^{α} cuadrivector, $\partial_{\alpha}N^{\alpha} = 0 \Rightarrow$

se tenía:

$$N_T = \int d^3x\, N^0(\vec{x},t) = cte$$

, y para un fluido (caso continuo):

$$N^{\alpha} = n\,U^{\alpha} \therefore \underset{\sim}{N} = n\,\underset{\sim}{U}$$

$$N_T = \int d^3x\, \frac{n(\vec{x},t)}{\sqrt{1-v^2[\vec{x},t]}} = cte$$

; además tenemos el cuadriimpulso

$$\boxed{T^{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \sum P^{\alpha}_N(t)\,\frac{dx^{\beta}_N}{dt}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N(t))}$$

un tensor simétrico, donde:

$T^{\alpha 0} \doteq$ densidad de P^{α}

$T^{\alpha i} \doteq$ flujo de P^{α} con la dirección $\hat{i}$

Hagamos explícitamente:

$$\partial_{\alpha}T^{\alpha\beta}, \rightarrow \sum_{i=1}^{3}\partial_i T^{\alpha i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_N P^{\alpha}_N(t)\,\frac{dx^i_N}{dt}\,\underbrace{\partial_i\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_N(t)]}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^i_N}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N)$$

, y multiplicando por la otra derivada y teniendo en cuenta que está todo sumado resulta:

$$= -\sum_N P^{\alpha}_N(t)\,\frac{d}{dt}\left(\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_N]\right) \Rightarrow$$

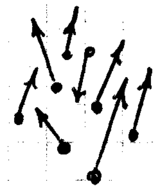
$$\frac{d}{dt}\left(\quad\right) - \sum_N \frac{dP^{\alpha}_N}{dt}\,\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_N]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3}\partial_i T^{\alpha i} = -\partial_0 T^{\alpha 0} + \sum_N \frac{dP^{\alpha}_N}{dt}\,\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_N(t)]\,\ddagger$$

, luego pasando de miembros:

$$\boxed{\partial_{\beta}T^{\alpha\beta} = G^{\alpha}} \leftarrow \text{densidad de fuerza}$$

Queremos indagar cuando se conserva esta cosa; necesitaremos



i ● $\nexists$ fuerzas externas

ii ● Interacción Local (por colisiones)

Si cumplimos estos ítems se da:

$$\boxed{\partial_{\beta}T^{\alpha\beta} = 0}$$

la interacción local hará que se conecte la suma de intercambios de momentos en colisiones.

En un sistema de partículas cargado se vale i, pero NO ii. En este caso

$$\partial_{\beta}T^{\alpha\beta} = F^{\alpha}{}_{\beta}J^{\beta}$$

, diríamos que lo que se conserva es el impulso de las partículas + el impulso del campo

$$\boxed{\partial_{\beta}T^{\alpha\beta}_{TOT} = \partial_{\beta}\left(T^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{EM}\right) = 0}$$

Una vez que tengo la ley de conservación diremos que tenemos 4 leyes de conservación asociadas a

$$\boxed{P^{\alpha}_{total} = \int d^3x\, T^{\alpha 0}(\vec{x},t) = cte}$$

● COMENTARIO

Si el sistema es NO-Relativista la componente '00' es mucho mayor que las otras. Escribimos:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_N \frac{P^{\alpha}_N P^{\beta}_N}{E_N}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N[t])$$

‡ Una especie de densidad de fuerza

$P(t)$

$X(t)$

nes tipo:

CURVATURA DEL E-T	=	DISTRIBUCIÓN de MAT. Y ENERGÍA

, donde para campo débil e independiente del tiempo debería- mos llegar a:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho}$$

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G \rho$$

con: $g_{00} = -(1+2\phi)$, y para partículas no relativistas:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}$$

Estas ecuaciones de Einstein no se deducen sino que se llega a ellas por inferencia

Necesito que las ecuaciones cumplan

1. Ecuaciones tensoriales, suponiendo que:

$$S_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad [2]$$

2. tiene a lo sumo derivadas segundas de la métrica

3. En campo débil,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1, \cancel{h_{\mu\nu}(t,\vec{x})}$$

De [2] extraemos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}$$

Sería razonable pensar que $S_{\mu\nu}$ se construye a través de la métrica.

De

2. $S_{\mu\nu} \propto R_{\mu\nu\rho\sigma}, g^{\rho\sigma}$

3. $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$, como

$\nabla_\nu (T^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow$

$$S_{\mu\nu} = A R_{\mu\nu} + B R g_{\mu\nu}$$

$$+ C g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Como $\nabla_\nu S^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ LLEGA A:

$$A \nabla_\nu R^{\mu\nu} + B g^{\mu\nu} \nabla_\nu R = 0$$

Usando la identidad de Bianchi llegamos a:

$$B = -\frac{A}{2}$$

pues $\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0$

Aplicando estrictamente la 3

$$C = 0 \text{ y } A = 1$$

, y finalmente:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}$$

Pero vayamos al cálculo:

$$A\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right] + C g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

, y necesito ver cuanto valen 'C, A'. Compararé con la ecuación de campo débil estático y la del fluido relativista. Entonces

$$C = 0$$

Luego, para el fluido ligeramente relativista:

- $T^{\mu\nu} = (p+\rho) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}$
- $U^\mu \approx (1,0,0,0)$
- $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}$
- $p \ll \rho$

$$\boxed{T^{\mu\nu} \approx \rho \delta^\mu_0 \delta^\nu_0}$$

$$A\left\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right\} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

, multiplico a ambos lados por $g^{\mu\nu}$

$$A\left\{R - \frac{1}{2}R\,4\right\} = 8\pi G\,T$$

, donde traza $(gT) = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$
$$= -T^{00} = -\rho$$

$$\boxed{-AR \cong -8\pi G\rho}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{A}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right]$$

, y $T \equiv$ traza $(\overleftrightarrow{T}\,\overleftrightarrow{g})$

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{A}\left[\rho - \frac{1}{2}(-1)(-\rho)\right]^{\ddagger} \Rightarrow$$

$$\boxed{R_{00} = \frac{4\pi G}{A}\rho}$$

Ahora deberíamos calcular el R_{00} en campo débil.

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

El $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ tenía un montón de términos; necesito quedarme con los que tengan h a orden '1'; sólo quedarán los términos con derivadas en h, y tiro los de las derivadas segundas. Entonces:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[h_{\nu\rho,\mu\sigma} + h_{\mu\sigma,\nu\rho} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}\right] + \mathcal{O}(h^2) \qquad [2]$$

$$R_{00} = \underset{\downarrow \text{lineal}}{g^{\mu\rho}}R_{\mu 0\rho 0} \approx$$
$$R_{00} = \eta^{\mu\rho}R_{\mu 0\rho 0} \qquad [3]$$

Cuando los índices son iguales como en [3] da nulo, puedo poner índices espaciales

$$\eta^{\mu\rho}R_{\mu 0\rho 0} = \delta^{ij}R_{i0j0}$$

, entonces reemplazo en [2]

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2}\left[h_{0j,i0} + h_{i0,0j} - h_{ij,00} - h_{00,ij}\right]$$

entonces con métrica que no depende del tiempo se tiene:

$$R_{i0j0} \approx -\frac{1}{2}h_{00,ij} =$$
$$= -\frac{1}{2}g_{00,ij} \Rightarrow$$
$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}g_{00,ij} \Rightarrow$$
$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$$

Comparando

$$\boxed{\nabla^2 g_{00} = -8\pi G\,T_{00}}$$

con:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{4\pi G}{A}T_{00}$$

con lo cual $\boxed{A = 1}$

Luego:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} = 8\pi G\,T_{\mu\nu}}$$

- Sobre la constante cosmológica

En general:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\,T_{\mu\nu}}$$

, pero Einstein en 1915 supuso que $\Lambda = 0$. En 1917 buscando soluciones cosmológicas metió $\Lambda \neq 0$ para tener soluciones estáticas, isótropas, homogéneas.

Con $\Lambda = 0$ tenemos Universo

$\ddagger$ $T^{00} \neq T_{00}$

en expansión.
Pero en 1922 Friedman, usó $\Lambda=0$, y en 1935 Robertson-Walker demuestran que son las únicas viables. Friedman entonces proclama un universo en expansión, mientras a Einstein le parecía estático.
Una $\Lambda=0$ da expansión desacelerada, pero en 1998 aparentemente se observó que el universo se expande aceleradamente (habría que meter una $\Lambda \approx 0$ pero NO NULA).

■ Práctica
● Geodésicas.
Se obtiene a partir de un principio variacional

$$S = \int_{TT}^{TE} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda$$

, donde la parametrización λ es cualquiera‡.
Si elegimos tal que

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu} = cte.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0}$$

, luego $\lambda \doteq$ parámetro afín. Asimismo $\tilde{\lambda} = 2e\lambda + b$

también es un parámetro afín.
Una forma alternativa de escribir esto es con:

$$t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

$$\nabla_{\underset{\sim}{t}} \underset{\sim}{t} = 0 \Rightarrow$$

$$t^\mu \nabla_\mu t^\rho = 0$$

la geodésica transporta paralelamente su vector tangente.

‡ invariante ante cualquier reparametrización

la condición de parámetro afín puede escribirse

$$[1] \quad \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{t} = cte. \Rightarrow$$

$$t^\mu t^\nu g_{\mu\nu} = cte$$

Del ejercicio 5 guía anterior sabemos que [1] es una constante a lo largo de toda la curva.

$$\boxed{\epsilon \equiv t \cdot t = \begin{cases} 1 & \text{espacial} \\ -1 & \text{temporal} \\ 0 & \text{nulo} \end{cases}}$$

$$\nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Usando $\lambda = \tau \rightarrow$ (temporal) $\epsilon = 1$

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Alternativamente podemos usar otra acción

$$\boxed{\tilde{S} = \int \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right) d\lambda}$$

, pero ahora esta $\tilde{S}$ NO ES INVARIANTE ante cualquier reparametrización de la curva.
Por ello λ no puede ser cualquier cosa.

● Problema 5

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

, y los símbolos se calculan como:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{g^{\mu\cdot}}{2} (\partial_\nu \ldots)$$

, pero aquí tenemos un ansatz

$$\tilde{g} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} =$$

$$= -e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + e^{2\Lambda}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2$$

Usamos las ecuaciones de E-L

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

* $\mu=0$ 'coordenada t'

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)}\right)=\frac{d}{d\lambda}\left(2\frac{dt}{d\lambda}e^{2\phi}\right)$$

$$=2\frac{d^2t}{d\lambda^2}e^{2\phi}+4\frac{dt}{d\lambda}e^{2\phi}\cdot\frac{d\phi}{dr}\cdot\frac{dr}{d\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}=0$$

Resulta entonces:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}+2\frac{dt}{d\lambda}\cdot\frac{dr}{d\lambda}\cdot\frac{d\phi}{dr}=0$$

y de acá saldrían los símbolos de Cristoffel.

$$\Gamma^t_{\theta\theta}=0 \qquad \Gamma^t_{rt}=\Gamma^t_{tr}=\frac{d\phi}{dr}$$

* $\mu=r$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)}\right)=\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2\left[-2\frac{d\phi}{dr}e^{2\phi}\right]$$

$$+e^{2\Lambda}2\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\frac{d\Lambda}{dr}+$$

$$2r\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+2r\,\mathrm{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(2\frac{dr}{d\lambda}e^{2\Lambda}\right)=2e^{2\Lambda}\frac{d^2r}{d\lambda^2}$$

$$+4\frac{d\Lambda}{dr}e^{2\Lambda}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2r}{d\lambda^2}+e^{-2(\Lambda-\phi)}\frac{d\phi}{dr}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2-re^{-2\Lambda}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2-r\,\mathrm{sen}^2\theta\, e^{-2\Lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+\frac{d\Lambda}{dr}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}$$

y leer los coeficientes es un juego de niños

$$\Gamma^r_{tt}=e^{-2(\Lambda-\phi)}\frac{d\phi}{dr}$$

$$\Gamma^r_{rr}=\frac{d\Lambda}{dr}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=-e^{-2\Lambda}r$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r\,e^{-2\Lambda}\mathrm{sen}^2\theta$$

Deberíamos poder obtener que:

* $\mu=\theta$

$$\Gamma^\theta_{r\theta}=\frac{1}{r}$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\mathrm{sen}\,\theta\cdot\cos\theta$$

* $\mu=\varphi$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r}=\frac{1}{r} \qquad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

Para Schwarzchild corresponde el reemplazo:

$$e^{2\phi}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

$$e^{2\Lambda}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

Si la métrica hubiese sido diagonal ~~todo~~ sería más fácil.

Ahora quería hallar los vectores de Killing, para Schwarzchild

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2$$

$$+r^2\left(d\theta^2+\mathrm{sen}^2\theta\cdot d\varphi^2\right)$$

$\varphi \to$ CÍCLICA — Asociado a una conserv. de L

$t \to$ CÍCLICA — " " " energía

llamo $L\doteq\partial_\varphi$

$K\doteq\partial_t$

$L \cdot t = cte.$

t: tangente a la geodésica

$$\boxed{L_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda} = \text{constante}}$$

se conserva a lo largo de la curva. Las cantidades conservadas en este caso particular se hallan

$L = \partial_\varphi$, $L^\mu \partial_\mu$

$$\ell = \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{t} = L_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda}$$

$$L_\mu = \begin{pmatrix} t & r & \theta & \varphi \\ , & , & , & 1 \end{pmatrix} \text{ en base } \{\partial_\mu\}$$

$$L_\mu = g_{\mu\nu} L^\nu = g_{\mu\varphi} L^\varphi$$

$$\Rightarrow \quad L_\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Kepler le llamaría velocidad areolar

$$\boxed{\ell = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\varphi}{d\lambda}}$$

Para la energía resultará:

$$K^t = 1$$

$$K_t = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)$$

$$K \cdot t = -E = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

15/10/08

Teoría

Raconto GR

La interacción gravitatoria está enhebrada en la geometría del espacio-tiempo. Las ecuaciones que la describen son:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}}$$

No es exactamente lo mismo estar en el SLI que no tener gravedad. Coinciden a 1er orden.

aunque esta no es la única alternativa. La física en los espacios curvos lleva a pedir ecuaciones covariantes Lorentz y respetando un "Principio de equivalencia":

En el SLI las leyes son las mismas que en ausencia de gravedad.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\bullet \quad \boxed{F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = -J^\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Leftrightarrow$$

$$\bullet \quad \boxed{F_{\underbrace{\mu\nu,\lambda}} = 0}$$

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0$$

Tomando como válidas en el SLI sin gravedad (las $\bullet$), queremos ver como resultan con la gravedad.

Para ello tienen que seguir siendo válidas en el SLI, y una forma de generalizar a cualquier sistema de referencia pero que en el SLI se reduzcan a estas. La forma más fácil es intercambiar ∂_μ con ∇_μ; esto lleva a:

$$\bullet \quad \boxed{F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -J^\nu}$$

$$\bullet \quad \boxed{F_{\underbrace{\mu\nu;\lambda}} = 0}$$

Pero, ¿es ésta la única posibilidad?

Solución de las Ecuaciones de Einstein

El problema de Cauchy. Presenta 10 ecuaciones independientes:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}}$$

Dados

$$g_{\mu\nu}(x^0, \vec{x})\Big|_{x^0} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x^0} g_{\mu\nu}(x^0, \vec{x})\Big|_{x^0}$$

¿se puede determinar unívocamente la métrica para cualquier instante posterior?

Hagamos una analogía con el EM. Si tengo las ecuaciones de Maxwell; es cierto que dados

$$A^\mu(x^0, \vec{x})\Big|_{x^0} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x^0}\left(A^\mu(x^0, \vec{x})\right)\Big|_{x^0} \Rightarrow$$

tendré $A^\mu(x^0,\vec{x})$ unívocamente:

$$\boxed{F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = -J^\nu}$$ 4 ECUACIONES

, pero las ecuaciones no son independientes

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = 0$$

lleva a la conservación de la carga

$$-J^\nu{}_{,\nu} = 0 \ldots\ldots$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO SE PUEDE DETERMINAR UNÍVOCAMENTE EL } A^\mu}$

A^μ solución $\Rightarrow$ $A^\mu + \partial^\mu f$ tmb ES SOL.

Tampoco pueden darse condiciones arbitrarias de A^μ

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = -J^\nu \underset{\nu=0}{\Longrightarrow} J^0 = \rho_{\text{CARGA ELÉCTRICA}}$$

$$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\left[\vec{\nabla}A^0 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^0}\right]$$

, y la ecuación sólo tiene derivadas primeras temporales. Esto significa que

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{NO PUEDO DARLE VALORES ARBITRARIOS A } A^\mu{}_{,0} \text{ INICIAL}}$

Los que permitirían serían aquellos que fuesen $\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^{0\,2}}$

- Fijar el gauge; como por ejemplo $\partial_\mu A^\mu = 0$
- Dar condiciones iniciales compatibles con el vínculo
- Resolver las ecuaciones con $\nu = 1, 2, 3$

En relatividad general el problema es similar. Primeramente el tensor de Einstein satisface

$$\boxed{G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0}$$

, donde $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu}$

Entonces de las 10 ecuaciones, son 6 independientes. Al tomar la derivada.

<u>Las ecuaciones de Einstein NO DETERMINAN unívocamente la métrica</u> (tengo sólo 6 independientes).

Esto está bien porque aún tenemos la libertad de hacer cambios de coordenadas.

Si en algún S hallo que solución de las EE puedo hallar una que funcionalmente diferente con un cambio de coordenadas que también es solución de las EE.

Deberíamos fijar el sistema de coordenadas*. Una manera de hacerlo es

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0}$$ Fijando el sistema de coordenadas

la cual no es un tensor (y esa es la gracia). Es equivalente a: [Un gauge]

$$\boxed{\partial_\nu\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0}$$

, que son las coordenadas armónicas ó el GAUGE de LORENTZ.

Asimismo las EE tienen vínculos, no tienen alguna derivada segunda. Esto puede salir de

$$\boxed{G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0}$$

$$G^{\mu 0}{}_{,0} + G^{\mu i}{}_{,i} + \Gamma^\mu_{\nu 0} G^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\nu 0} G^{\mu 0}$$

, pero $G^{\mu 0}{}_{,0} = -G^{\mu i}{}_{,i} - \Gamma G - \Gamma G$

donde toda esta expresión tiene a lo sumo derivadas segundas de la métrica (temporales).

$\Rightarrow$ $\boxed{G^{\mu 0} \text{ tiene derivadas } 1^{\text{eras}} \text{ temporales de la métrica}}$

Esto implica que;

$$\boxed{R^{\mu 0} - \frac{1}{2}R g^{\mu 0} + \Lambda g^{\mu 0} = 8\pi G T^{\mu 0}}$$

son vínculos. Cumplen el mismo papel que la ley de Gauss en el EM.

* si fuese un tensor justamente no fija las coordenadas.

Asimismo:

$$\boxed{R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} + \Lambda g^{ij} = 8\pi G T^{ij}}$$

son las ecuaciones dinámicas.

Haciendo un cuadrito sinóptico necesitamos

1• Fijar el sistema de coordenadas (según la simetría del problema)

2• Dar CI compatibles con los vínculos en un dado x^0

3• Obtengo $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{0\,2}}$ a partir de las ecuaciones dinámicas

4• $g_{\mu\nu}$ y $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$ en $x^0 + \Delta x^0$

• GR en 'n' dimensiones

Con $n=2$ no tenemos GR porque el tensor de Riemann tiene una única componente independiente

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} R \left[g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \right]$$

$$R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2} R g_{\mu\kappa} \rightarrow G_{\mu\kappa} = 0$$

Con $n=3$ el # de componentes independientes del $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ = # de comp. indeptes. del tensor de Ricci → todo el tensor de Riemann se puede escribir en términos del tensor de Ricci

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \left[g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu} \right] - \frac{R}{2} \left(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} \right)}$$

A consecuencia de esto

$$\boxed{\text{Si } R_{\mu\kappa} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu\rho\lambda} = 0}$$

, donde se anula el tensor de Ricci se anula el tensor de Riemann. Donde no hay materia (y se anula el tensor de energía impulso y la constante cosmológica) no hay curvatura. La curvatura está donde hay materia.

Con $n \geq 4$ $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ no puede escribirse en términos de $R_{\mu\nu}$. El # de componentes indeptes de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ mayor al de $R_{\mu\nu}$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{n-2} \left[g_{\lambda\nu} R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} R_{\lambda\nu} \right] - \frac{R}{(n-1)(n-2)} \left(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} \right) + C_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

, donde $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ es el tensor de Weyl ó tensor conforme.

• Principio Variacional (Hilbert-1915)

Las EE se pueden obtener desde un principio variacional. Comenzamos planteando una acción

$$S = S_{GRAV} + S_{MATERIA} \ddagger$$

, como alternativos

$$S^{EM}_{MAT} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Hilbert dice que el integrando [redacted] tiene que ser un escalar para que la acción sea un tensor

$$\boxed{S_{\mu\nu} = k \int d^4x \sqrt{g} \times R}$$

, donde el escalar de Ricci, R, es la elección natural.

‡ Pero tmb. podríamos poner una cosa "que dé campos EM" como fuente de materia

$$\boxed{S_{\text{Einstein Hilbert}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{g}\, R}$$

La variación de esta acción dará las ecuaciones de E-L, que resultarán ser las de Einstein.

Esto nos lleva a modificaciones a GR, teorías alternativas a la GR. Numerándolas:

A Teorías con derivadas de orden superior:

$$S_{GRAV} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{g} R \; + \int d^4x \sqrt{g}\left[\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \dots\right]$$

, las ecuaciones de Einstein que resultan de un $\mathcal{L}$ así serán algo como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \alpha H^{(1)}_{\mu\nu} + \beta H^{(2)}_{\mu\nu} + \gamma H^{(3)}_{\mu\nu} = 8\pi G \cdot T_{\mu\nu}$$

Uno mete cotas para los parámetros α, β, γ y viendo si se puede ajustar a la realidad este esquema.

B Teoría de Lovelock [1971]: es una generalización de GR con $n \geq 4$

$$S_{GRAV} = \int d^nx \sqrt{g} \sum_{j=0}^{t} \alpha_j R^j$$

$$R^j = \frac{1}{2^j n!}\,\delta^{\mu_1}_{\alpha_1}\delta^{\mu_2}_{\alpha_2}\cdots\delta^{\mu_j}_{\alpha_j} \times \prod_{r=1}^{j} R^{\alpha_r\beta_r}{}_{\mu_r\nu_r}$$

simetrizados

$$t = \begin{cases} n/2 & n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Esto luce aproximadamente como:

$$S_{grav} = \int d^nx \sqrt{g}\left[\alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \times (R^2 + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) + \dots\right]$$

, pero tiene derivadas segundas de la métrica que aparecen al cuadrado.*
En 4D todo el choclo es una derivada total y no contribuye a las ecuaciones de movimiento.

- Predicciones de estas teorías

Con una teoría en la que

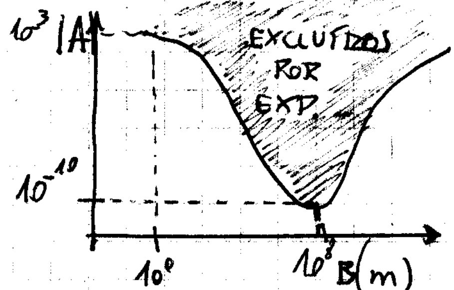
$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

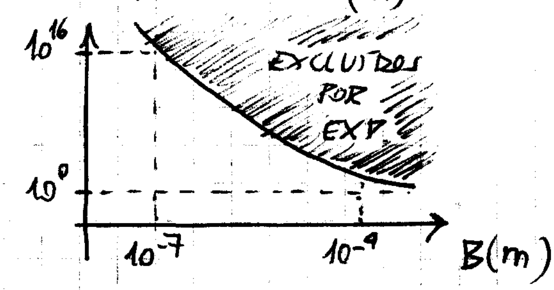
podemos ver el límite de campo débil. La predicción para el potencial newtoniano es

$$\boxed{V_{Newton} = -\frac{G m_1 m_2}{r}\left(1 + A \cdot e^{-r/B}\right)}$$

, con $A, B = f(\alpha, \beta, \gamma)$

Para investigar esto, se hacen gráficos donde los parámetros deben ocupar una dada región





Con la constante cosmológica sucede algo similar. Sabemos que:

$$EE \xrightarrow[\text{WEAK FIELD}]{} \nabla^2 g_{00} = -8\pi G\rho$$

, con lo cual Λ debería ser nula. Pero también podríamos considerar $\Lambda \approx 0$ aunque $\Lambda \neq 0$. Resulta:

* En las ecuaciones de Einstein aparecen sólo linealmente

$$\nabla^2 g_{00} + 2\Lambda g_{00} = -8\pi G \rho$$

Esta ecuación puede resolverse con $g_{00} = g_{00}(r) \Rightarrow$

- $\Lambda = 0 \Rightarrow g_{00} \propto \frac{1}{r}$
- $\Lambda \neq 0 \Rightarrow g_{00}(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\ell}$

donde $2\Lambda = \frac{1}{\ell^2}$

Así el valor de esta constante sería:

$$\Lambda \approx 10^{-46}\, km^{-2} \Rightarrow$$
$$\ell \sim 10^{23}\, km$$

> Las correciones serán relevantes con un $r \sim \ell = 10^{23}$ km (mayor que la galaxia).
> La moraleja es que PUEDE HABER UNA CONSTANTE COSMOLÓGICA CHICA QUE NO AFECTA LA GRAVEDAD en el sistema solar pero SÍ A NIVEL GALÁCTICO.

■ Práctico

● Problema 6

$$ds^2 = -[1-\Omega^2(x^2+y^2)]\,dt^2 + 2\Omega(y\,dx - x\,dy)\,dt + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Hacemos un paso a cilíndricas:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x = r\cos\theta$, $\; y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta$$

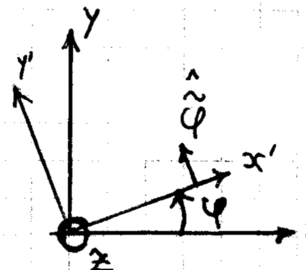
$$ds^2 = -[1-\Omega^2 r^2]\,dt^2 + 2\Omega r^2 d\theta\, dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\theta \to \theta - \Omega t \equiv \tilde{\varphi}$$
$$d\tilde{\varphi} = d\theta - \Omega\, dt$$
$$d\tilde{\varphi} + \Omega t = d\theta$$

y lo metemos en la anterior. Resulta:

$$ds^2 = -(1-\Omega^2 r^2)dt^2 - 2\Omega r^2 \times (d\tilde{\varphi}\, dt + \Omega\, dt^2) + dr^2 + r^2(d\tilde{\varphi}^2 + 2\Omega\, d\tilde{\varphi}\, dt + \Omega^2 dt^2) + dz^2 \Rightarrow \text{amasando}$$

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\tilde{\varphi}^2 + dz^2$$



Hemos pasado a un sistema que rota

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t$$

Necesitamos los símbolos de Cristoffel. Podemos hacerlo con:

1• $g' = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$

2• $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ con $\longrightarrow$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left[\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}\right]$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -[1-\Omega^2 r^2] & 0 & \Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Omega r^2 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo los cálculos es:

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} = \Gamma^\varphi_{\varphi r}$$

$$\Gamma^r_{tt} = -r\Omega^2$$

$$\Gamma^r_{\varphi t} = -\Omega r = \Gamma^r_{t\varphi}$$

$$\Gamma^\varphi_{rt} = \frac{-\Omega}{r} = \Gamma^\varphi_{tr}$$

Los otros $\Gamma = 0$

Ahora calculamos las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2X^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\sigma}{d\lambda} = 0$$

* $\nu = r$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 - r\Omega^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + 2\Omega r\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda} = 0$$

* $\nu = t$

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0 \Rightarrow t = \text{parámetro AFIN}$$

Como t es parámetro afín uso en la ecuación $\nu = r$ y nombrando $(\dot{\ })$

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = \underbrace{r\Omega^2}_{\text{centri.}} - \underline{2\Omega r\dot\varphi}$$

, esto es $\vec F + \vec F_{inerciales} = m(\vec a + \vec a_{iner})$

* $\nu = \varphi$

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\dot\varphi\dot r - 2\frac{\Omega}{r}\dot r = 0$$

$$\Rightarrow mr\ddot\varphi + 2m\dot\varphi\dot r = \underbrace{2\Omega m\dot r}_{\text{Coriolis}}$$

$$\vec F_{cent} = -m\left(\vec\Omega \times [\vec\Omega \times \vec r]\right)$$

$$\vec F_{cent} = mr\Omega^2\hat r$$

El sistema rota con Ω y sobre esta no pesa ninguna limitación

● Problema 7

Coordenadas normales de Riemann (CNR).

Lo más similar a un sistema inercial

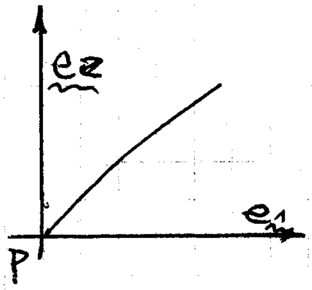
● VARIEDAD RIEMANNIANA (n-dim.)

En P tomo base de vectores $\{e_\alpha\}$ ortonormal

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

$$n \in T_P : n \cdot n = 1 \quad (n = n^\alpha e_\alpha)$$

Mando a través de la geodésica un vector.



$$X^\alpha(0) = P$$

$$\left.\frac{dX^\alpha}{ds}\right|_0 = n^\alpha$$

Las coordenadas para el serán:

$$X^\alpha = s\,n^\alpha$$

$$g_{\alpha\beta}\big|_P = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\big|_P = 0$$

Para una variedad Lorentziana tenemos

Temporal $\rightarrow \tau$

Espacial $\rightarrow S$

Nula $\rightarrow \lambda$ parámetro afín

Lo más simple será Minkowski

Tomo un sistema cualquiera inercial con origen en P,

$$t = Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$$

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2$$

Una base ortonormal en T_P = $\{e_t, e_1, e_2, e_3\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial Y_1}, \frac{\partial}{\partial Y_2}, \frac{\partial}{\partial Y_3}\right\}$

temp $\rightarrow n \cdot n = -1$

spa $\rightarrow n \cdot n = 1$

nulo $\rightarrow n \cdot n = 0$

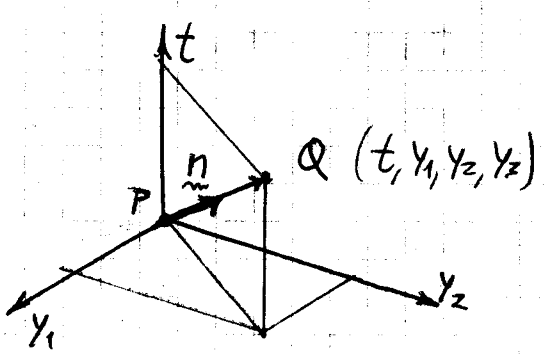
Ahora hay que mandar una geodésica a lo largo de un vector genérico

$$\underset{\sim}{n} = \frac{(t, Y_1, Y_2, Y_3)}{\sqrt{t^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2}} \quad \text{temp.}$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{(t, Y_1, Y_2, Y_3)}{\sqrt{t^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2}} \quad \text{spa.}$$

Las CNR correspondientes al punto Q serán

$$\begin{cases} \text{temp.} & X^\alpha = n^\alpha \tau \\ \text{esp.} & X^\alpha = n^\alpha S \\ \text{nulo} & \text{«por continuidad»} \end{cases}$$



Si $\underset{\sim}{n}$ es:

$$\begin{cases} \text{temp.} & \tau = \sqrt{t^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2} \\ \text{spa.} & S = \sqrt{-t^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2} \\ \text{nulo} & \text{«por continuidad»} \end{cases}$$

Resolviendo:

temp. $\boxed{X^\alpha = n^\alpha \tau = Y^\alpha}$

spa. $\boxed{X^\alpha = n^\alpha S = Y^\alpha}$

$$X^\alpha = Y^\alpha \text{ (continuidad)}$$

20-10-08 ■ Teoría

● La Solución de Schwarzschild [1916]

Es una solución en ausencia de materia y de constante cosmológica

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0} \quad \begin{pmatrix} \Lambda = 0 \\ T_{\mu\nu} = 0 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) = 0$$

$$\left(R - \frac{1}{2} R\right) = 0 \rightarrow R = 0$$

Es la solución de vacío de las Ecuaciones de Einstein con simetría esférica. Describe la métrica en el exterior de una estrella (suponemos que la estrella es simétricamente esférica).

También describirá BH y objetos colapsados.

Buscamos una solución tal que:

$$\boxed{ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2} \; [1]$$

, con $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\varphi^2)$

y donde usamos como coordenadas (t, r, θ, φ).

El esquema sería calcular los símbolos de Christoffel Γ para llegar a $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, suponer $R_{\mu\nu} = 0$ y entonces llegar a $A(r)$, $B(r)$ donde hay una constante indeterminada que la asignaremos a la masa de la estrella.

La métrica [1] se ve que tiene simetría esférica y es estática. Veamos que es general. En flat spacetime era:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\phi^2)$$

Pero en un espacio tiempo curvo podemos pensar que cada punto vive en una 2D-esfera tal que la distancia entre dos puntos allí es:

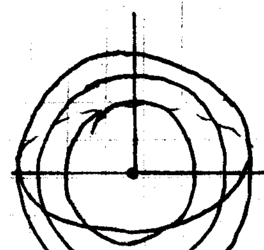
$$ds^2\Big|_{\text{esfera}} = f(r', t')(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\phi^2)$$

tengo entonces (t', r', θ, ϕ) y haremos unos cambios de coordenada.

Ajustamos

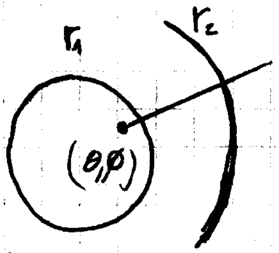
$$f(r', t') = r^2$$

$$ds^2\Big|_{2Esf} = r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \, d\phi^2)$$



Así, no necesariamente 'r' es la distancia al cero.
Ajusto el 'r' para que $\boxed{4\pi r^2}$ de el área de la 2-esfera.

Ahora consideraremos esferas de diferente radio. Quiero ds^2 para puntos en diferentes esferas. Elijo coordenadas. Tengo dos esferas de coor. radiales r_1 y r_2.



Considero $\theta\,\phi$ constantes y hago variar la coordenada radial 'r' de forma que esa línea será ortogonal a la superficie ‡

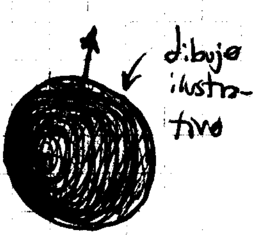
Elijo $\underset{\sim}{e}_r$ ortogonal a $\underset{\sim}{e}_\theta, \underset{\sim}{e}_\phi$. Elijo coordenadas para que la métriza sea diagonal

$$g_{r\phi} = \underset{\sim}{e}_r \cdot \underset{\sim}{e}_\phi = 0$$
$$g_{r\theta} = \underset{\sim}{e}_r \cdot \underset{\sim}{e}_\theta = 0$$

Entonces:

$$ds^2 = r^2 d\Omega_2 + g_{rr}(t',r)dr^2 + g_{00}(t',r)dt'^2 + 2g_{0r}(t',r)dt'dr + 2g_{0\phi}(t',r)dt'd\phi + 2g_{0\theta}(t',r)dt'd\theta$$

Paradas sobre las dos esferas (alguna de ellas) en donde solo transcurre el tiempo. Este vector $\underset{\sim}{e}_{t'}$



será ortogonal a los vectores $\underset{\sim}{e}_\theta, \underset{\sim}{e}_\phi$ porque en una simetría esférica no puede haber direcciones privilegiadas.

$$g_{0\phi} = 0 = \underset{\sim}{e}_{t'} \cdot \underset{\sim}{e}_\phi$$
$$g_{0\theta} = 0 = \underset{\sim}{e}_{t'} \cdot \underset{\sim}{e}_\theta$$

‡ sería como elegir el polo norte en todas las esferas igualmente orientadas

Entonces:

$$\boxed{ds^2 = g_{00}(t',r)dt'^2 + g_{rr}(t',r)dr^2 + 2g_{0r}(t',r)dt'dr + r^2 d\Omega_2} \quad [2]$$

Un caso particular de [2] será una métrica estacionaria: componentes independientes de 't'

$$g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$$

Hacemos un cambio de variables para anular el término cruzado

$$t' = t + f(r)$$
$$dt' = dt + f'(r)\,dr \rightarrow$$
$$dt'^2 = dt^2 + f'(r)^2 dr^2 + 2f'(r)\,dr\,dt$$

Elijo la f que necesito. Elijo:

$$\boxed{f'(r) = -\frac{g_{0r}}{g_{00}}}$$

Así resulta:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + dr^2\left[g_{rr} + g_{00}f'^2 + 2g_{0r}f'(r)\right] + r^2 d\Omega_2$$

y renameando $-B(r) = g_{00}$ y el corchete $A(r)$ es

$$\boxed{ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2}$$

En general se suele definir:

- métricas estacionarias: $g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$
- métrica estática
  es estacionaria e invariante frente al intercambio $t \to -t$ (vale en métricas con elementos no diagonales)

Pero si no hay mucha simetría una métrica estacionaria no necesariamente será estática.
Puede probarse en general, con métricas que dependen del tiempo, que existen coordenadas tales que:

$$\boxed{ds^2 = -B(r,t)dt^2 + A(r,t)dr^2 + r^2 d\Omega_2}$$

, por supuesto para métricas con simetría esférica.

A partir de la métrica podemos evaluar los símbolos de christoffel

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

La métrica inversa sale fácil como:

$$g^{00} = \frac{-1}{B} \, ; \; g^{rr} = \frac{1}{A} \, ; \; g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \, ;$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$R_{rr} = \frac{-B''}{2B} + \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{A'}{A} \quad [1]$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{A} \quad [2]$$

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{B'}{A} \quad [3]$$

$$R_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta \, R_{\theta\theta}$$

, vemos que las derivadas segundas aparecen linealmente.
Resultan tres ecuaciones para A, B con dos incógnitas, pero solo hay 2 independientes. Para resolver basta con tomar,

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = \frac{1}{Ar}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)$$

Si son nulos da que

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{AB = cte \equiv C}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r B'}{A B} \overset{B/C}{=} 1 - \frac{r B'}{C} - \frac{B}{C}$$

$$\boxed{R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{C}(rB)'}$$

$$R_{rr} = \ldots \propto R_{\theta\theta}'$$

Con $R_{\theta\theta} = 0$ se da:

$$(rB)' = C$$

$$rB = Cr + D$$

$$\boxed{B = C + \frac{D}{r}}$$

$$\boxed{A = \frac{C}{C + D/r}}$$

y esta es la solución de las EE para vacío con simetría esférica.
Podríamos pensar en que estamos resolviendo, analogía:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad + \quad \text{simetría esférica}$$

(vacío sin carga)

Entonces, volviendo a la solución

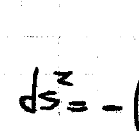
$$ds^2 = -\left(c + \frac{d}{r}\right)dt^2 + \frac{c\,dr^2}{c + \frac{d}{r}} + r^2 d\Omega_2$$

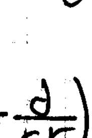
, vemos que 'c' se puede absorber en un reescalamiento del tiempo

$$c > 0 \Rightarrow t \to \frac{t}{\sqrt{c}} \, , \; dt^2 \to \frac{dt^2}{c}$$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{d}{cr}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{d}{cr}\right)} + r^2 d\Omega_2$$

Quiero poner argumentos físicos para que la solución describa el exterior de una estrella: lejos de la misma la métrica tiene que tender a la de Minkowski





$$ds^2 \to ds^2_{MINK}$$
$$r \to \infty$$

Asimismo, si $r \to \infty$

$$g_{00} = -(1+2\Phi)$$

donde el potencial newtoniano es

$$\boxed{\Phi = -\frac{MG}{r}}$$

Suponemos que la constante

$$\frac{d}{c} \equiv -2MG$$

es negativa. Entonces llegamos a la métrica de Schwarzschild

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2}$$

Esto vale para $r > R_\star$. Hemos supuesto $d/c < 0$.

• Comentarios

Hemos resuelto fuera de la estrella. La solución completa involucra resolver para $r < R_\star$, pero ahí necesitamos las EE completas, no las de vacío.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Para resolver necesito modelar la estrella como un fluido y considerando:

$\rho = \rho(r)$ $\quad p = p(r)$

$P = P(\rho)$ ECUACIÓN de ESTADO

U^μ = cuadrivelocidad (en reposo)

$U^0 = 1/\sqrt{B(r)}$ pues $U_\mu U^\mu = -1$

$U^r = U^\phi = U^\theta = 0$

Resolvemos con las fuentes

$$\boxed{T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) U_\mu U_\nu}$$

En $r = 2MG$ tenemos un problema. Es el radio de Schwarzschild

$$\boxed{R_{Sch} \equiv 2MG}$$

$$R_s^\odot \approx 3 \text{ km} \quad (\text{sol})$$

Con lo cual no me interese en general porque la solución de vacío es válida para $R > R^\odot \sim 5 \cdot 10^6$ km. Con objetos compactos sí puede ser relevante.

En campo débil hemos escrito:

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi) \times (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

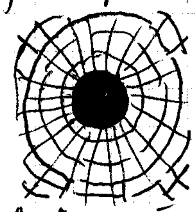
la cual no tiene la forma general de la métrica de Schwarzschild. El problema es que esta expresión es válida en el gauge de Lorentz,

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0}$$

y se ve que las de Schwartzschild no lo satisfacen. Las (t, r, θ, ϕ) no lo cumplen

---

M es una constante de integración que apareció por el camino. Un objeto genera campo gravitacional, pero ese mismo campo [dada su no linealidad] genera a su vez campo. Entonces se hace una definición operativa de masa.



La métrica

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow[r\to\infty]{} \eta_{\mu\nu}$$

es asintóticamente plana. Tomando una partícula de prueba* lejos del sistema en donde la métrica es newtoniana (Minkowski con pequeñas correcciones).

De las ecuaciones de las geodésicas se ve que se mueve como una partícula newtoniana de cierta masa $\Rightarrow$ de ahí sale 'M'.

Para Schwarzschild

$$\boxed{-\frac{1}{2G}\left(\frac{d}{c}\right) = M_{sistema}}$$

En general no es cierto que la masa $M_{sistema}$ sea:

* Masa despreciable

$$\int_{STAR} d^3x\sqrt{g}\,\rho$$

La idea es que $M_{sist.}$ suma también la masa generada por el propio campo gravitacional. El campo genera masa.

Otras soluciones, son por ejemplo suponer una masa negativa, es decir resolver:

Schwartzschild con $d/c > 0$

, y solo tiene problemas en $r=0$, aunque no tiene el drama del R_{sch}.

Si considero $c>0$, $d/c<0$,

$$0<r<-d/c=\alpha^2$$

, la métrica resultante será:

$$ds^2=\underbrace{\left(\frac{\alpha^2}{r}-1\right)}_{>0}dt^2+\frac{dr^2}{\underbrace{(1-\alpha^2/r)}_{<0}}+r^2d\Omega_2$$

y se ha cambiado el signo de la parte temporal 't' y el de la 'r'.

Cambiamos a $\begin{cases} t\to\rho \\ r\to\tau\end{cases} \Rightarrow$

$$ds^2=-\frac{d\tau^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\tau}-1\right)}+\left(\frac{\alpha^2}{\tau}-1\right)d\rho^2+\tau^2d\Omega_2\,,$$

, solución de Kantowsky-Sacks

$$0<\tau<\alpha^2$$

$$\rho \to \begin{cases} 0\le\rho<2\pi L \\ -\infty<\rho<+\infty\end{cases}$$

Son soluciones parecidas a las de Schwarzschild.

■ Práctica

- Problema 1

$$S=\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}\,R+S_{MAT}$$

V $\quad g_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$

, donde:

$$g=|\det(g_{\mu\nu})|=-\det(g_{\mu\nu})$$

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\mu\nu\sigma}$$

$$\delta S=\frac{1}{16\pi G}\Big[\underbrace{\int d^4x\,\delta\sqrt{g}\,R}_{\delta S^1}+\underbrace{\int d^4x\sqrt{g}\,\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}_{\delta S^2}+\underbrace{\int d^4x\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}}_{\delta S^3}\Big]$$

$\delta S^1 \quad \delta\sqrt{g}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta g$

$\bar{\bar{g}} \doteq$ Matriz $g_{\mu\nu}$

$$Tr[(\bar{\bar{g}})^{-1}\delta\bar{\bar{g}}]=\delta(\ln|\det(\bar{\bar{g}})|)$$

$$\delta(\ln|\det(\bar{\bar{g}})|)=\ln|\det(\bar{\bar{g}}+\delta\bar{\bar{g}})|-\ln|\det\bar{\bar{g}}|$$

$$=\ln\left|\det(\bar{\bar{g}}+\delta\bar{\bar{g}})\cdot\frac{1}{\det\bar{\bar{g}}}\right|$$

$$=\ln|\underbrace{\det(1+\delta\bar{\bar{g}}\,\bar{\bar{g}}^{-1})}_{1+Tr(\delta\bar{\bar{g}}\bar{\bar{g}}^{-1})+\mathcal{O}(\delta g^2)}|$$

, luego

$$\delta(\ln|\det\bar{\bar{g}}|)\approx Tr[\delta\bar{\bar{g}}\,\bar{\bar{g}}^{-1}]$$

$$\frac{1}{g}\delta g\approx Tr(\delta\bar{\bar{g}}\,\bar{\bar{g}}^{-1})$$

$$\frac{1}{g}\delta g=\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \delta\sqrt{g}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\,g\,\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\delta(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu})}_{=4} = g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta(\ ) = 0$$

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{\delta g^{\mu\nu}\sqrt{g}}{2}\, g_{\mu\nu}$$

$$\delta S^1 = \int d^4x\, \delta\sqrt{g}\, R$$

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\left[\underline{\int d^4x\sqrt{g}\left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}R\right)\delta g^{\mu\nu}}\right.$$
$$+ \underline{\int d^4x\, R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{g}} +$$
$$\left.\int d^4x\, g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\sqrt{g}\right] + \delta S_N$$

, podemos juntar los dos en azul y obtenemos:

$$\int d^4x\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2}\right)\delta g^{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}$$

$$[\delta R_{\mu\nu}]_{SLI} = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu}$$

ahora propongo que en un sistema general de coordenadas será:

$$(\delta R_{\mu\nu})_{SGC} = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu;\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda;\nu}$$

Entonces debo probar que es un tensor. Recordemos que:

$$\Gamma'^{\mu}_{\alpha\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\epsilon}}\frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}\Gamma^{\sigma}_{\delta\rho} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\delta}}\frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x^{\epsilon}\partial x^{\gamma}}$$

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\epsilon}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}}\delta\Gamma^{\sigma}_{\delta\rho}$$

Pero $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ supongo

$$(g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}) = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g^{\mu\nu})_{;\lambda} -$$

$$(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\epsilon}_{\mu\epsilon})_{;\lambda}$$
$$= (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\epsilon}_{\mu\epsilon})_{;\lambda} \doteq \omega^{\lambda}_{;\lambda}$$

, ω^λ son las componentes de un vector.

$$\delta S_3 = \int d^4x\, \partial_\lambda(\omega^\lambda\sqrt{g})$$ No lo tenemos en cuenta

$$\omega^\lambda = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\epsilon}_{\mu\epsilon}$$

$$\delta g^{\mu\nu}\Big|_{\partial V} = 0$$

$$\delta(\partial_\mu g^{\mu\nu})\Big|_{\partial V} \neq 0 \text{ en general}$$

Esta acción no nos llevará a las ecuaciones de Einstein. Hay que construir una acción

$$S' = S_{einstein} + S_{borde}$$ de Einstein Hilbert

En la MC $\mathcal{L}(q,\dot q) \to$ EL $\ddot q$, pero acá nos deshacemos de las $(\cdot\cdot)$ por la integral por partes y tirar el término de borde.

$$\ddot q f(q) = (\dot{q f})^{\cdot} - \dot q f(q)$$ Ejemplificado así

, se puede escribir así porque la $\ddot{}$ aparece con términos sin derivar (entra linealmente).

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g}\,\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \delta S_{MAT}$$

$$\delta S_{MAT} = \int d^4x\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}}$$

con $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta S_{MAT}}{\delta g^{\mu\nu}}$

Si hay constante cosmológica dará:

$$\boxed{S = \int d^4x\sqrt{g}(R - 2\Lambda)}$$

Teoría

22-10-08

- Proyección sobre 3D

Podemos representar una métrica proyectándola sobre 3D. Para las

Estos son los embedding diagrams

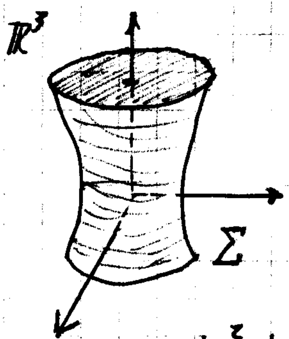
de simetría esférica. Procedemos:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 \times [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta . d\phi^2]$$

, pensando en tiempo constante desaparece el dt con lo cual solo me quedo en la parte espacial. Además haremos $\theta = \pi/2$ fixed. Luego

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2 d\phi^2$$

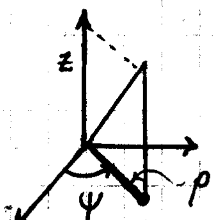
, que define una geometría 2D. Lo pienso como una superficie embebida en $\mathbb{R}^3$. Tenemos una superficie Σ que definiremos de modo que la distancia sobre esa superficie coincida con lo que quedó de la métrica 4D.



$$dl^2_{\mathbb{R}^3}\Big|_{\Sigma} = ds^2$$

Usando coordenadas cilíndricas tendremos

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2$$



y como queremos que coincidan las distancias pensamos que:

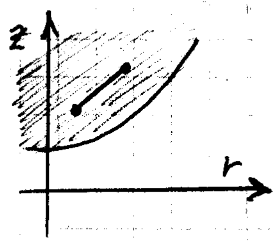
$$\psi = \phi \quad \rho = r$$

$$z = z(r) \quad \text{SUPERFICIE DE REV.}$$

y $z(r)$ será tal que las distancias sobre ella sean iguales a las distancias medidas en el et original.

Pienso en dos puntos a diferente altura, sobre la superficie Σ

$$dl^2_{\mathbb{R}^3}\Big|_{\Sigma} = z'(r)^2 dr^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$



donde:

$$z = z(r)$$

$$dz = z'(r)dr$$

$$= \underbrace{[1 + z'(r)^2]}_{A(r)} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

- EJEMPLO

Consideremos el caso de la métrica de una estrella de masa M, densidad constante ρ, y radio R.

Para radios mayores a R será la métrica de Schwarzschild. Aquí

$$\boxed{A(r) = \frac{1}{\left[1 - \frac{2m(r)G}{r}\right]}} \; \star$$

, donde

$$m(r) = \begin{cases} \frac{r^3 M}{R^3} & r < R \\ M & r > R \end{cases}$$

Volviendo, en $t = cte$, $\theta = cte$ es:

$$ds^2 = \frac{1}{\left[1 - \frac{2m(r)G}{r}\right]} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

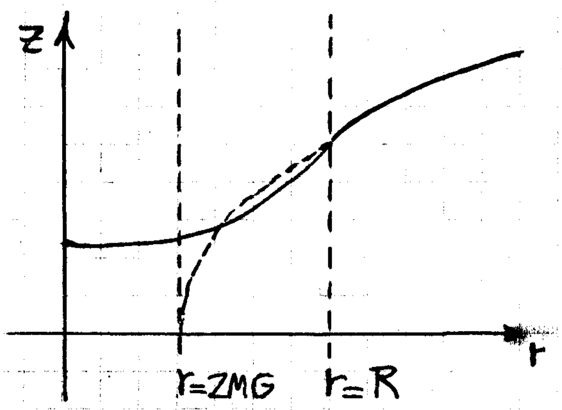
$$1 + z'^2(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)G}{r}} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{-1 + \frac{1}{1 - 2m(r)G/r}}$$

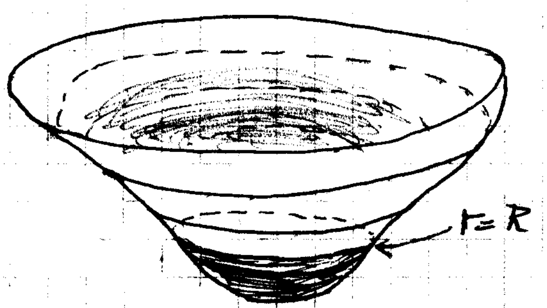
$$\boxed{z(r) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{R^3}{2MG} - r^2} + cte & r<R \\ \sqrt{8MG(r - 2MG)} & r>R \end{cases}}$$

Podemos graficar esta función, tomando verde para $r<R$ y rojo para $r>R$

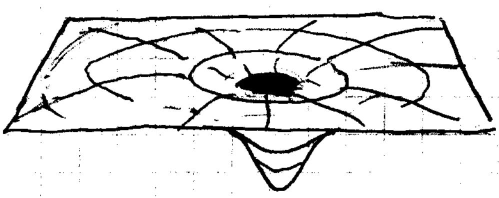
$\star$ $B(r)$ es más complicada que $A(r)$. Por ahora ni la mencionamos



Luego, en $\mathbb{R}^3$, la superficie será alguna palangana:



la masa de la estrella hace aumentar el fondo. La zona cerca de la estrella es la más curva y lejos parece un plano.



Para un agujero de gusano podemos hacer un análisis similar. La métrica es:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2+r^2)\left[d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right]$$

, esta se puede pasar a algo más parecido a lo que ya vimos tomando.

$$b^2+r^2 = r'^2$$

Sin embargo con esta métrica particular para lo de $\mathbb{R}^3$,

$$dl^2_{\mathbb{R}^3} = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2$$

y lo queremos comparar con:

$$ds^2 = dr^2 + (b^2+r^2)\, d\phi^2$$

$$\psi = \phi$$

$$\rho = \sqrt{r^2+b^2}$$

$$z = z(r)$$

Entonces:

$$dl^2_{\mathbb{R}^3}\Big|_{\Sigma} = z'^2(r)\, dr^2 + \rho'^2(r)\, dr^2 + (r^2+b^2)\, d\phi^2,$$

necesito:

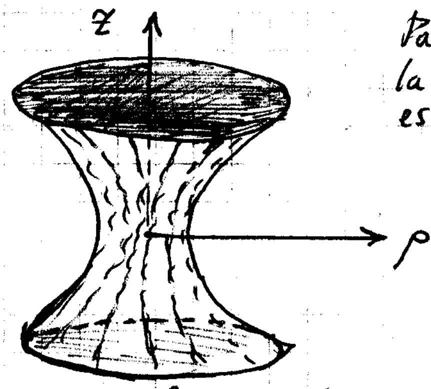
$$z'^2 + \rho'^2 = 1$$

$$\rho = \sqrt{r^2+b^2}$$

los cuales al amasar resultan:

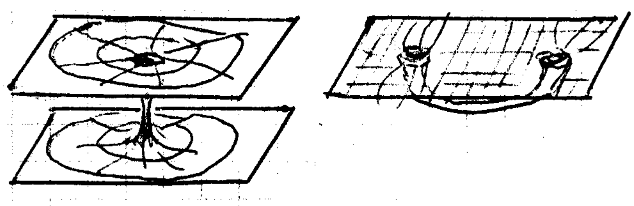
$$\boxed{\rho(z) = b \cdot \cosh\left(\frac{z}{b}\right)}$$

Cuando este se grafica resulta en una superficie de la forma:



Para $\rho \to \infty$ la métrica es flatspace

El wormhole conecta dos regiones que son asintóticamente planas.



● Geodésicas en la métrica de Schwarzschild

Escribimos:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2MG}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2MG}{c^2 r}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

Se suele usar un sistema de unida

des geometricas donde:

$$\boxed{G=c=1}$$

, así las masas quedan en unidades de longitud.

$$\frac{G}{c^2} = 7.425 \cdot 10^{-28} \frac{m}{kg} = 1$$

$$M_\oplus = 0.4\,cm$$

$$M_\odot \simeq 1{,}5\,Km$$

Luego $\frac{M}{r} \ll 1$ para el sistema solar. Siempre estamos en campo débil.

Otro concepto es el de vectores de killing:

$$\underset{\sim}{\xi} = (1,0,0,0) \quad (\text{temporal})$$
$$\underset{\sim}{\eta} = (0,0,0,1) \quad (\text{acimutal})$$

• Geodésicas de partículas masivas

Consideramos una partícula de prueba con masa despreciable

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} \qquad \underset{\sim}{U}\cdot\underset{\sim}{U} = -1$$

y tenemos dos cantidades conservadas

trnb: es lo mismo decir P_t, P_ϕ

$$\underset{\sim}{\xi}\cdot\underset{\sim}{U}$$
$$\underset{\sim}{\eta}\cdot\underset{\sim}{U}$$

sólo porque la métrica no depende de 't' ni de 'ϕ'. Considero

$$-\underset{\sim}{\xi}\cdot\underset{\sim}{U} \equiv e = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$\mapsto$ Aquí trabajamos con las leyes de conservación xq es más sencillo pero se puede usar la geodésica

$$\underset{\sim}{\eta}\cdot\underset{\sim}{U} \equiv l = g_{\phi\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\tau}$$
$$= r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

Con $r\to\infty$ $e = E/m$; y en el caso no relativista $l \stackrel{\sim}{=} L/m$

Si hubiese laburado con $\underset{\sim}{P}$ llegaría a conservación de E y L directamente.

Si de entrada propongo:

$$\left[\begin{array}{l} \theta = \pi/2 \\ U^\theta\big|_{inicial} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ en toda la trayectoria}$$

esto se mantiene. Puedo escribir $\underset{\sim}{U}\cdot\underset{\sim}{U} = -1$ para arribar a una expresión para el potencial efectivo

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1$$

Con las leyes de conservación reescribimos

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -\frac{e^2}{(1-2M/r)} + \frac{(dr/d\tau)^2}{(1-2M/r)} + l^2/r^2 = -1$$

, reacomodando:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^2 - \left[1-\frac{2M}{r}\right]\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)$$

• $$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)-1\right] = \frac{e^2-1}{2}}$$

$$\frac{e^2-1}{2} \equiv \mathcal{E} \qquad \text{ENERGÍA POR UNIDAD DE MASA}$$

• $$\boxed{r^2\frac{d\phi}{d\tau} = l}$$

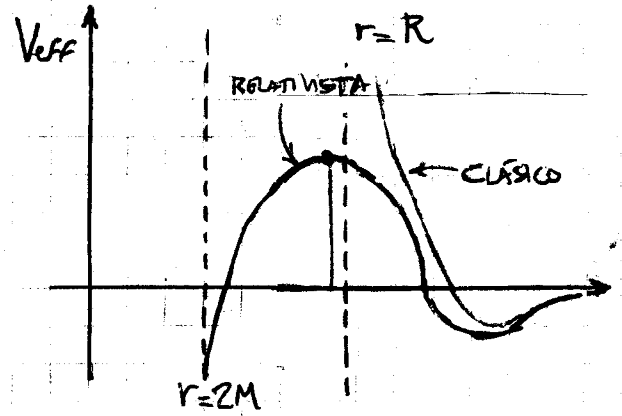
Entonces definimos un

$$V_{ef}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \underbrace{\frac{Ml^2}{r^3}}_{*}$$

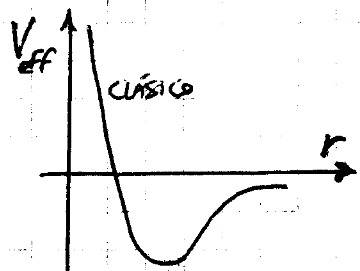
, comparando con las ecuaciones de la mecánica clásica vemos que:

1. Hay un término extra *
2. El dt es $d\tau$ (pero son $dt \simeq d\tau$)

dado que no se mueven con velocidad relativista



, y se puede comparar con el resultado clásico. Vemos la diferencia cuantitativa aunque hay una zona ($r \gg R$) donde parecen coincidir.



Buscando los extremos vemos que

$$\boxed{\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{r = r_\pm = \frac{l^2}{2M}\left(\pm\sqrt{1 - \frac{12M^2}{l^2}} + 1\right)}$$

, con lo cual existen $r_\pm$ si se cumple que:

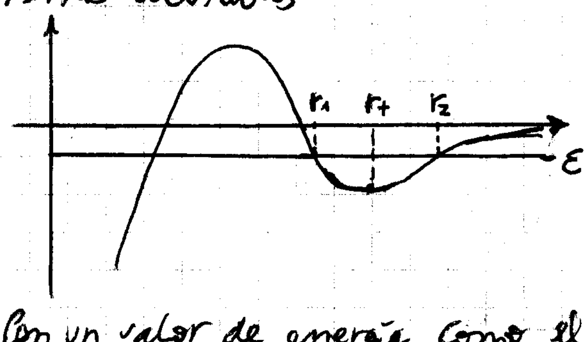
$$l^2 > 12M^2$$

, pero si

$$l^2 < 12M^2$$

no existen los dos radios (es una función creciente el Veff).

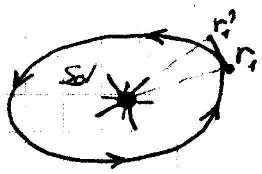
Restringiéndonos a la zona de órbitas acotadas



Con un valor de energía como el mostrado las órbitas son acotadas

$$r_1 < r < r_2$$

, pero no implica que las órbitas sean cerradas; es decir que cuando barre $r_1 \to r_2 \to r_1$ no vuelve a caer en el mismo punto.



Asimismo existe órbita circular estable con $r = r_+$, y una órbita con radio mínimo

$$\boxed{r_+|_{MIN} = 6M}$$

Entonces este término causará una perturbación en las órbitas. Se había observado que en la órbita de Mercurio hay una precesión del eje de la elipse: la órbita no es newtoniana.

En realidad rota 5600'' de arco por siglo. Las correcciones newtonianas dan cuenta de 4957'' y quedan 43'' de arco sin poder explicarse clásicamente.

Veamos el cálculo:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{l}{r^2} = -\frac{du}{d\phi} l$$

, donde cambiamos $U \equiv 1/r \Rightarrow$

$$\boxed{\left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2 = \frac{2E}{l^2} - U^2 + 2MU\left(\frac{1}{l^2} + \underbrace{U^2}_{*}\right)}$$

obteniéndose el término extra indicado con $*$. Entonces:

$$U_2 \leq U \leq U_1$$

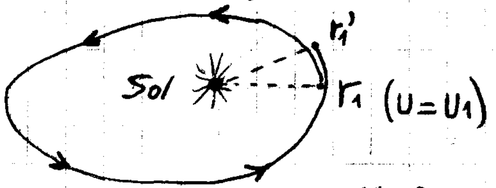
, luego definiendo $f(U) = \left(\frac{dU}{d\phi}\right)^2$ se tiene:

$$\frac{dU}{d\phi} = \pm\sqrt{f(U)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi(U) = \int_{U_2}^{U} \frac{dU}{\sqrt{f(U)}}}$$

y esta integral puede hacerse numéricamente.

La diferencia sale de calcular el avance del perihelio. Sea el planeta en la posición de mínima distancia sucesiva. Luego de una vuelta la



coordenada ~~...~~ regresa a la misma distancia del Sol (la mínima); pero ya no es el mismo punto del espacio tiempo.

El avance del perihelio será:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\phi(u_1) - 2\pi}$$

medido como diferencia del resultado clásico que sería 2π.

La integral la podemos hacer considerando campo débil.

■ Práctica

• **Problema 2 [GUÍA 6]**

Solución de Reissner-Nordström que describe geometría exterior de un objeto esféricamente simétrico y cargado con Q.

Tendremos vinculados EM y G.

Usaremos principio de equivalencia

En un SLI

(Prob. 7 GUÍA 2)

- $F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$
- $\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = J^\beta$
- $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$
- $\underbrace{m a^\alpha}_{\text{4 ACEL.}} = F^{\alpha\beta} \underbrace{q}_{\text{CARGA}} \underbrace{\mu_\beta}_{\text{4 VEL.}}$

Ahora pasamos a un sistema general extendiendo como es usual:

- $F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$
- $\nabla_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$
- $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$
- $m a^\mu = F^{\mu\nu} q \mu_\nu$

, como no es cero el término la partícula no sigue la ecuación de la geodésica. Asimismo

- $T^{(EM)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\gamma}F_\beta^{\ \gamma} - \frac{1}{4} F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}\eta_{\alpha\beta}\right)$

, y en un SGC será:

- $T^{(EM)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\rho}F_\nu^{\ \rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}\right)$

La conservación en c/u de los sistemas será:

- $\left(T^{(EM)\alpha\beta} + T^{(MAT)\alpha\beta}\right)_{,\beta} = 0$

, y en un SGC será:

- $\left(T^{(EM)\mu\nu} + T^{(MAT)\mu\nu}\right)_{;\nu} = 0$

Para el SLI se daba trivialmente

$$F^{tj} = E^j$$
$$F^{jk} = \epsilon^{jkl} B^l$$

, en espacios curvos ya esto deja de valer.

Podríamos mostrar que:

1) $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$
$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$

2) $F_{\mu\nu;\rho} + F_{\nu\rho;\mu} + F_{\rho\mu;\nu} =$
$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu}$

3) $\nabla_\mu F^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(F^{\nu\mu}\sqrt{g}\right) \longrightarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

4) $J^\mu{}_{;\mu} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\, J^\mu\right)$; usando la 2da ecuación de la lista de •

Las ecuaciones de Maxwell para $J^\nu=0$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

② $$\partial_\mu\left(F^{\nu\mu}\sqrt{g}\right)=0$$

Las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=$$

$$G_{\mu\nu}=8\pi G\,T^{(EM)}_{\mu\nu}$$

$$S=S_G+S_M$$

$$T_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$S_{EM}=-\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{g}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

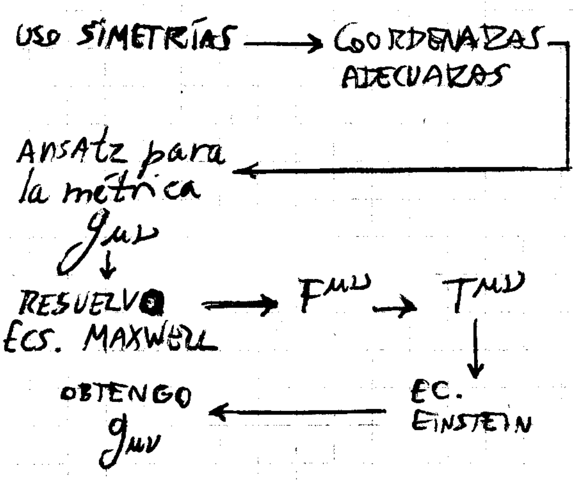
, este generalizaba el de espacios planos. Si consideramos:

$$S_M=-\frac{\alpha_{EM}}{4}\int d^4x\sqrt{g}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

queremos ver que:

$$T_{\mu\nu}=T^{EM}_{\mu\nu}\quad \text{si}\quad \boxed{\alpha_{EM}=\frac{1}{4\pi}}$$

Para resolver la ecuación procedemos similarmente a Schwarzschild:



Con simetría esférica, estática

$$ds^2=-e^{2\phi(r)}dt^2+e^{2\Lambda(r)}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

, y para esta hemos calculado ya los símbolos de Christoffel.

Por la simetría esférica:

$$A_\mu=\begin{cases}A_t(r,t)\\ A_r(r,t)\end{cases}\qquad A_\theta=A_\varphi=0$$

, entonces sólo nos importarán:

$$F_{tr}=-F_{rt}\neq 0$$

$$F_{rt}=f(r)$$

, esto último es la "estaticidad" que supusimos.

Según ② con $\nu=t$

$$\partial_r\left(F^{tr}\sqrt{g}\right)=0$$

$$\partial_r\left(g^{tt}g^{rr}\underbrace{F_{tr}}_{-f(r)}\sqrt{g}\right)=0$$

$$g^{tt}g^{rr}\sqrt{g}=-r^2\operatorname{sen}\theta\,e^{-(\phi+\Lambda)}$$

$$\partial_r\left(r^2e^{-[\phi+\Lambda]}f(r)\right)=0$$

$$2f-rf(\phi'+\Lambda')+f'=0$$ Las ' son $\frac{d}{dr}$

$$\frac{f'}{f}=-\frac{2}{r}+\frac{d}{dr}(\Lambda+\phi)$$

$$\frac{d}{dr}(\ln f)=\frac{d}{dr}(\ln r^{-2})+\frac{d}{dr}(\Lambda+\phi)$$

$$f=\frac{Q}{r^2}e^{\Lambda+\phi},\quad Q\equiv \text{cte.}$$

$$8\pi T_{tt}=e^{2\phi}\frac{Q^2}{r^4}$$

$$8\pi T_{rr}=-e^{2\Lambda}\frac{Q^2}{r^4}$$

$$8\pi T_{\theta\theta}=\frac{Q^2}{r^2}$$

$$8\pi T_{\varphi\varphi}=\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{Q^2}{r^2}$$

, vemos que cumple $\boxed{T^\mu_\mu=0}$ [1]

como debiera, y además

$$\boxed{T_{rr}+e^{2(\Lambda-\phi)}T_{tt}=0}$$ [2]

Faltaría ver qué son Λ' y ϕ'.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$G^{\mu}_{\mu} = R - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\mu} R = -R$$

Pero como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$T^{\mu}_{\mu} = 0 \Rightarrow G^{\mu}_{\mu} = \boxed{R=0} \; [3]$$

, el escalar de Ricci es nulo. Luego:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

, empleando la observación [2]

$$\boxed{R_{rr} + e^{2(\Lambda-\phi)} R_{tt} = 0} \; [4]$$

$$\boxed{R_{rr} = 8\pi G T_{rr}} \; [5]$$

Haciendo cuentitas resultará:

$$R_{tt} = e^{2(\phi-\Lambda)}\left[\phi'' + \phi'^2 - \phi'\Lambda' + \frac{2}{r}\phi'\right]$$

$$R_{rr} = -\left[\phi'' + \phi'^2 - \phi'\Lambda' - \frac{2}{r}\Lambda'\right]$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda}\left[r\Lambda' - r\phi' - 1\right] + 1$$

Algunos tips serían:

[3] $R=0$ simplifica R_{tt} y R_{rr} para que:

$$R_{tt} = \frac{e^{2\phi} - e^{-2(\Lambda-\phi)} + 2e^{-2(\Lambda-\phi)} \cdot r\Lambda'}{r^2}$$

$$R_{rr} = \frac{1}{r^2} + \frac{2\phi'}{r} - \frac{e^{2\Lambda}}{r^2}$$

Con estas dos en [4] llego a:

$$\partial_r(\Lambda+\phi) = 0$$

tomo: $\Lambda + \phi = cte = 0$ si rescalo el tiempo.

$$\boxed{\Lambda = -\phi}$$

Usando [5] y este resultado es:

$$F_{rt} = e^{(\Lambda+\phi)} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$$

, también con ello

$$R_{rr} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\phi}) + \frac{2\phi'}{r} = 8\pi G T_{rr}$$

$$= -\frac{GQ^2 e^{-2\phi}}{r^4}$$

$$2r^3\phi' + r^2(1 - e^{-2\phi}) = -e^{-2\phi} G Q^2$$

$$z = e^{2\phi} \Rightarrow \frac{z'}{z} = 2\phi' \text{ (change)}$$

$$\boxed{z'r^3 + r^2(z-1) = -Q^2 G} \; [6]$$

, siendo esta última la ecuación a resolver. Propongo una serie cortada

$$Z(r) = 1 + r^a\alpha + r^b\beta$$

metiendolo con forceps en [6] de que (merced a igualar coeficientes)

$$a = -2 \Rightarrow \alpha = Q^2 G$$

$$\beta b + \beta = 0 \quad \beta = 0 \; [\text{NO LO USO}]$$

$$b = -1$$

$$Z(r) = \underbrace{1 + \frac{Q^2}{r^2} G + \frac{\beta}{r}}_{e^{2\phi}}$$

$$ds^2 = -Z(r)\,dt^2 + \frac{1}{Z(r)} dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$$

, donde Q y β son constantes de integración que saldrán de las conformes

$$g_{00} \underset{r\to\infty}{\sim} -(1+2\phi) \quad \text{con } \phi = -\frac{GM}{r}$$

así: $\boxed{\beta = -2MG}$

un observador lejano mide una masa 'M'.

$$\boxed{Z(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{Q^2 G}{r^2}}$$

, luego con $r\to\infty$ $Z(r)\to 1$, luego como para Minkowski

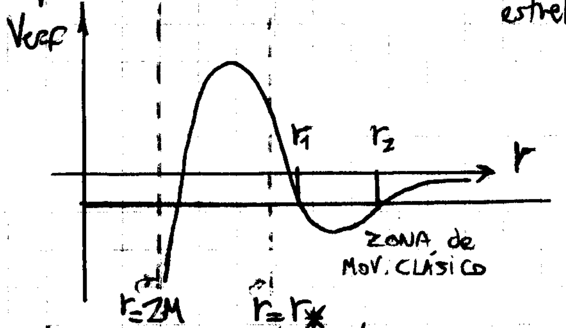
$$F_{rt} = E_r$$

luego Q^2 sería la carga^2 que mide un observador desde lejos

■ Teoría

• Continuación Geodésicas de partículas masivas en Schwartzschild

Tenemos un potencial efectivo del tipo ilustrado (válido fuera de la estrella).

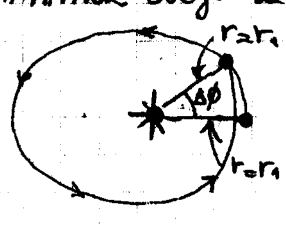


La ecuación de la órbita era:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\varepsilon}{\ell^2} - u^2 + \frac{2Mu}{\ell^2} + \underbrace{2Mu^3}_{\text{término extra}}$$

donde: $\varepsilon = (e^2-1)/2$, $u = 1/r$.

Las órbitas en general no serán cerradas van cambiando pero conservando distancia máxima y mínima luego de dar una revolución el planeta no regresa al mismo punto: precesión del perihelio: el eje de la elíptica va precediendo



Hagamos $\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = f(u) \Rightarrow$

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{f(u)}$$

y "+" es cuando U crezca con ϕ y el "−" es cuando U decrezca con ϕ.

$$\boxed{\phi(u) = \int_{u_2}^{u} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}}$$

y U_2 es el valor mínimo de U y dado luego: se corresponde a r máximo y decreciendo. Ahora:

$$\boxed{\Delta\phi = 2\phi(u_1) - 2\pi}$$

y esto es cero si no está el término "$2MU^3$".

La haremos analíticamente a orden lineal en campo débil.

$$M/r \ll 1$$

27-10-0 r es la coordenada asociada al $R_\odot$

Pero $f(u)$ es un polinomio de grado 3, del cual sabemos que es nulo en dos raíces U_1, U_2 y se puede escribir

$$2M(U-U_1)(U-U_2)(U-U_3) = f(U)$$

$$f(U) = 2M\left(U^3 - U^2(U_1+U_2+U_3) + \dots\right)$$

Se puede calcular U_3:

$$-2M(U_1+U_2+U_3) = -1 \Rightarrow$$

$$f(U) = \frac{1}{2M} - U_1 - U_2 \quad \therefore$$

$$\boxed{f(U) = \left(U - \frac{1}{2M} + U_1 + U_2\right)}.$$

, conviene escribir:

$$f(U) = -(U-U_1)(U-U_2)\left[1-2M(U+U_1+U_2)\right]$$

$$\boxed{\phi(U_1) = \int_{U_2}^{U_1} \frac{1}{\sqrt{(U-U_1)(U-U_2)}} \frac{dU}{\sqrt{1-2M(U+U_1+U_2)}}}$$

donde el resultado newtoniano es el primer factor, y el otro es corrección. Ahora desarrollaremos a 1er orden este último factor. Resulta

$$\approx 1 + M(U+U_1+U_2)$$

NB

A 1^er orden coordenada de Schwarz, y distancia radial coinciden

$$\Delta\phi = 2\phi(U_1) - 2\pi$$

$$\Delta\phi \cong 2M \int_{U_2}^{U_1} \frac{dU\,(U + U_1 + U_2)}{\sqrt{(U-U_1)(U-U_2)}}$$

$$\Delta\phi \approx 3\pi M\,(U_1 + U_2) = \frac{6\pi M}{L}$$

donde:

$$L^{-1} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Resultado de Einstein

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{6\pi M}{L}}$$

medido en radianes por revolución.

Todos los planetas sufren esta precesión, pero es más notable en el caso de Mercurio, para el cual los números son:

$L = 55{,}3 \cdot 10^6$ km

$M = 1{,}475$ km

$\Rightarrow \Delta\phi = 43{,}03''$ arco/siglo

o unos 10^{-6} radianes.

Entonces en GR las órbitas no son cerradas. Pero las observaciones astronómicas dan

$\Delta\phi = (5600{,}73 \pm 0{,}4)''$ arco/siglo

, que se separan en

43,11 '' GR

$5557{,}62'' \rightarrow 5025''$ por precesión de los equinoccios

→ presencia gravitatoria de los otros planetas

279'' Venus, 153'' Júpiter, 90'' Tierra, 11'' Resto

Este mismo efecto se vió en pulsars binarios [dos estrellas, una que gira en torno de la otra que es un pulsar]. Para uno de estos sistemas

$T \sim 7h\,45'$

$M \sim M_\odot$

$L \sim 10^6$ km

$\Delta\phi \sim 4''$ /año

● Trayectorias de partículas NO MASIVOS

Queremos ver básicamente la deflexión de la luz, como caso particular. Ahora la cuadrivelocidad no puede definirse con $d\tau = 0$, entonces usamos

$$\boxed{U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}}$$

, donde λ es parámetro afín. La normalización es:

$$\boxed{\underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{U} = 0}$$

y existen dos cantidades conservadas.

$$e = -\underset{\sim}{\xi} \cdot \underset{\sim}{U} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

$$\ell = \underset{\sim}{\eta} \cdot \underset{\sim}{U} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{d\phi}{d\lambda}$$

λ se elige de modo que con el fotón lejos

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu_{\text{FOTÓN}} \qquad (r \to \infty)$$

Así la constante "e" es la energía del fotón con $r \to \infty$ y "ℓ" el momento angular.

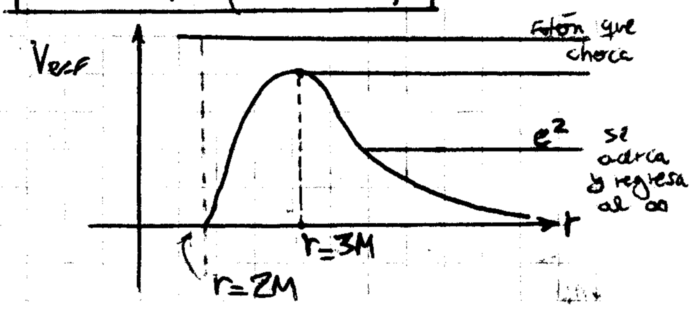
Podemos elegir el sistema de coordenadas tal que el movimiento en el plano tenga lugar en $\theta = \pi/2$.

$$\ell = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

La cuenta es idéntica a la de la partícula masiva con lo cual

$$\boxed{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff} = e^2},$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{\ell^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$



Si $r_* < 3M$ existe una órbita circular INESTABLE.
Dependiendo de la energía del fotón tendremos diferentes órbitas; la que consideraremos es la que tiene un punto de acercamiento máximo y luego vuelve a alejarse

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi}\frac{l}{r^2}$$

$$= \frac{-du}{d\phi}\cdot l$$

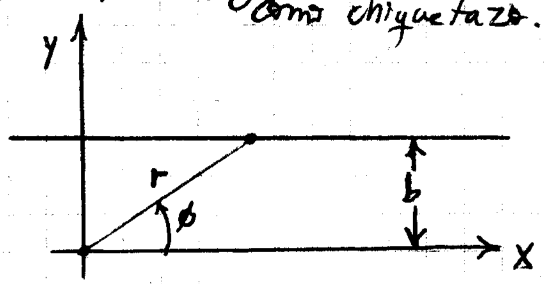
, donde hemos hecho $u = 1/r$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 l^2 + l^2 u^2 (1 - 2Mu) = e^2$$

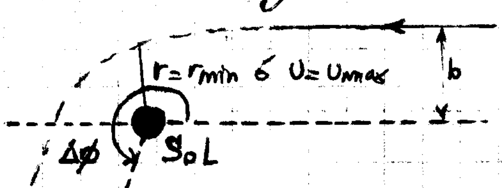
$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{e^2}{l^2} - u^2 + 2Mu^3$$

$$\boxed{\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3} \quad [1]$$

con $b \equiv$ parámetro de impacto.
Si $M = 0$ se tiene una recta (espacio plano) y el fotón pasa como chiquetazo.



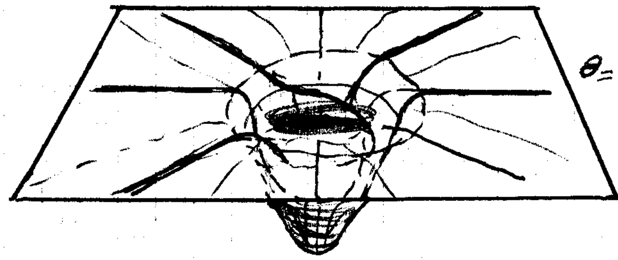
$b/r = \operatorname{sen}\phi$ es solución de [1]
Ahora supongamos una masa



Consideremos la deflexión de la luz por una masa como la del Sol. La deflexión es $\Delta\phi$ y queremos calcular:

$$\delta\phi_{DEF} = \Delta\phi - \pi$$

Pictóricamente estamos trabajando en la zona del espacio tiempo dadas por $\theta = \pi/2$ (una especie de colchón con una



bala de cañon en un lugar).

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3}$$

$$d\phi = \pm \frac{du}{\sqrt{}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\phi = 2\int_0^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3}}}$$

con u_{max}: $\frac{1}{b^2} - u_{max}^2 + 2Mu_{max}^3 = 0$.

Podemos ver a 1er orden un desarrollo pero es necesario un trabajete en el integrando porque lo que es pequeño no debe ir a anularse. Hacemos

$$x = b\cdot u$$

$$\Delta\phi = 2\int_0^{u_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2\left(1 - \frac{2M}{b}x\right)}}$$

$$b^2 u_{max}^2 (1 - 2Mu_M) = 1$$

y como $2Mx/b \ll 1$ ahora hacemos

$$\int_0^{bu_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2\left(1 - \frac{2M}{b}x\right)}} \approx \int_0^{bu_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2\left(1 - \frac{M}{b}x\right)^2}}$$

hago un cambio de variables:

$$y = x\left(1 - \frac{M}{b}x\right)$$

que a orden lineal es

$$y \approx x \Rightarrow y \approx x\left(1 - \frac{M}{b}y\right)$$

$$x \approx \frac{y}{\left(1 - \frac{M}{b}y\right)} \approx y\left(1 + \frac{M}{b}y\right)$$

$$dx \approx dy\left(1 + \frac{2M}{b}y\right)$$

Este cambio parece algo poco creíble

El límite de integración transforma como

$$x = b.U_{MAX} = y = b\,U_{MAX}(1 - M U_{MAX})$$

Lím superior ≈ 1 (a 1er orden)

Juntando todo

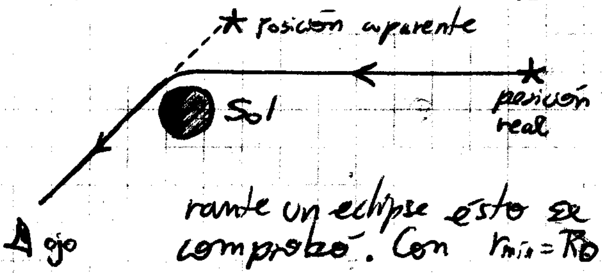
$$\boxed{\Delta\phi \cong 2\int_0^1 dy \frac{\left(1 + \frac{2MY}{b}\right)}{\sqrt{1 - Y^2}}}$$ A 1er orden en M/b

, con $M=0$ el resultado es $\Delta\phi = \pi$. Con $M \neq 0$ será:

$$\boxed{\delta\phi_{DEF} \approx \frac{4M}{b}} = \frac{4M}{r_{min}}$$

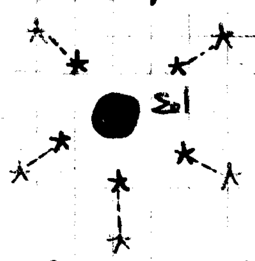
Luego GR predice esta deflexión para la luz cerca de un objeto masivo.

Para verificar esto conviene ver luz rasante sobre el Sol. En 1919 durante un eclipse esto se comprobó. Con $r_{min} = R_\odot$ es:



$$\delta\phi_{DEF} \approx 1{,}75'' \text{ de arco}$$

Los resultados experimentales medidos en 1919 fueron $1{,}98'' \pm 0{,}12''$



Las posiciones de las estrellas con ausencia del Sol (★) difieren radialmente de las posiciones cuando el Sol está (★)

Cuando calculamos scattering con una partícula de $v=c$ se obtiene

$$\boxed{\delta\phi = \frac{2M}{r_{min}}}$$

, entonces GR es más que scattering.

Podríamos preguntarnos que sucede con $\delta\phi_{DEF}$ si uso otras coordenadas: al orden más bajo coinciden pero no necesariamente a orden superior.

Asimismo en cualquier sistema de coordenadas los valores son los mismos si los escribo en función de parámetros físicos.

■ Práctica

- Comentarios

Problema 3 para más adelante

- Problema 6

Fluido ideal $\rho = cte$ y simetría esférica. Se sugiere ver chapter 10 de Schutz.

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

, con $d\Omega = d\theta^2 + sen^2\theta . d\varphi^2$

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}p$$

, como la estrella es estática es

$$\boxed{U^\mu = \delta^\mu_0 U^0}, \quad U^\mu U_\mu = -1$$

$$\Rightarrow \quad U^0 = e^{-\phi}, \quad U_0 = -e^{\phi}$$

$$T_{00} = \rho e^{2\phi}, \quad T_{rr} = p e^{2\Lambda}$$

$$T_{\theta\theta} = P r^2 \qquad T_{\varphi\varphi} = P r^2 sen^2\theta$$

Luego usamos la ecuación de Einstein para resolver

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \qquad (G=1)$$

y obtener $P(r)$, $\Lambda(r)$, $\phi(r)$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \qquad \nu \neq r$$

$T^{\mu r}{}_{;\mu}$ llego a

$$\boxed{(P+\rho)\frac{d\phi}{dr} = -\frac{dP}{dr}} \quad [1]$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \quad [2]$$

$$G_{rr} = 8\pi T_{rr} \quad [2]$$

Es conveniente escribir el g_{rr} de la forma

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)}$$

, en [2] será:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 8\pi r^2 \rho,$$

con la CI: $m(r=0) = 0 \rightarrow$

$$g_{rr}(r=0) = 1$$

$$\boxed{m(r) = \frac{8\pi}{3} r^2 \rho} \quad \text{con } r \leq R^{*}$$

La [3] puede ponerse:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)} \cdot \frac{2m(r)}{r} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = \frac{8\pi P}{\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)}$$

Se puede obtener una ecuación para P usando [1] y [3]

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = \frac{-4\pi r}{\left(1 - \frac{8\pi r}{3}\rho\right)}\left(P + \frac{1}{3}\rho\right)(P + \rho)}$$

, dados los signos la presión baja con r y como es continua la métrica debe pegarse en el borde; entonces vemos que cumple:

$$\boxed{P(r=R) = 0}$$

tomo como constante $P(r=0) \doteq P_c$.

$$P = P(\rho, P_c, r) \quad \text{(datos)}$$

$$P = \rho\left[\frac{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}\right]$$

También obtenemos $\phi(r)$ des de [1]

Ahora bien,

$$g_{00} = -e^{2\phi}$$

$$g_{00}(r=R) = -1/g_{rr}(R)$$

$*$ donde R se asocia al radio aunque No es el radio físico

$$g_{00}(r=R) = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)$$

$$e^{\phi} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right) \quad \text{con } r<R$$

Observemos que:

$$P(r=0) = \rho\,\frac{\left[1 - \left(1 - 2M/R\right)^{1/2}\right]}{3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1}$$

, pero el denominador podría ser nulo en cuyo caso

$$\frac{M}{R} = \frac{4}{9} \quad [4]$$

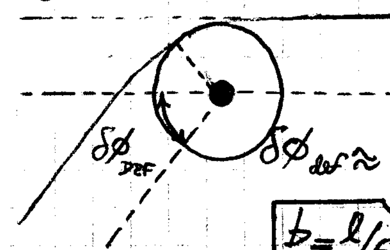
, la P diverge con [4] y esto es un fenómeno que se observa con relaciones $\rho = \rho(r)$ más realistas.

Estas presiones son las que producen colapso. otra vez chapter 10 del Schutz amplía.

■ Teoría 29-10-08

● Deflexión de la luz (Condiciones)

Todos los resultados obtenidos, en cuyo resumen se muestra abajo,



$$\delta\phi_{DEF} \approx \frac{4M}{r_{min}} \approx \frac{4M}{b}$$

$$\boxed{b = l/\epsilon}$$

usaban las coordenadas de Schwarzschild

Ahora supongamos que no usamos estas coordenadas, cuya métrica era:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r_s}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r_s}\right)} + r_s^2\, d\Omega_2}$$

$r_s = r_{Schwarz}$

Pero tenemos otros sistemas;

$$\boxed{ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{r_H}\right)}{\left(1 + \frac{M}{r_H}\right)}dt^2 + \frac{\left(1 + \frac{M}{r_H}\right)}{\left(1 - \frac{M}{r_H}\right)}dr_H^2 + (r_H + M)^2\, d\Omega_2}$$

N3 Escribe la misma métrica en otras coordenadas

, son las coordenadas armónicas, que cumplen:

$$\partial_\mu\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0$$

También tenemos las coordenadas isótropas, cuyo volumen es

$$\boxed{ds^2 = -\left(\frac{1-\frac{M}{2r_I}}{1+\frac{M}{2r_I}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{M}{2r_I}\right) \times \left\{ dr_I^2 + r_I^2\, d\Omega^2 \right\}}$$

Ecuacionando estas métricas resulta

$$r_S = r_H + M = r_H\left(1+\frac{M}{r_H}\right)$$

$$r_S = r_I\left(1+\frac{M}{2r_I}\right)^2$$

$$r_H\left(1+\frac{M}{r_H}\right) = r_I\left(1+\frac{M}{2r_I}\right)^2 \Rightarrow$$

$$r_H = r_I\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)^2\right)$$

Al orden más bajo $R_H \approx R_S \approx R_I$ el g_{00} tiene que ser el mismo en los tres casos.

Por principio de equivalencia debe ser $g_{00} \approx 1-\frac{2M}{r}$

$$\frac{1-M/r_H}{1+M/r_H} \approx \boxed{1-\frac{2M}{r_H}}$$

Según un paper [2003] Bodenmer Will se tiene:

$$\delta\phi_{def} = \begin{cases} \frac{4M}{r_s^m} + \left(\frac{M}{r_s^m}\right)^2\left(\frac{15\pi}{4} - 4\right) + \dots & \text{SCHWARZSCHILD} \\ \frac{4M}{r_H^m} + \left(\frac{M}{r_H^m}\right)^2\left(\frac{15\pi}{4} - 8\right) + \dots & \text{ARMÓNICAS} \\ \frac{4M}{r_I^m} + \left(\frac{M}{r_I^m}\right)^2\left(\frac{15\pi}{4} - 8\right) + \dots & \text{ISÓTROPAS} \end{cases}$$

El asunto aquí es que describo las leyes físicas en términos de cosas que no son del todo físicas.

En el gráfico de la página anterior consideramos la siguiente idea geométrica de una circunferencia. Esta tiene perímetro $P \Rightarrow$

$$\frac{P}{2\pi} = d_c$$

, entonces esto define una Longitud física calculable.

$$d_c = r_s \quad [\text{Schwarzschild}]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{00}\, r_s^2}\, d\phi = r_s$$

En las otras coordenadas será:

$$d_c = r_H^{min} + M \qquad [\text{Armónicas}]$$

$$d_c = r_I\left(1+\frac{M}{2}\right)^2 \quad [\text{Isótropas}]$$

Esto 'd_c' es independiente de las coordenadas. Si escribimos los resultados $\delta\phi_{def}$ en función de esto deberían resultar la misma cosa.

$$\delta\phi_{def}^H = \frac{4M}{(d_c - M)} + \left[\frac{M}{(d_c - M)}\right]^2 \cdot \left(\frac{15\pi}{4} - 8\right)$$

haciendo el desarrollo hasta orden 2,

$$\frac{4M}{d_c\left(1-\frac{M}{d_c}\right)} \approx \frac{4M}{d_c}\left(1+\frac{M}{d_c}\right) = \frac{4M}{d_c} + 4\left(\frac{M}{d_c}\right)^2$$

, entonces resulta:

$$\delta\phi_{def}^4 = \frac{4M}{d_c} - \left(\frac{M}{d_c}\right)^2\left(\frac{15\pi}{4} - 4\right) -$$

> El cálculo hecho para deflexión con coord de Schwarzschild no me da distancias sino hago una transformación de coordenadas para llevarlo a parámetros físicos.

También podemos hacer la cuenta en términos de "b" (cosa física) con expresión que no depende del sistema de coordenadas. Para una métrica ordinaria

$$ds^2 = -B(r)\, dt^2 + A(r)\, dr^2 + C(r)\, d\Omega_2$$

llegamos a un:

$$\boxed{\delta\phi_{def} = 2\int_0^{U_{max}} \frac{du}{U^2} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C\left(\frac{C}{Bb^2}-1\right)}} - \pi}$$

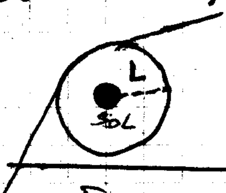
, donde U_M es solución de $\frac{C}{Bb^2} = 1$

y como siempre $u = 1/r$
En términos de r será:

$$\delta\phi_{def} = 2\int_0^{r_{mx}} \frac{\sqrt{A}\,.dr}{\sqrt{r^2\left(\frac{c}{Bb^2}-1\right)}} - \pi$$

se ve que en c/u de las coordenadas $\sqrt{A'}\,dr' = \sqrt{A}.dr = \sqrt{A''}\,dr''$ y el valor de la integral es siempre el mismo.
Notemos que r_0 no es la distancia física;

$$\boxed{L = \int_0^{r} \sqrt{A}\, dr}$$



● Esquema de Parametrización Post-Newtoniana

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2$$

Existen variantes de GR que hacen que la solución de vacío no sea Schwartzchild. El principio de equivalencia establece que el:

$$g_{00} \propto 1 - 2\frac{M}{r} + O\left(\frac{M}{r}\right)^2$$

para que tienda a Newton lejos de las masas.

$$B(r) = 1 - 2M/r + O([M/r]^2)$$

$$A(r) = 1 + O(M/r)$$

Como el resto de la métrica no tenía constraints extras teníamos que bastaba con que fuese igual a MINKOWSKI en $r\to\infty$.
Esto deja lugar a teorías alternativas que se manifiestan en:

$$\boxed{\begin{aligned} B(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + 2(\beta-\gamma)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + \dots \\ A(r) &= 1 + \frac{2\gamma M}{r} + \dots \end{aligned}}$$

que serán:

*GR: $\beta=\gamma=1$

$$g_{rr} = A(r) = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}$$

Ahora bien, calculando en estos nuevos enfoques los resultados de GR que se contrastan en la realidad:

$$\delta\phi_{def} = \frac{4M}{L}\,\frac{(1+\gamma)}{2}$$

$$\Delta\phi_{prec} = \frac{1}{3}(2+2\gamma-\beta)\frac{6\pi M}{L}$$

El corrimiento de la luz al rojo sólo testea el principio de equivalencia (depende sólo del g_{00}).
Hay otro test que es el retardo temporal de Shapiro, porque la luz pasa cerca de un objeto masivo. Este depende de γ.
Con la data observacional se acotan como:

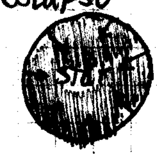
$$\gamma = 1.000 \pm 0.002$$

$$\beta = 1.000 \pm 0.003$$

● Black Holes
Partimos de la métrica de Schwarzschild,

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2 \qquad [1]}$$

colapso



Teorema de Birkhoff

$r = r_* > 2M$

Existen problemitas aquí en esta métrica:

$r=2M \quad g_{00}=0 \quad g_{rr}=\infty$

$r=0 \quad g_{00}=\infty \quad g_{rr}=g_{\theta\theta}=g_{\phi\phi}=0$

$\theta=0 \quad g_{\phi\phi}=0$

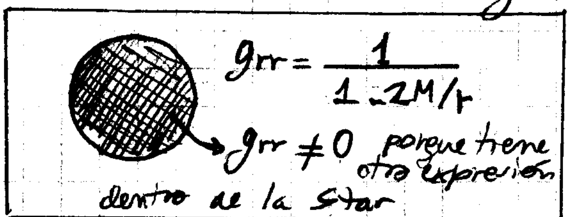
Quisiéramos ver si son problemas de las coordenadas o del et mismo

$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$$

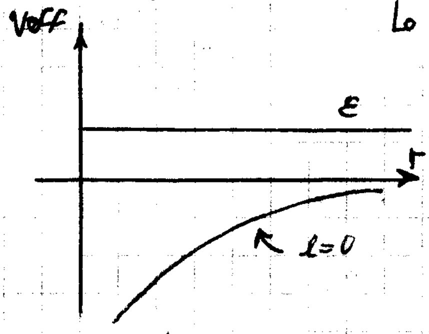
Un escalar debe valer lo mismo en todos sistema ⇒ es indepte de las coordenadas

Si calculamos $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ obtenemos $48M^2/r^6$. Esto sugiere que en $r=0$ tengo curvatura ∞. Entonces realmente tengo una singularidad en $r=0$.
Esto supone que [1] es válido en todo el espacio; es decir que la materia ha colapsado hasta $r=0$. No es el caso de la figura



Del mismo $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ surge que $r=2M$ no parece ser una singularidad del espacio-tiempo.

Un cálculo interesante es el tiempo que tarda un objeto en caer desde un punto hasta $r=2M$.



Lo soltamos desde $r=R$ con un $l=0$. Esperamos que el objeto se mueva hasta $r=2M$ y luego después de él. El Veff será:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^2 - 1 + \frac{2M}{r} \Rightarrow$$

$$\int d\tau = \int_R^{2M} -\frac{dr}{\sqrt{e^2-1+2M/r}}$$

$$\Delta\tau = \int_{2M}^{R} \frac{dr}{\sqrt{e^2-1+2M/r}} < \infty$$

llego en un $\Delta\tau < \infty$ a $2M/r$. El tiempo coordenado

$$e = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

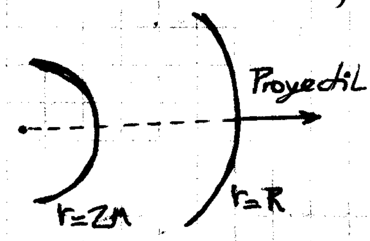
$$dt = e\, d\tau \Big/ \left[1-\frac{2M}{r}\right]$$

$$dt = -\frac{e\, dr}{\sqrt{e^2-1+\frac{2M}{r}}\left(1-\frac{2M}{r}\right)}$$

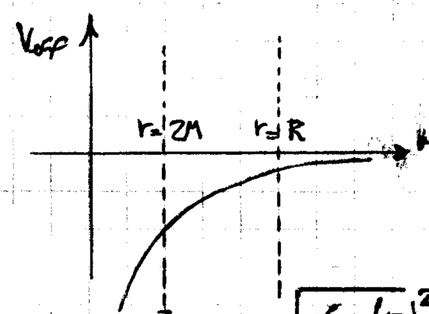
$$\Delta t = \int_{2M}^{R} \frac{e\, dr}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{e^2-1+\frac{2M}{r}}} \not< \infty$$

El tiempo coordenado es ∞: implicaría que tenemos un problema con las coordenadas

Veamos ahora un cálculo de velocidad de escape de un proyectil que quiero lanzar con ánimo de que no vuelva y que se vaya al ∞.



Del gráfico vemos que con $E \geq 0$ tengo escape y $E=0$ implica la mínima velocidad.



$l=0$
[mov. radial]
$E=0$

$$E = 0 = \frac{e^2-1}{2} \qquad \boxed{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r}}$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}}$$

, luego la cuadrivelocidad será:

$$\underset{\sim}{U} = \left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}, \sqrt{\frac{2M}{r}}, 0, 0\right)$$

Meto un observador en reposo en $r=R$.

$$\underset{\sim}{U}_{obs} = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0\right)$$

$$\underset{\sim}{U}_{obs} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}, 0, 0, 0\right)$$

, pero el impulso del proyectil será

$$\underset{\sim}{P} = m\, \underset{\sim}{U}$$

Entonces la energía medida por el observador es:

$$E = -\underset{m}{p} \cdot \underset{m}{U}_{obs} = -m\, \underset{m}{U} \cdot \underset{m}{U}_{obs}$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}$$

Pero para el observador tienen que verse las cosas como en SR, es decir:

$$E^2 = m^2 + (p^{\hat{i}})^2$$

ya que usa su base ortonormal. Finalmente

$$\boxed{v_{escape}^2 = \frac{2M}{R}}$$

Esta es la fórmula clásica y vemos que en $R = 2M$ es

$$\boxed{v_{escape} = c}$$

Práctica

• Problema 3

Agregamos hipótesis:

- star esféricamente simétrica
- b: parámetro de impacto
- $r = R$ máx. acercamiento. Observador en reposo allí.

El cometa es una partícula de prueba moviéndose en el et externo a nuestra "estar".

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2MG}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

EL cometa está libre, se moverá en una geodésica. Usamos las cosas que se conservan. Sea $\underset{m}{U}_{com}$ la cuadrivelocidad

1. $\underset{m}{U}_{com} \cdot \underset{m}{U}_{com} = -1$
2. $\underset{m}{\xi} \cdot \underset{m}{U}_{obs} \equiv -e = g_{tt}\frac{dt}{d\tau}$
3. $\underset{m}{\eta} \cdot \underset{m}{U}_{obs} \equiv l = g_{\phi\phi}\frac{d\varphi}{d\tau}$

Son cantidades que se conservan a lo largo de la geodésica

[2] $\quad -e = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$

[3] $\quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad l = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$

y reemplazando:

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 g_{tt} + \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 g_{\varphi\varphi} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 g_{rr} = -1$$

$$\underset{m}{U} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, 0, \frac{d\varphi}{d\tau}\right)$$

expresión en base coordenada de Schwarzschild.

$$\boxed{-1 = \frac{-e^2}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2}} \quad [A]$$

Habría que escribir todo en función de los datos. En $r \to \infty$ en [A]

$$-1 + e^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 0 \quad (1)$$

pero muy lejos de la ~~pl~~ estrella el cometa se mueve en una recta con parámetro de impacto 'b', es:

$$r \cdot \operatorname{sen}\varphi = b \quad (\text{de}$$

$$r \cdot \varphi \approx b \quad (\text{si}$$

$$\varphi \approx \frac{b}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} \cong -\frac{b}{r^2}\frac{dr}{d\tau} \rightarrow$$

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = l \cong -b\frac{dr}{d\tau}$$

$$l = -b\frac{dr}{d\tau} \rightarrow \left(\frac{l}{b}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^2 - 1 \quad (2)$$

En $r = R$ está el punto de máximo acercamiento

$$\left.\frac{dr}{d\tau}\right|_R = 0 \Rightarrow \text{de [A] sale que}$$

$$-1 = \frac{-e^2}{\left(1-\frac{2MG}{R}\right)} + \left(\frac{l}{R}\right)^2 \quad ③$$

Juntando todo resulta que podemos poner l^2 y e^2 en términos de R, b, M.

$$\boxed{l^2 = \frac{2MG}{R\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2MG}{R}\right)\right)}}$$

3-11-08

$$\boxed{\left(\frac{e}{l}\right)^2 = \frac{R}{2MGb^2} + \frac{1}{2MGR}\left(1-\frac{2MG}{R}\right) - \frac{1}{b^2}}$$

Observador en $r=R$. Me construyo una base ortonormal. $\{e_{\hat{\alpha}}\}$ donde $e_{\hat{0}} = \underset{\sim}{U}_{obs} \Rightarrow$

$$E = -\underset{\sim}{U}_{obs} \cdot \underset{\sim}{P}_{com}$$

y en general:

$$P^{\hat{i}} = e^{\hat{i}} \cdot \underset{\sim}{P}_{cometa}$$

$$\underset{\sim}{U}_{cometa} = U^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}$$

$$U^{\hat{\alpha}} = \left(\gamma(v), \gamma(v)\vec{v}\right)$$

$$\boxed{v^{\hat{\alpha}} = \frac{U^{\hat{\alpha}}}{U^{\hat{0}}}}$$

$$\underset{\sim}{U} = U^{\alpha}_{com} e_{\alpha} = U^{\hat{\alpha}}_{com} \underset{\sim}{e}_{\hat{\alpha}}$$

$$e_{\alpha} = \{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$$

Relaciono ahora las bases como es usual:

$$e_{\hat{r}} = \left.\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\right|_R e_r \quad , \quad e_{\hat{0}} = \underset{\sim}{U}_{obs}\Big|_R$$

$$e_{\hat{\theta}} = \left.\frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\right|_R e_\theta$$

$$e_{\hat{\varphi}} = \left.\frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\right|_R e_\varphi$$

$$U^{\alpha}_{obs} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2MG}{R}}}, 0, 0, 0\right) \text{ en } \{e_\alpha\}$$

$\rightarrow g_{00}]_R$

$$U^{\hat{\varphi}} = U^{\varphi}\sqrt{g_{\varphi\varphi}}\Big|_R \qquad U^{\hat{0}} = U^{0}\sqrt{g_{00}}\Big|_R$$

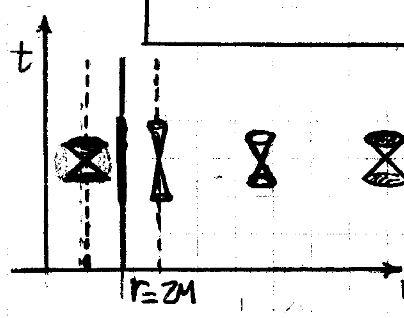
$$\boxed{v^{\hat{\varphi}} = \sqrt{\frac{2MG}{R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^2 + 1}}}$$

■ Teoría

● Agujeros Negros

Seguimos con el tema de las angularidades.

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}$$



Si queremos ver los conos de luz hacemos $ds^2 = 0$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)}$$

Vemos que con $r \to \infty$ los conos de luz tienden a los de SR (en rojo en la figura). Con un r chico, las rectas tienden a una pendiente infinita. Al sobrepasar el valor $r=2M$ se invierten los conos debido a una discontinuidad del sistema de coordenadas.

También vemos que r = cte es siempre coordenada espacial $(r>2M)$ pero cambia a temporal en $(r<2M)$, cambian de signo g_{rr} g_{tt}. Se invierten los roles de coordenada temporal y espacial entre 'r' y 't'.

Hacemos un cambio de coordenadas:

$$r^*: \quad dr^* = \frac{dr}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}, \quad (r>2M)$$

$$\Rightarrow r^* = \int \frac{dr}{1-2M/r} = r + 2M\log\left(\frac{r}{2M}-1\right)$$

Introduzco: $\boxed{v = t + r^*}$

$$(t, r, \theta, \phi) \longrightarrow (v, r, \theta, \phi)$$

Escribo la métrica en estas nuevas coordenadas

$$dt = dv - dr^*$$
$$dt = dv - dr/\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Haciendo este cálculo se tiene:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dv\,dr + r^2 d\Omega_2} \quad [1]$$

que son las coordenadas de Eddington-Finkelstein [avanzadas].

Calculando los conos de luz para [1]

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 = 2dv\,dr$$

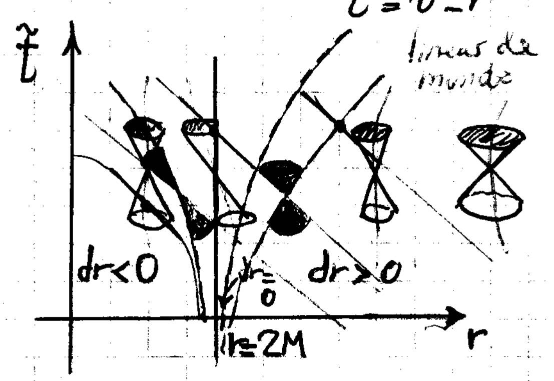
1) $dv = 0$ 2) $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv = 2dr$

Desde aquí surgen las soluciones

$$v = cte$$

$$v = cte + 2r^*$$

Representamos en función de una nueva coordenada $\tilde{t} = v - r$



1) Si $v = cte$ se tiene $\tilde{t} = v_0 - r$ (rectas a 45°).

2) $dv = \frac{2dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = d\tilde{t} + dr$ → $v = \tilde{t} + r$

$$\Rightarrow d\tilde{t} = dr \frac{\left(1 + \frac{2M}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

Con r muy grande tengo los conos de SR. En $r = 2M$ se hace nulo el dr y la recta del cono de luz se hace vertical.

Ahora queremos ver qué le pasa a las trayectorias de las partículas. En $r = 2M$ no puedo volver hacia afuera (salir del cono de luz). Viola causalidad.

Ahora entonces la transición es continua. Extendemos la métrica de Schwarzschild:

$$\begin{matrix} r > 2M \\ -\infty \le t \le +\infty \\ \theta, \phi \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} v, r, \theta, \phi \\ 0 < r < \infty \\ \underline{\text{EXTENSIÓN}} \end{matrix}$$

ahora no tiene problemas en $r = 2M$.

Si un tensor es cero en un sistema, lo es en todos los sistemas. $r = 2M$ es una superficie nula y mal elegida.

La superficie $r = cte.$ pasa a cambiar de carácter

$$\boxed{r = cte. \begin{cases} \text{tipo tiempo} & r > 2M \\ \text{tipo espacio} & r < 2M \end{cases}}$$

Asimismo se corresponden:

$$r = 2M \quad \text{con} \quad t = +\infty$$

esto se ve desde:

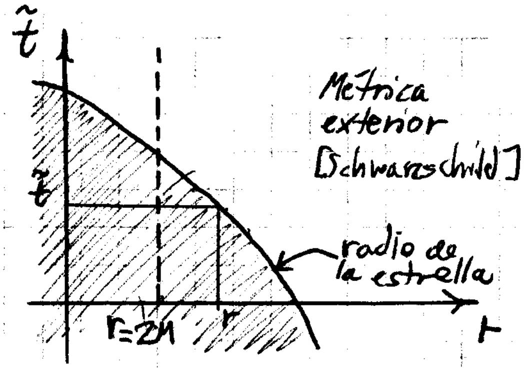
$$v = t + r^*$$
$$v = t + r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

pues $v < \infty$ pero $t \to \infty$.

La superficie $r = 2M$ separa las regiones de NO RETURN. Son dos regiones del espacio cualitativamente diferentes. Se llama HORIZONTE DE SUCESOS (el point of no return).

Esto recibe el nombre de AGUJERO NEGRO. Sin embargo lejos de $r = 2M$, la métrica es indistinguible de la de un objeto NO COLAPSADO. Nos lleva a pensar en que algo lejos del agujero negro no necesariamente lo notará.

Podemos hacer un diagrama del radio del objeto que va colapsando. En algún momento la superficie cruza $r = 2M$ y es un BH: la singularidad queda a la vista.



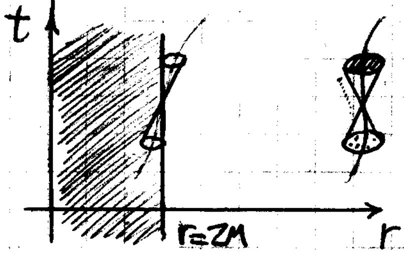
Ahora veamos las coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas. Ahora podríamos introducir

$$\boxed{u = t - r^*}$$

$$(t, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u, r, \theta, \phi)$$

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2 du.dr + r^2 d\Omega_2} \quad [2]$$

, es una ~~inversión~~ temporal de la anterior. Esto tiene interés matemático y se podría corresponder a un agujero blanco



- **La extensión de Kruskal**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2 d\Omega_2$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \underbrace{\left[-dt^2 + dr^{*2}\right]}_{= -du dv} + r^2 d\Omega_2$$

Ahora si hacemos el cambio:

$$(t, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u, v, \theta, \phi)$$

$$u = t - r_*$$
$$v = t + r_*$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega_2$$

$$r = r(u, v) \quad r_* = \frac{v - u}{2} = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$\frac{v - u}{4M} = \frac{r}{2M} + \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$e^{\frac{v-u}{4M}} = e^{\frac{r}{2M}}\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-\frac{r}{2M}} e^{\frac{v-u}{4M}} du dv$$

, donde por un momento considero que $d\Omega_2 = 0$, y hacemos otro cambio de variables

$$\begin{cases} U = -e^{-u/4M} \\ V = +e^{v/4M} \end{cases} \Rightarrow$$

$$dU = \frac{1}{4M} e^{-u/4M} du$$

$$dV = \frac{1}{4M} e^{v/4M} dv$$

, luego de este paso la métrica resulta ser,

$$\boxed{ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV}$$

y se ve que no hay problema en $r = 2M$ aunque $r = r(U, V)$.

Debemos notar que $U < 0$ y $V > 0$, pero necesito ahora EXTENDER esta nueva métrica a todos posibles valores de U, V compatibles con $r \geq 0$.

Un ultimísimo cambio de variables haría:

$$\begin{cases} X = \frac{V - U}{2} \\ T = \frac{V + U}{2} \end{cases}$$

$$dU dV = dT^2 - dX^2$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r}\left[-dT^2 + dX^2\right] + r^2 d\Omega_2}$$

y tenemos la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal. Se cumple que X, T son tales que $r \geq 0$.

La relación final entre coordenadas son:

$$\boxed{\frac{r-2M}{2M}e^{r/2M}=X^2-T^2}$$

$$\boxed{\frac{t}{2M}=\ln\left(\frac{T+X}{-T+X}\right)=2\,\text{atanh}\left(\frac{T}{X}\right)}$$

Vemos que con $r=0$

$$X^2-T^2=-1$$

con $r>0$

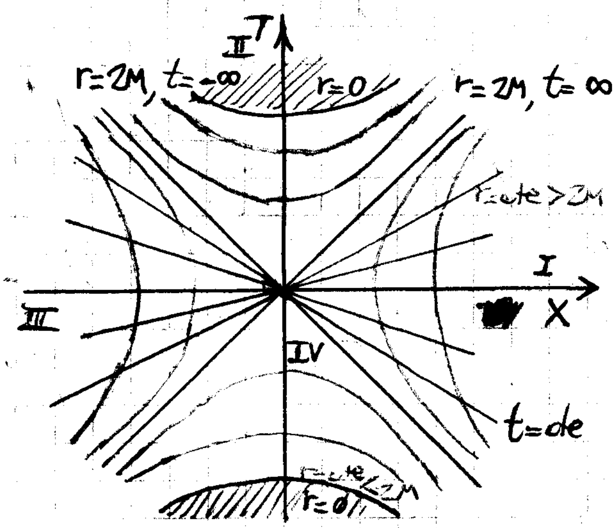
$$X^2-T^2>-1$$

Asimismo con $r=cte$ se tiene:

$$\boxed{X^2-T^2=cte}\begin{cases}>0 & r>2M\\ <0 & r<2M\end{cases}$$

y las líneas con $t=cte$ resultan:

$$\boxed{\frac{T}{X}=cte}$$

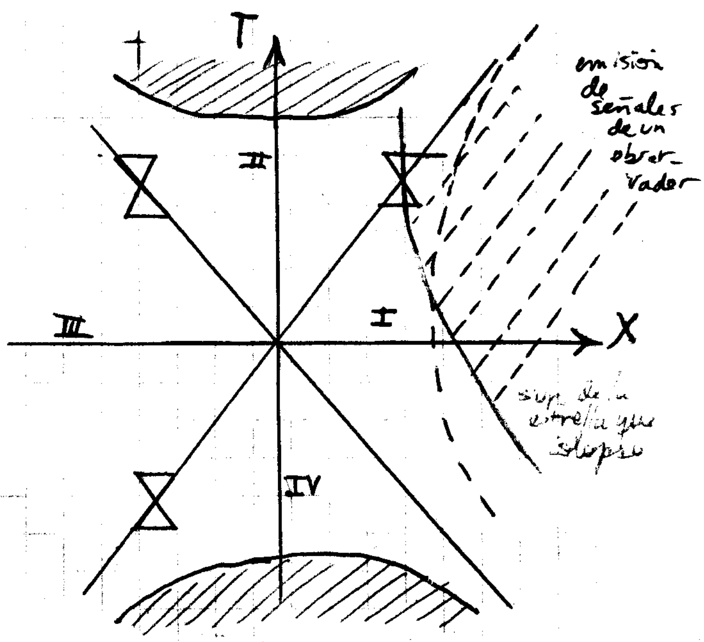


Las líneas $t=cte$ tienen sentido en los cuadrantes I y III donde vale que $T<X$ para que atanh ~~tenga sentido~~.

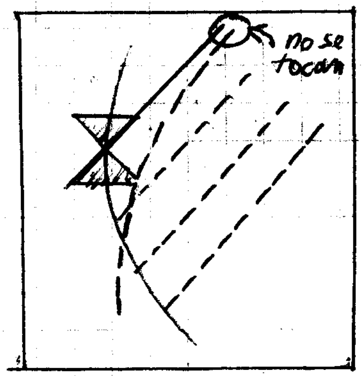
Para ver los conos de luz, consideramos

$$\theta=\phi=cte$$

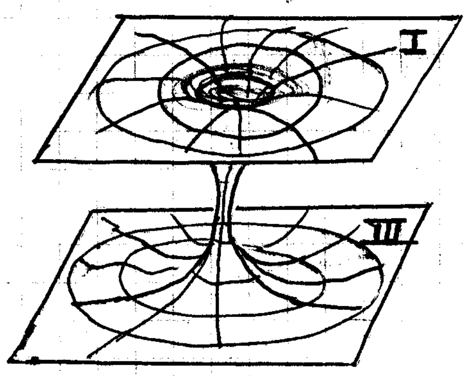
$$\boxed{ds^2=\frac{32M^2e^{-r/2M}}{r}\left(-dT^2+dX^2\right)}$$



Vemos que el haz de luz que salen del observador que cae en el BH no llegan (a partir de que llega al horizonte de sucesos) al observador en $r=cte$ (línea - - -).



Tratemos de ver en un diagrama inmerso qué es lo que todo esto significa. Considerando $T=0$ surge el famoso GARGANTA de SCHWARZCHILD, parecido al del wormhole. Los haces de luz no atraviesan (no hay conexión causal)



Práctica

- **Problema 3 [Comentario]**

Había quedado pendiente justificar la necesidad del observador de estar en un SLI. Ahí el observador construye una base ortonormal:

$$\{e_{\hat\alpha}\}\text{ en }P\ :\ \underset{\sim}{e}_{\hat\alpha}\cdot\underset{\sim}{e}_{\hat\beta}=\eta_{\hat\alpha\hat\beta}$$

$$e_{\hat 0}=u_{obs}$$

Dado una base, se tenía:

$$ds^2 = (dX^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha)\cdot(dX^\beta \underset{\sim}{e}_\beta)$$
$$= dX^\alpha dX^\beta \underset{\sim}{e}_\alpha \cdot \underset{\sim}{e}_\beta$$
$$ds^2 = dX^\alpha dX^\beta g_{\alpha\beta}\,, \text{ pero tmb.}$$
$$ds^2 = dX^{\hat\alpha} dX^{\hat\beta} \underbrace{g_{\hat\alpha\hat\beta}}_{\to \eta_{\hat\alpha\hat\beta}}$$

No fue requisito pararse en un SLI, sino sólo elegir una base ortonormal; pero $dX^{\hat 0}$ tiene el sentido físico de ser el intervalo de tiempo propio medido por el observador.

$$ds^2\Big|_{\substack{\text{con}\\ dX^{\hat i}=0}} = -(dX^{\hat 0})^2 = -d\tau^2_{obs.}$$

en este caso:

$$\frac{dX^{\hat i}}{dX^{\hat 0}} = v^{\hat i} = \frac{dX^{\hat i}/d\tau}{dX^{\hat 0}/d\tau}$$

, es la velocidad medida por el observador, aunque NO ES UN VECTOR.

$$v^{\hat i} = \frac{U^{\hat i}}{U^{\hat 0}}$$

$$ds^2 = -(dX^{\hat 0})^2\left[1 - \sum_i \left(\frac{dX^{\hat i}}{dX^{\hat 0}}\right)^2\right]$$

$$ds^2 = -(dX^{\hat 0})^2\left[1 - |\vec v|^2\right]$$

, en el caso del problema del cometa se tiene que:

$$-d\tau^2_{com} = -(dX^{\hat 0})^2\underbrace{(1 - |\vec v_{com}|^2)}_{\gamma^{-2}(v_{cometa})}$$

$$\Rightarrow \boxed{U^{\hat\alpha} = \left(\gamma(v_{com}), \gamma(v_{com})\vec v\right)}$$

• **Problema 10 (BH rotante)**

Con los datos $\theta = \pi/2$

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4aM}{r}dt\,d\varphi + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)d\varphi^2}$$

Esto constituye la solución de Kerr (1963) y las coordenadas son las de Boyer-Lindquist.

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$$
$$a = J/M$$

, donde J es el momento angular del BH. Con $a=0$ es la métrica de Schwarzschild. Para $M=0$ deberíamos recuperar la métrica de Minkowsky. Esta es la solución del exterior de un cuerpo esférico con simetría axial (no esférica). La métrica es independiente de ϕ, t.

$$\underset{\sim}{\xi} = \partial_t \qquad \underset{\sim}{\eta} = \partial_\varphi$$

Dado el término cruzado $dt\,d\varphi$ no tiene simetría de inversión temporal. La inversión temporal induce un cambio de signo en $a \to$ BH rotando en el otro sentido.

Veremos que no hay caída radial al BH: no hay solución de geodésica radial.

$$-e = \underset{\sim}{\xi}\cdot\underset{\sim}{U} = -g_{t\mu}\frac{dX^\mu}{d\lambda}$$

, con λ parámetro afín de la geodésica

$$\boxed{-e = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} - \frac{2Ma}{r}\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda}} \quad [1]$$

y vemos que para $r\to\infty$ es $-e = \frac{dt}{d\lambda}$

$$\boxed{l = \underset{\sim}{\eta}\cdot\underset{\sim}{U} = +\frac{2Ma}{r}\frac{dt}{d\lambda} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\frac{d\varphi}{d\lambda}} \quad [2]$$

$$\boxed{\underset{\sim}{U}\cdot\underset{\sim}{U} = \begin{cases}-1\\ 0\\ 1\end{cases}} \quad [3]$$

Puedo igualar $\frac{dt}{d\lambda} = \underset{\text{desde [2]}}{\uparrow} = \underset{\text{desde [1]}}{\uparrow}$

para despejar $\frac{d\varphi}{d\lambda}$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)l + \frac{2Ma}{r}e\right]} \quad [i]$$

, no hay vector tangente solo radial. A medida que cae cambia la posición angular.

Metiendo [i] en [2] se obtiene:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)e - \frac{2Mal}{r}\right]$$

Usamos ahora [3] con el (-1), geodésica tipo temporal:

$$\boxed{\begin{aligned}-1 = &-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{\Delta^2}\left[\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)e - \frac{2Ma}{r}l\right]^2 - \frac{4aM}{\Delta^2 r}\times \\ &\left[\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)e - \frac{2Ma}{r}l\right]\times \\ &\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)l + \frac{2Ma}{r}e\right] + \frac{r^2}{\Delta}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \\ &+ \left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)\frac{1}{\Delta^2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)l + \frac{2Mae}{r}\right]^2\end{aligned}} \quad [iii]$$

con $r\to\infty$

$$e^2-1 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{e^2 \geq 1} \Rightarrow e \neq 0$$

Cuando lo ponemos como,

$$e=1 \ (\tau=\lambda) \rightarrow \left.\frac{dr}{d\lambda}\right|_{r\to\infty} = 0$$

$$e=0 \rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} \underset{r\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Obtengo entonces; de [iii]

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff}(r, e=1, l=0) = 0}$$

$$\boxed{V_{eff} = -\frac{M}{r} - \frac{Ma^2}{r^3}}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\varphi}{d\lambda}\right|_{\substack{e=1\\ l=0}} = \frac{2Ma}{r\Delta}}$$

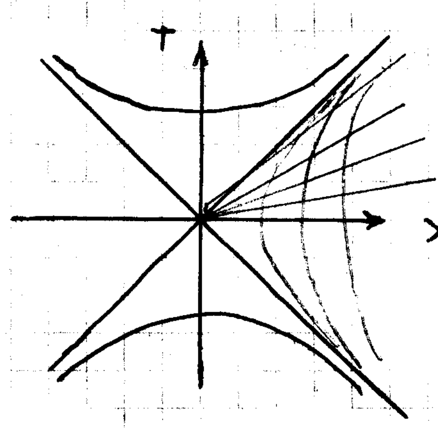
, que sale de meter $e=1$, $l=0$ en [i]

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \frac{-2Ma}{r\Delta\sqrt{\frac{2M}{r}\left(1+a^2/r^2\right)}}}$$

Tip: ▲ problema de parcial

■ Teoría 5-11-08

● Resumen Coordenadas Kruskal [de la clase anterior]



Teníamos la figura. Habíamos pasado el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r}\left[-dT^2 + dX^2\right] + r^2 d\Omega_2}$$

En el diagrama los conos son rectas a 45° y sale la estructura causal. La relación entre coordenadas

$$[1] \quad \boxed{\frac{t}{4M} = \text{atanh}\left(\frac{T}{X}\right) = \ln\left(\frac{T+X}{X-T}\right)}$$

$$[2] \quad \boxed{\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M} = X^2 - T^2 \equiv \alpha^2}$$

Siempre partimos de $r > 2M$. Usabamos r^* con un logaritmo dentro. Cambiemos entonces, suponiendo $r > 2M \Rightarrow$

$$1 = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{T}{\alpha}\right)^2$$

, luego:

$$\frac{X}{\alpha} = \cosh\beta$$

$$\frac{T}{\alpha} = \operatorname{senh}\beta$$

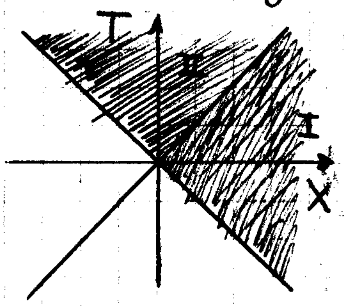
$$\frac{T}{X} = \tanh(\beta) \to \beta = \frac{t}{4M}$$

$$X = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$T = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4M}} \operatorname{senh}\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Entonces con: $2M \leq r \leq \infty$
$-\infty < t < \infty$

se mapea la región ■. Pero supongamos que extendemos las ecuaciones [1] [2] a la región



$$0 \leq r \leq 2M$$

Entonces:

$$\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{T}{\alpha}\right)^2 = -1$$

, se alternan quienes son el cosh y el senh. Luego

$$X = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$T = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cdot \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Entonces con: $0 \leq r \leq 2M$
$-\infty < t < \infty$

se mapea la región ■.

En (I) las líneas $T = cte$ son espaciales y las de $X = cte$ son líneas de mundo. En (II) se invierte este carácter.

Por supuesto <u>NO SE PUEDEN</u> <u>cubrir ambos cuadrantes</u> <u>a la vez</u> por la relación 'r' y '$2M$'.

Esta solución geométrica es casi puramente matemática porque comienza y termina en una singularidad y tiene dos regiones disconexas que son asintóticamente planas.

● Agujeros Negros (más generales)

Le ponemos un parámetro carga al agujero negro. La métrica de Reissner - Nordskam

Tenemos dos horizontes de sucesos

$$ds^2 = -B\,dt^2 + A\,dr^2 + r^2 d\Omega_2$$

$$B = A^{-1} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2}\right)$$

, cuyos parámetros son M, Q

También podemos analizar el BH de Kerr, de parámetros M, J (un agujero sin simetría esférica)

Hay otra solución BTZ para un espacio con 2+1 dimensiones y constante cosmológica ($\Lambda \neq 0$).

● Agujeros Negros Astrofísicos

En forma rápida los dividimos en

BH en sistemas binarios

BH en centros de galaxias

Se sabe hoy que 2/3 de las estrellas están en sistemas binarios. Se pueden inferir los parámetros de la órbita de la estrella (en general no se ve la componente en muchos casos, pero se sospecha presencia de BH si el sistema emite fuertemente rayos X (la masa que "cae" al BH). A través de la órbita vemos que si la masa del objeto no visible si la masa es mayor a $3M_\odot$ y no emite radiación visible debe ser un BH.

Estudios evidencian que en los centros galácticos se generan BH del orden de $3 \cdot 10^6 M_\odot$ (monstruosos)

● Cosmología

Implica el estudio del Universo a gran escala. Quisiéramos hacer un miniprograma

1 Introducción
[escalas y fenómenos más relevantes]

2 Métricas de Robertson-Walker (isótropos y homogéneos) Para ver aspectos cinemáticos y dinámicos

Comencemos con una introducción a los tamaños y escalas:

- estrella más cercana 1.33 pc
- centro de la galaxia 10 Kpc
- cúmulos de galaxias (tam) 1 Mpc
- supercúmulos (tam.) 100 Mpc
- Universo visible (tam) 14 Gpc

A escalas mayores a los supercúmulos vemos que el Universo es isótropo y homogéneo. Para:

$$d \gtrsim 100\ Mpc$$

Universo → homogéneo e isótropo

En 1929 Hubble confirma que las galaxias se alejan proporcionalmente a su distancia

$$\boxed{v = H d}$$

, donde $H \equiv$ constante de Hubble y v es la velocidad de recesión. Hasta no hace mucho (15 años)

$$H = h \cdot 100 \ \frac{km/seg}{Mpc}$$

, con $0.4 < h < 1$. Hoy en día se usa

$$H = 72 \ \frac{km/seg}{Mpc}$$

Con las estimaciones actuales sabemos que

$$\rho_{visible} \sim 10^{-33}\ g/cm^3 \cong \frac{1\ \text{protón}}{m^3}$$

Pero si aceptamos la expansión del universo para explicar la se tendría

$$\rho_{total} \ggg \rho_{visible}$$

, es decir la densidad necesaria para producir la expansión que vemos es mucho mayor a la materia que vemos. Parte de esta densidad puede venir de la constante cosmológica.

La CBR corresponde, a espectro, a un cuerpo negro de $3\ °K$

$$T = 2{,}72 \pm 0{,}001\ °K$$

Asimismo la densidad de la radiación

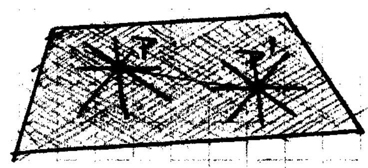
$$\rho_{rad} = 10^{-3} \rho_{visible}$$

En diferentes direcciones las variaciones de T son casi despreciables. Nos quedaremos entonces con la

$$\boxed{\text{homogeneidad + isotropía}}$$

- Métricas de Robertson-Walker

Arrancamos intuitivamente con el concepto isótropo y homogéneo. Isotropía infiere que todas las direcciones son equivalentes y esto lleva a simetría esférica.



Homogeneidad implicaría la equivalencia de todos los puntos

Schwarschild cumple isotropía pero no homogeneidad; si es simétrica esf.,

$$\boxed{dl^2 = A(r)\, dr^2 + r^2 d\Omega_2}$$

Una cierta cantidad evaluada en diferentes puntos debe dar el mismo resultado. Por ejemplo, si evaluamos

$$\boxed{{}^{(3)}R = cte.}$$

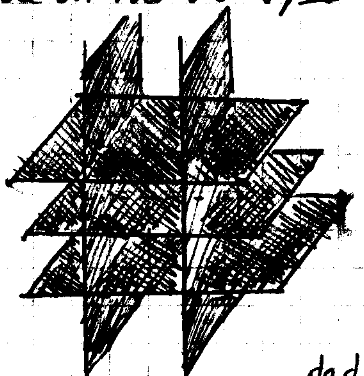
el escalar de curvatura es constante. Si esto es así, casi queda fijado el $A(r)$.

Definimos un espacio-tiempo isótropo y homogéneo; en detalle

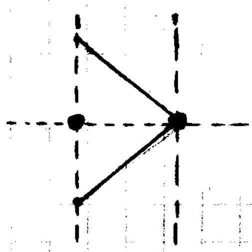
et → ESPACIALMENTE isótropo y homogéneo

, no hay isotropía en el tiempo.

Puedo definir un et de esta índole si $\exists$ una familia de 3-superficies espaciales que cubren el espacio tiempo (una foliación) y son isótropas y homogéneas. Existen además una familia de curvas de tipo tiempo tales

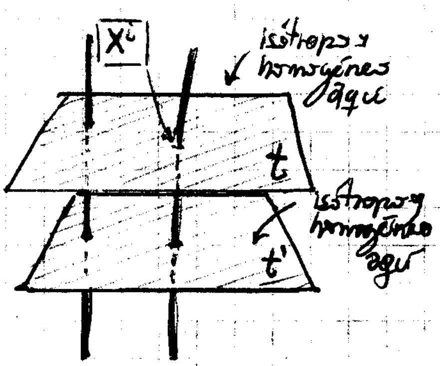


que las 3-superficies de simultaneidad son isótropas y homogéneas. Donde la simultaneidad la definimos como en la figura de abajo (visto hace tiempo).



Entonces la idea es que el et se puede "foliar" en superficies 3D espaciales y que existen curvas temporales.

Elegimos ahora un sistema de coordenadas comóviles.



Con estas coordenadas la métrica puede escribirse como sigue:

$$ds^2 = -g_{00}\,dt^2 + g_{0i}\,dt\,dx^i + g_{ij}\,dx^i dx^j$$

, pero si $t = cte.$ es una superficie de simultaneidad, entonces:

$$g_{0i} = 0$$

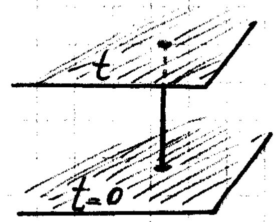
Lo podemos ver como $\underset{\sim}{U} \perp$ superficie $\Rightarrow g_{0i} = 0$

NB

Estamos buscando que en cada plano a un dado t sea el universo isótropo y homogéneo a cada t. Esto define un conjunto de observadores. Pero no cualquier sup. es isótropa y homogénea sino aquella que se halle a t constante.

$$\underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{V} = U^0 V^i g_{0i} = 0$$

para cualquier vector $\underset{\sim}{V}$ de la superficie. Podemos elegir que t sea el tiempo propio transcurrido por un observador, luego:



$$g_{00} = 1$$

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, \vec{r})\,dx^i dx^j$$

entonces:

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[A(r)\,dr^2 + r^2 d\Omega_2\right]}$$

, hemos podido elegir coordenadas para que sea. Podríamos ver que ${}^{(3)}R = cte$ implica $A(r) = \dfrac{1}{1-kr^2}$ con $k = 0 + 1 - 1$.

Geométricamente vemos que $k=0$ es la métrica de R-W plana y es una métrica de $\mathbb{R}^3$ con un factor que hace modificar la misma con el avance del tiempo.

Si $k=1$ es la métrica de RW cerrada y podemos hacer un cambio de variables

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \Rightarrow$$

$$\rho = \operatorname{asen}(r)$$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\rho^2 + \operatorname{sen}^2\rho\, d\Omega_2\right]}$$

Si $k=-1$ es la métrica de RW abierta y con el cambio de variables es

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} \Rightarrow$$

$$\rho = \operatorname{asenh}(r)$$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\rho^2 + \operatorname{senh}^2(\rho)\, d\Omega_2\right]}$$

es una hipérbola en un espacio de

Minkowski de 4D.

Práctica

Problema 7

Emisión de ondas de radio a la vez que se cae en el BH con un efecto rojo $e^{-t/\alpha}$

$$\omega_e \gg \omega_{obs} \text{ en } r_{RECEP} \to \infty$$

$$r_e \sim 2MG$$

$$\tau_{obs} \sim t \quad \text{con } r_{RECEP} \to \infty \text{ (Métrica Mink.)}$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{\Delta\tau_e} \qquad \omega_R = \frac{2\pi}{\Delta t_R}$$

$\Delta\tau_e$: tiempo propio del emisor; Δt_R: tiempo propio del observador (recepción)

Cerca del valor $r=2MG$ conviene cambiar de coordenadas

$$t \to v = t + r + 2MG \ln\left|\frac{r}{2MG} - 1\right|$$

$$ds^2\Big|_{\theta=\phi=cte} = 0$$

, esto corresponde a geodésicas radiales.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2 d\Omega_2$$

$$ds^2\Big|_{d\Omega_2=0} = 0 \Rightarrow$$

$$-\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)dv^2 + 2\,dv\,dr = 0$$

, de acá extraemos dos resultados

$$\boxed{v(r) = 2r + 4MG \ln\left|\frac{r-2MG}{2MG}\right| + cte.}$$

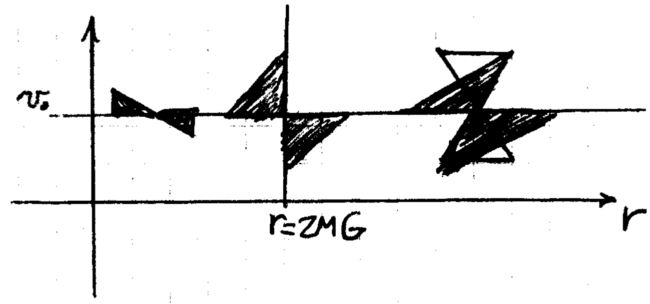
es una geodésica saliente (r crec)

$$\boxed{v(r) = cte}$$

es una geodésica entrante. (r decrec)

Nos quedamos con la saliente porque nos interesa el envío de las señales hacia el exterior.

La evolución en "r" de los conos



Los eventos relevantes son

EMISIÓN	señal #1	(v_1, r_1)
RECEP.	#1	(v_{R1}, r_{R1})
EMISIÓN	#2	(v_2, r_2)
RECEP.	#2	(v_{R2}, r_{R2})

, pero $r_{R1} = r_{R2} \to \infty$ (se recibe muy lejos).

$$v(r_1) = 2r_1 + 4MG \ln\left|\frac{r_1}{2MG} - 1\right| + A \leftarrow A \text{ cte}$$

$$v(r_{R1}) = 2r_{R1} + 4MG \ln\left|\frac{r_{R1}}{2MG} - 1\right| + A$$

Como $r_1 \approx 2MG \to$

$$v(r_1) \approx 4MG \ln\left|\frac{r_1}{2MG} - 1\right| + A$$

$$v(r_{R1}) \approx 2r_{R1} + A \qquad \text{uso que } r_{R1} \ggg \ln\left|\frac{r_{R1}}{2MG} - 1\right|$$

, luego

$$A \approx v_{R1}(r_{R1}) - 2r_{R1}$$

$$A \approx -4MG \ln\left|\frac{r_1}{2MG} - 1\right| + v_1(r_1)$$

$$= v_{R1}(r_{R1}) - 2r_{R1}$$

, pero $v = t + r + \ln\left|\frac{r}{2MG} - 1\right|$

$$v \approx t + r \quad (r \to \infty)$$

entonces

$$v \approx t + r \Rightarrow$$

$$A \approx t_{R_1} - r_{R_1}$$

$$\ln\left|\frac{r_1}{2MG} - 1\right| \approx \frac{-1}{4MG}\left[t_{R_1} - r_{R_1} - v_1(r_1)\right]$$

, con $r_1 > 2MG$

$$\frac{r_1}{2MG} - 1 \approx \exp\left\{\frac{-(t_{R1} - r_{R1} - v_1(r_1))}{4MG}\right\}$$

, similarmente:

$$\frac{r_2}{2MG}-1\approx \exp\left\{\frac{-(t_{R_2}-r_{R_2}-v_2(r_2))}{4MG}\right\}$$

$r_2 = r_1+\Delta r_e$

$$\frac{\Delta r_e}{2MG}\approx e^{-\frac{[t_{R_1}+r_{R_1}-v_1(r_1)]}{4MG}}\times\underbrace{\left(1-e^{-(\Delta t_R-\Delta v_e)/4MG}\right)}_{\approx\frac{\Delta t_R-\Delta v_e}{4MG}}$$

$t_{R_2}=t_{R_1}+\Delta t_R$

$\Delta v_e = v_2(r_2)-v_1(r_1)$

$\Delta v_e = \Delta r_e\left(\frac{-1}{2e^2}\right)$

$e^2 \Leftrightarrow$ cte $= e = -\xi\cdot U_{em}$

$\xi=\partial_t$

[1] $\boxed{\Delta v_e \cong \Delta r_e\left(-\frac{1}{2e^2}\right)}$

[2] $\boxed{\Delta r_e\approx \left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r_e}\Delta\tau_e = e^2\Delta\tau_e}$

$$\frac{\Delta r_e}{2MG}\approx\frac{\Delta\tau_e}{2MG}e^2\propto\frac{e^{-t_R/4MG}}{4MG}\Delta t_R$$

Hemos considerado $r_1\approx 2MG$.
Invirtiendo la relación anterior

$\omega_e\propto e^{t_R/4MG}\cdot\omega_{obs}$

$e^{-\frac{t_R}{4MG}}\cdot\omega_e\propto\omega_{obs}\rightarrow$

$\omega_{obs}\ll\omega_e$

De acá podemos despejar la M con el valor de α que sale de la ecuación.

$\boxed{\alpha = 4MG}$

Considerando la trayectoria del lector

$-e=\xi\cdot U$

$\xi=\partial_t=\partial_v$

, esto último hay que probarlo.

$-e=\xi^{\nu}U^{\mu}g_{\nu\mu}$

$=g_{v\mu}U^{\mu}=-\left(1-\frac{2MG}{r}\right)\frac{dv}{d\tau}+\frac{dr}{d\tau}$

, con $U=\frac{dx^{\mu}_{\text{ev.}}}{d\tau}e_{\mu}$

[3] $\boxed{\frac{dv}{d\tau}=\frac{e}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)}+\frac{dr}{d\tau}\frac{1}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)}}$

$e=n\cdot U$

$$U\cdot U=-1\underset{\text{usando [3]}}{=}\frac{\left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-e^2\right]}{\left(1-\frac{2MG}{r}\right)}$$

$\Rightarrow\frac{dr}{d\tau}=\pm\sqrt{e^2-1+2MG/r}$

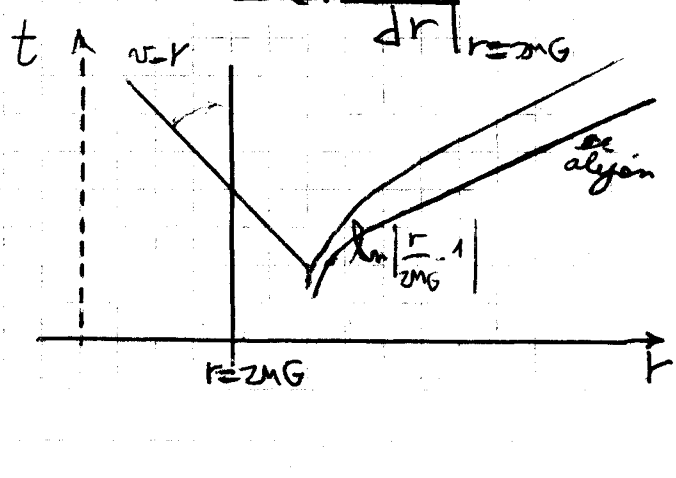
$\left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r\approx 2MG}=-e\Rightarrow$ en [3]

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{d\tau}$$

$$=\frac{-r}{\sqrt{r(e^2-1)+2MG}}+\frac{1}{\left(\sqrt{e^2r}+\sqrt{(e^2-1)r+2MG}\right)}$$

$\Rightarrow\boxed{\left.\frac{dv}{dr}\right|_{2MG}=-\frac{1}{2e^2}}$

$\Delta v_e\cong\Delta r_e\cdot\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r\approx 2MG}$



$$\tilde{t} = t + 2MG \ln \left| \frac{r}{2MG} - 1 \right|$$

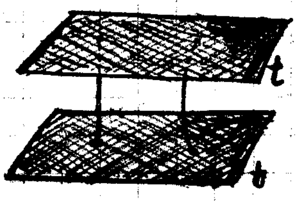
, esto es un cambio de coordenada.

$$\Delta \tilde{t}_{R_K} = \Delta t_K \quad R_K \text{ cte.}$$

Teoría

Continuación

Venimos hablando sobre superficies isótropas y homogéneas a t constante. La isotropía y homogeneidad depende del observador.



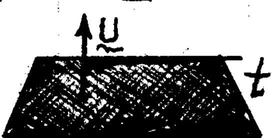
La dif. de tiempo propio entre una hipersuperficie y la otra será la coordenada temporal.

Lleva a la métrica:

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_2\right]}$$

y la función $a(t)$ es factor de escala.

Queremos ver quiénes son los observadores para los cuales las superficies son hom. e isótropas. Estos observadores serán las galaxias (suposición física). Si el vector tangente de la línea de mundo de una galaxia no fuera $\perp$ a la superficie señalaría una dirección privilegiada sobre la superficie.



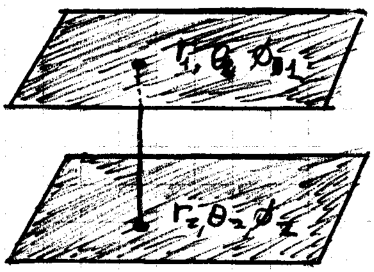
Esto es una aproximación que vale muy bien en una escala muy grande, pero a nivel más pequeño (grupo de galaxias) veremos componentes $\parallel$ a la superficie (velocidad peculiar).

Supondremos que la materia que llena el universo la describimos con:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = [\rho(t) + p(t)]\, U^\mu U^\nu + P(t)\, g^{\mu\nu}}$$

, con $U^\mu = (1,0,0,0)$.

Los observadores privilegiados serán aquellos que están fijos a la materia.



Si bien las coordenadas son fijas, como la métrica depende del tiempo, la distancia estará cambiando en forma constante.

10-11-08

Estas trayectorias serán geodésicas, porque suponemos que a estas escalas lo único relevante es la gravedad.

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = (1,0,0,0)$$

$$\underbrace{\frac{dU^\mu}{d\tau}}_{=0} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma^\mu_{00} = 0}$$

$$\Gamma^\mu_{00} \propto g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma 0,0} + g_{0\sigma,0} - g_{00,\sigma}\right)$$

y ahí vemos que vale lo que dijimos sobre las líneas de mundo.

Ahora quisiéramos ver cómo cambia la distancia entre galaxias (dos puntos con coordenadas sub-1 y sub-2; suponemos

$$r_1, \theta_1, \phi_1 \qquad r_2, \theta_2, \phi_2$$

con: $\theta_1 = \theta_2 \ \wedge \ \phi_1 = \phi_2 \Rightarrow$

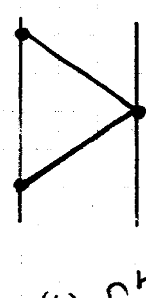
Sea que las galaxias son cercanas

$$r_2 = r_1 + dr$$

, y la distancia propia, dl_p, será:

$$dl_p = a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

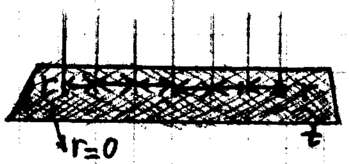
donde medimos la distancia con el procedimiento que ilustramos según el gráfico ◄.



Ahora supongamos que la distancia no es diferencial.

$$d_{propia} = \int_0^r dl_p =$$

$$a(t)\int_0^r dr/\sqrt{1-kr^2} = a(t)\, f(r)$$



pero ojo que esto no se puede interpretar como en el caso anterior porque cuando mando el rayo de luz como el $a(t)$ cambia en el camino se me jode la interpretación.

La métrica cambia en el interín

Esta suma de las distancias que medirían distintos observadores no es equivalente a la distancia física que vale SOLO para objetos cercanos.

Si el $a(t)$ está cambiando mucho en el tiempo la medida a objetos lejanos puede ser cualquier cosa.

$$\dot{d}_{propia} = \dot{a}(t)\, f(r)$$

$$= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\, a(t)\, f(r)$$

$$\boxed{\dot{d}_{propia} = H(t) \cdot d_{propia}}$$

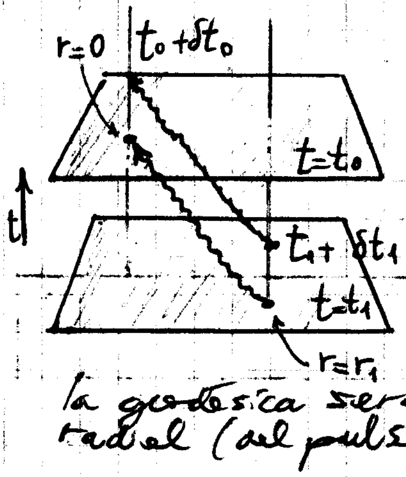
, la constante de Hubble ($H[t]$) es por supuesto algo que no es constante.

Cuando las galaxias son cercanas interpreto $\boxed{\dot{d}_{propia} \doteq v_{RECESIÓN}}$

, la velocidad de alejamiento es $\propto$ a la distancia a la cual se aleja.

- Corrimiento al Rojo

Consideramos $t=t_0$ el presente, y consideramos que una galaxia emite un pulso en $t=t_1$ (tiempo pasado) que nos llega en t_0 a nosotros que estamos en $r=0$.



la geodésica será nula y radial (del pulso).

$$\boxed{dt = -a(t) \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}}$$

, dejo el signo "$-$" porque vamos en 'r' decreciente

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = f(r_1)$$

Pero imaginemos que en $t_1+\delta t_1$ se emite otro pulso diferente

Entonces:

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

porque tiene que valer el mismo argumento.

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} - \int_{t_1}^{t_0} = 0 \Rightarrow$$

si los deltas son pequeños cumple:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0+\delta t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1+\delta t_1)} \rightarrow \text{A } 1^{er} \text{ orden}$$

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}$$

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

$\frac{1}{\delta t_1}$ frec. propia de emisión $\nu_{em} = \nu_1$

$\frac{1}{\delta t_0}$ frec. propia de recepción $\nu_{rec} = \nu_0$

, luego:

$$\boxed{\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}}$$

Si $a(t)$ crece entonces:

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} > 1 \Rightarrow \nu_1 > \nu_0$$

EMISIÓN

, decimos que hay corrimiento al rojo. Se lo suele expresar con el parámetro Z de corrimiento al rojo:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = 1 + Z$$

galaxias cercanas la cuenta da:

$$a(t_1) \approx a(t_0) + \dot a(t_0)[t_1 - t_0]$$

$$a(t_1) \approx a(t_0)[1 + H(t_0)(t_1-t_0)]$$

$$\Rightarrow z \approx H(t_0)(t_0-t_1)$$

$$\boxed{z \cong H(t_0)\, d_{propia} = v_R}$$

Estas aproximaciones no funcionan para galaxias demasiado cercanas porque las velocidades peculiares dominan y son considerables.

- Ley de Hubble y distancia por luminosidad

Definimos:

$$\boxed{\ell = \text{luminosidad aparente} = P/A}$$

potencia sobre área

$$L = \text{potencia absoluta}$$

, y con éstos,

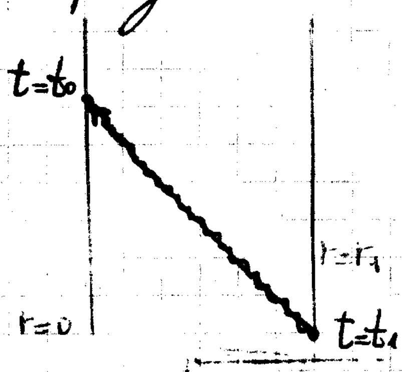
$$\boxed{d_L = \left(\frac{L}{4\pi \ell}\right)^{1/2}}$$

DISTANCIA POR LUM.

, lo que equivale a la relación euclídea

$$\ell = L/4\pi d_L^2$$

Suponemos entonces que la galaxia emite luz en todas direcciones, pero tenemos el factor de escala $a(t)$ que está andando vueltas.



$4\pi r_1^2 a^2(t_0)$

$$\boxed{\ell = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)} \cdot \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \frac{a(t_1)}{a(t_0)}}$$

, surge un factor extra del corrimiento al rojo y otro del # de fotones emitidos. Ahora:

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi\ell}\right)^{1/2} = r_1\, a(t_0)\, \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

$$\boxed{d_L = r_1 \cdot a(t_0)(1+z)}$$

Queremos escribir la ley de Hubble en términos de cantidades medibles con el telescopio. Comencemos con $k=0$;

$$f(r_1) = r_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

, condición de geodésica nula llegándonos. Usaremos la aproximación

$$a(t) \cong a(t_0)[1 + H_0(t-t_0)]$$

$H_0 \equiv H(t_0)$

$$r_1 \approx \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t_0)}(1 - H_0[t-t_0])$$

$$\boxed{r_1 \cong \frac{1}{a(t_0)}\left([t_0-t_1] + \frac{1}{2} H_0 [t_0-t_1]^2\right)}$$

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1$$

Quiero un desarrollo cuadrático.

$$a(t_1) = a(t_0)\left[1 + H_0(t_1-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1-t_0)^2 + \dots\right]$$

, y como es taylor será:

$$\boxed{q_0 \equiv -\frac{\ddot a(t_0)}{H_0^2\, a(t_0)}}$$

$$z = \frac{1}{[\quad]} - 1 \quad (\text{2do orden será})$$

$$z \approx H_0(t_0-t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0-t_1)^2 + \dots$$

, pero como $z \approx H_0(t_0-t_1)$ al orden más bajo podemos poner:

$$\boxed{t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0}\left(z - \left[1 + \frac{1}{2} q_0\right] z^2\right)}$$

$$\Rightarrow d_L = r_1 \cdot a(t_0) \cdot (1+z) \Rightarrow$$

$$\boxed{H_0 \cdot d_L = z - \frac{z}{2}(1-q_0)}$$

$q_0 \equiv$ parámetro de desaceleración

entonces con ciertas mediciones de L, ℓ, z, e hipótesis se puede fitear: H_0, q_0

$$H_0 = \frac{\dot a(t_0)}{a(t_0)}$$

$z \leq 0{,}1$

Para valores chicos de z determino H_0 aunque ahí es difícil ver el término cuadrático. Pero no puede ser tan chico como para que no sea aplicable la aproximación. Con $z \approx 1$ ya podemos determinar el q_0.

En 1998 se estudiaron supernovas en otras galaxias y el corrimiento al rojo. Como las de tipo 1A tienen una luminosidad constante sabemos la distancia por luminosidad. Con este método fue posible medir el q_0 en base no a galaxias sino a estos "faros" de wattaje fijo.

Ahí se halló $q_0 < 0$ con lo cual el Universo estaría en expansión ACELERADA, y no DESACELERADA como se sabía hasta el momento.

Práctica

- **Diagramas Inmersos**

la extensión de Kruskal manda

$$T \leftrightarrow V \qquad X \leftrightarrow U$$

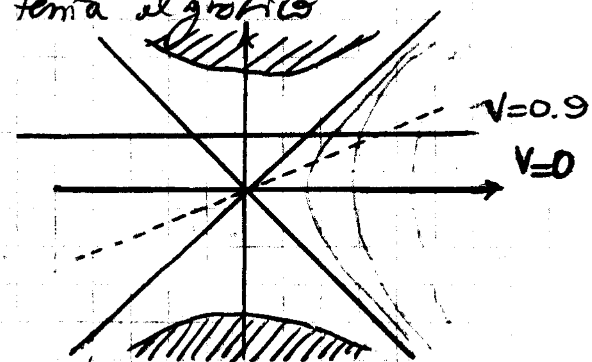
$$(c = 1\,, \quad = 1)$$

$$ds^2 = \frac{32}{r} M^3 e^{-\frac{r}{2M}}\left(+dU^2 - dV^2\right) + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2\right)$$

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = U^2 - V^2$$

$$\Rightarrow \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \begin{cases} V/U & r > 2M \\ U/V & r < 2M \end{cases}$$

y tenía el gráfico



un punto corresponde a una 2-esfera porque lo $d\Omega_2 = 0$

$$V = \text{de} = V_0$$
$$\theta = \theta_0$$

$$ds^2 = \frac{32}{r(U,V_0)} M^3 e^{-\frac{r(U,V_0)}{2M}} dU^2 + r^2(U,V_0)\operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

$$ds^2_{\text{EUCLIDEO}} = dz^2 + \rho^2 d\psi^2 + d\rho^2$$

Igualemos los elementos de línea

$$dz^2 + \rho^2 d\psi^2 + d\rho^2 = \frac{32}{r} M^3 e^{-\frac{r}{2M}} dU^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2$$

elegimos naturalmente:

$$\psi = \phi$$

surge que:

$$\rho = r \operatorname{sen}\theta_0$$

$$dz^2 + d\rho^2 = \frac{32}{r} M^3 e^{-\frac{r}{2M}} dU^2$$

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + 1 = \frac{32}{\left(\frac{\rho}{\operatorname{sen}\theta_0}\right)} M^3 \cdot e^{-\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0}} \left(\frac{dU}{d\rho}\right)^2$$

pero

$$\left(\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0} - 1\right) e^{\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0}} = U^2 - V_0^2$$

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{\rho \cdot e^{\rho/2M\operatorname{sen}\theta_0}}{8(M\operatorname{sen}\theta_0)^2\sqrt{V_0^2 + \left(\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0} - 1\right)e^{\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0}}}}$$

$$\frac{dz}{d\rho} = \pm\sqrt{\frac{e^{\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0}}\left[\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0}\cdot\left(\frac{\cos\theta_0}{\operatorname{sen}\theta_0}\right)^2 + 1\right] - V_0^2}{\left[V_0^2 + \left(\frac{\rho}{2M\operatorname{sen}\theta_0} - 1\right)e^{\rho/2M\operatorname{sen}\theta_0}\right]}}$$

Como todo lo que está inside la raíz es ≥ 0 $\Rightarrow$ llego a un ρ_{MIN}.

$V_0=0$, $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ → $r=\rho$

$$\frac{dz}{d\rho}=\pm\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\rho}{2M}-1\right)}} \Rightarrow$$

$\rho_{MIN}=2M$

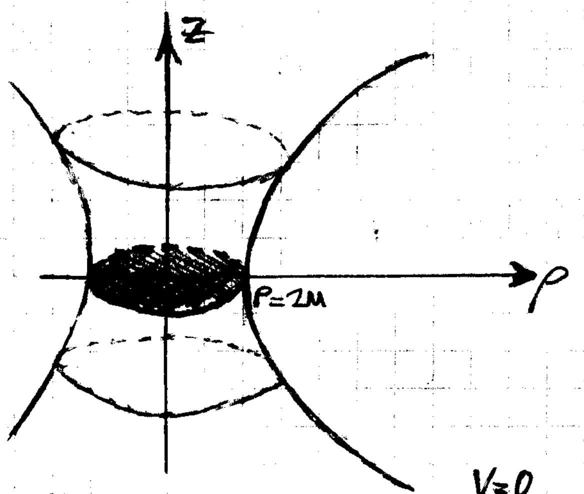
En cuyo caso podemos resolver

$$\boxed{z(\rho)=\pm 4M\sqrt{\frac{\rho}{2M}-1}}$$

eligiendo por SIMETRIA

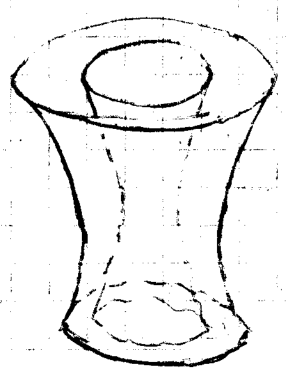
$z(\rho_{MIN})=0$

$$\boxed{\frac{z^2}{8M}+2M=\rho=r}$$

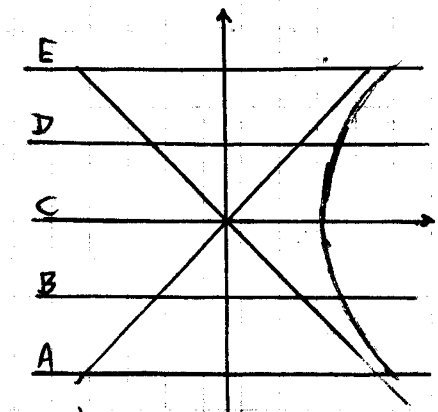


Hemos elegido $z(\rho_{min})=0$. Interpretamos que con $\rho=r\to\infty$ se corresponde a dos regiones con geometría plana asintóticas, que no estarán causalmente conectadas.

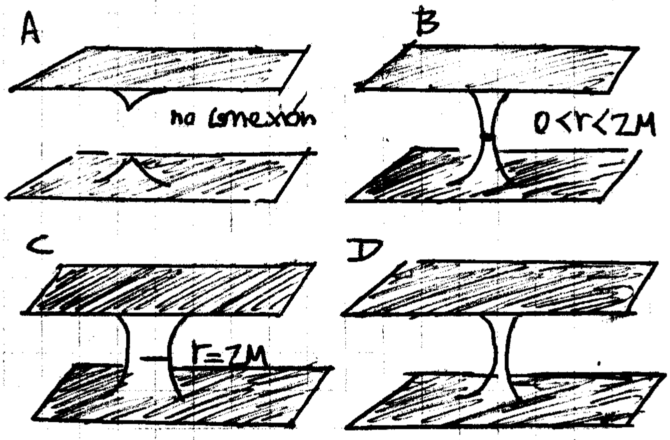
Es un agujero de gusano, pero no es estático. Si lo dibujamos para $V=0.9$ vemos que varían las regiones

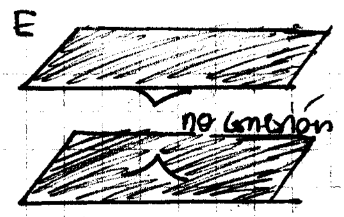


Si tomamos diferentes valores de V tendremos:



Si dibujamos las regiones asintóticamente planas





Este esquema puede verse en el apunte Carroll.

Son los puentes de Einstein-Rosen ó Garganta de Schwarzschild.
No hay partículas que pasen de un lado a otro, porque esto era acausal temporalmente.
Estrella y BH son diferentes en lo referente a la coordenada t que tiene asociado un vector de Killing temporal fuera de $r=2M$

■ Teoría 12/11/08

• Comentario Ley de Hubble

Llegamos a

$$\boxed{H_0 d_L = z + \frac{z^2}{2}(1-q_0)+\dots}$$

, válido en corrimientos al rojo pequeños para la métrica de RW plana. Pero el mismo cálculo puede hacerse para la métrica de RW abierta ó cenada y a este orden el resultado es el mismo (indepte. de k). Por supuesto a órdenes mayores ya se ve las diferencias.

● Horizontes de Partículas

Si el universo está en expansión y hubo un comienzo habrá regiones del universo donde no podemos ver porque la luz no tuvo tiempo de llegarnos. Eso establece un límite de lo que podemos ver que es el llamado horizonte de partículas.

Una métrica RW con $k=0$ es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dr^2 + r^2 d\Omega_2\right]$$

pero quiero hacer un cambio para tener métrica conforme.

$$= a^2(t)\left[-\frac{dt^2}{a^2(t)} + dr^2 + r^2 d\Omega_2\right]$$

meto uno

$\eta \doteq$ tiempo conforme

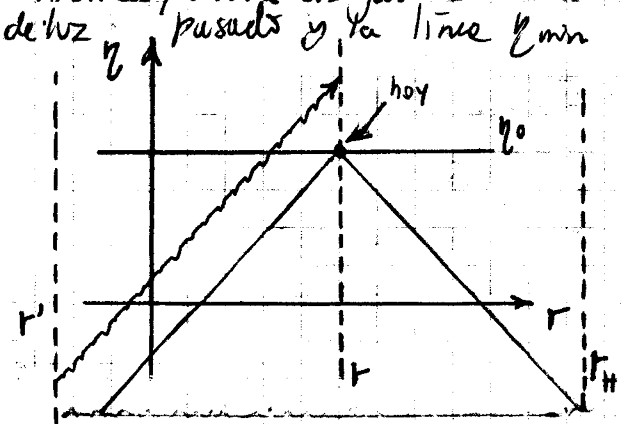
$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \rightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}$$

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2\right]}$$

y tengo (confirmo) que la métrica es conformemente plana.

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\,\eta_{\mu\nu}$$

Entonces, ahora dibujamos el cono de luz pasado y la línea η_{min}



que marca todo lo que podemos ver del universo.

Un observador en r' no ha tenido tiempo de conectarse con nosotros. r_H es el límite del horizonte de partículas. Por supuesto r' será visible en algún punto del espacio-tiempo.

$$dr = -d\eta = -\frac{dt}{a(t)}$$

$$\int_0^{R_H} dr = -\int_{t_0 \leftarrow hoy}^{t_{min}=0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{t_0 = hoy} \frac{dt}{a(t)}$$

R_H será finito o infinito dependiendo de $a(t)$. Como ejemplos

$$a(t) \sim t^{\alpha} \Rightarrow R_H < \infty \text{ si } \alpha < 1$$

$\exists$ horizonte de partículas

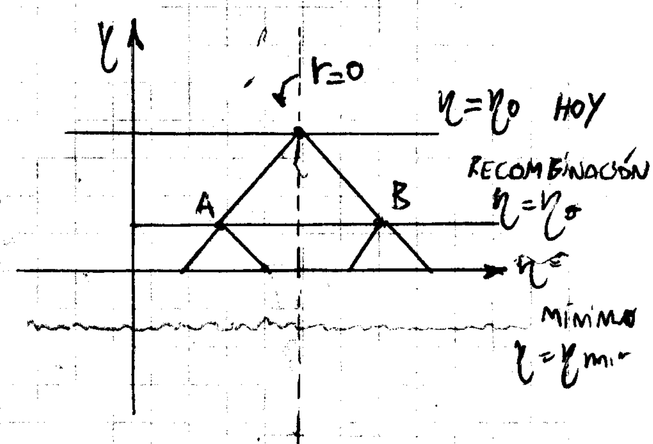
Cuando hablamos del universo, definimos distancia en el como:

Radio del Universo visible

d_{propia} entre $r=0$ y $r=r_H$

$$d_H = r_H \cdot a(t_0)$$

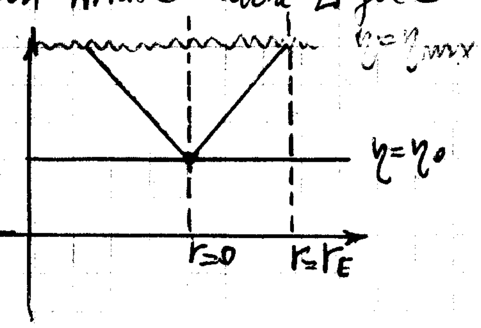
$$\boxed{d_H = a(t)\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{a(t)}}$$



A y B están causalmente conectados.

La expansión acelerada baja el η_{min} (INFLATION). La existencia de horizontes ponen condiciones

● Horizonte de Eventos
Existe un límite hacia lo que se



observa en el futuro. Procede en forma i dem.

● Ecuación de Einstein
La usamos para analizar la dinámica

$$\boxed{T^{\mu\nu}=\left[\rho(t)+p(t)\right]U^\mu U^\nu+P(t)g^{\mu\nu}}$$

$$U^\mu=(1,0,0,0)$$

, donde ρ, p dependen del tiempo ~~solamente~~. Deberíamos proveer también una ecuación de estado:

$$\boxed{P=P(\rho)}$$

Escribimos las ecuaciones de Einstein:

Ec. Einstein
$$\begin{cases} T^{0i}=0 \\ G^{0i}=R^{0i}-\frac{1}{2}Rg^{0i}=0 \end{cases}$$
Isotropía: las ecuaciones espaciales darán lo mismo.

EL proceso sería, desde la métrica

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\Omega_2\right]$$

calcular los $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ y con ellos $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ con lo cual contrayendo para tener $R_{\mu\nu}$, R se tiene:

$$\boxed{3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{3k}{a^2}=8\pi\rho} \quad (00\ [1]$$

$$\boxed{\frac{\ddot a}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{2a^2}=-4\pi p} \quad (rr$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}=R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}(\Gamma,\partial\Gamma)$$

, como vemos confirmamos que las ecuaciones temporales son vínculos y no tienen derivadas segundas, las que sí la tienen son la dinámica. Podemos combinarlas

$$\boxed{\frac{\ddot a}{a}=-\frac{4\pi}{3}(\rho+3p)} \quad [2]$$

Y [1], [3] son las ecuaciones de Friedman.
Se suele trabajar con [1] y una combinación [2]+[1]
Desde las ecuaciones de einstein sabíamos que

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{(\dot{\rho a^3})+p(\dot{a^3})=0}$$

ρa^3 se ve como la energía en un elemento de fluido. Así tiene una analogía termodinámica

$$\boxed{d(\rho a^3)+Pd(a^3)=0}$$

1er LEY DE LA TERMODINÁMICA

, que es "naive" una especie de ley 1º de la termodinámica.
Pero $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ es consecuencia de [1], [2].

$$[1]\times a^2=$$

$$3\dot a^2+3k=8\pi\rho a^2$$

$$6\ddot a\dot a=8\pi(\dot{\rho a^2})\rightarrow$$

usando [2]

$$\cancel{6}\dot a\left(-\frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}}a[\rho+3p]\right)=\cancel{8\pi}(\dot{\rho a^2})$$

$$-\dot a a(\rho+3p)=(\dot{\rho a^2})$$

$$-\dot a a\rho-\dot a a3p=\dot\rho a^2+\rho.2a\dot a$$

$$-\dot a a^2\rho-\dot a a^2 3p=\dot\rho a^3+\rho 2a^2\dot a$$

$$3\dot a a^2\rho-3\dot a a^2 p-\dot\rho a^3=0$$

$$\boxed{-pd(a^3)-d(\rho a^3)=0}$$

$$-p3a^2da-[d\rho.a^3+\rho 3a^2da]=0$$

- Tipos distintos de materia
Consideramos diferentes alternativas:

1) Materia disgregada ó polvo

ojo que cada mota de polvo sería una galaxia ó un cúmulo

$$P_m = 0 \quad , \rho_m \quad \therefore$$

$$\boxed{(\rho_m a^3)^{\cdot} = 0} \Rightarrow$$

$$\rho_m(t) \sim \frac{1}{a^3(t)}$$

$$\boxed{\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \cdot \left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^3}$$

, la densidad de energía se va diluyendo con la expansión. Hasta hace poco se creyó que ésta era la fuente más importante de la ecuación de Einstein

2) Radiación

Gas de fotones (presión de radiación)

$$\boxed{P_r = \frac{1}{3}\rho_r}$$

GAS DE PART. sin masa relativista

$$\therefore$$

Esta solución supone que le ρ_{TOTAL} es la suma de las ρ_r, ρ_m y ρ_Λ

$$(\rho_r a^3)^{\cdot} + \frac{1}{3}\rho_r (a^3)^{\cdot} = 0$$

$$\rho_r 3a^2\dot{a} + \frac{1}{3}\rho_r 3 a^2\dot{a} = 0$$

$$+ \dot{\rho}_r a^3$$

$$\dot{\rho}_r a^3 = -4 a^2 \dot{a} \rho_r$$

$$\boxed{\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4\frac{\dot{a}}{a}}$$

$$\boxed{\rho_r(t) = \rho_r(t) \cdot \left[\frac{a(t_0)}{a(t)}\right]^4}$$

NOTA
Hay dilución y corrimiento al rojo por eso el Λ^4

$$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a}$$

Aunque hoy domine ρ_m sobre ρ_r, al final dado el decaimiento como Λ^4 en lugar de Λ^3 hace que lo supere.
Se ve también que vale,

$$\rho_r \sim T^4 \sim a^{-4}$$

De la STD. PHY. surge este link

porque suponemos que la velocidad de expansión es más lenta que la de termalización. También surge que:

$$T(t) \sim \frac{1}{a(t)}$$

3) Energía de vacío (ó constante cosmológica)
Suponemos $\rho_\Lambda = cte \quad \therefore$

$$\dot{\rho}_\Lambda (a^3) + p_\Lambda (a^3)^{\cdot} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{p_\Lambda = -\rho_\Lambda}$$

, la constante la podemos poner como:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$$

$$T^{\Lambda}_{\mu\nu} = (\rho_\mu + p_\Lambda)\, U_\mu V_\nu + P_\Lambda g_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi\left[T^r_{\mu\nu} + T^m_{\mu\nu} + T^\Lambda_{\mu\nu}\right]$$

, luego si lo paso para el otro miembro actúa como constante cosmológica

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\left[T^r_{\mu\nu} + T^m_{\mu\nu}\right]}$$

- Soluciones cualitativas de las Ecuaciones de Friedman
Observando:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho \qquad K = -1, 0, 1$$

, vemos que hay una densidad crítica en la cual se iguala el 2º miembro con el término con la "·". Si

$$\rho > \rho_{CRITICA} = \frac{3H_0^2}{8\pi}$$

$$\Rightarrow k = 1 \quad \text{UNIVERSO ABIERTO}$$

$$\rho = \rho_{critica} \Rightarrow k = 0$$

$$\rho < \rho_{critica} \Rightarrow k = -1$$

Ahora escribimos:

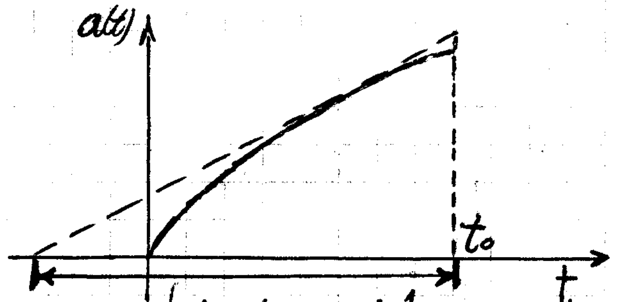
$$H_0 = h \cdot \frac{100\ km/s}{Mpc} \Rightarrow$$

$$\rho_{crítica} \cong 1{,}9 \cdot 10^{-29}\ h^2\ g/cm^3$$

Mirando:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)$$

, con $\dot{a} > 0$ (observacional). Si se asume que $\rho + 3p > 0$ resulta $\ddot{a} < 0$ y la expansión es desacelerada.



$\frac{1}{H_0} = t_H = 10\ h^{-1} = 1\ Ga$

El universo comienza con una singularidad y se expande desaceleradamente. Si la expansión hubiese sido lineal la edad del universo sería $\sim H_0^{-1}$.

- Universo dominado por la materia [modelo poco realista]

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \rightarrow$$

con $k=0$ es:

$$a(t) = \left(\frac{9\alpha}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}, \text{ con}$$

$$\alpha = \frac{8\pi}{3}\rho_0 a_0^3$$

con $k=1$ es:

$$a(t) = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$t = \alpha(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

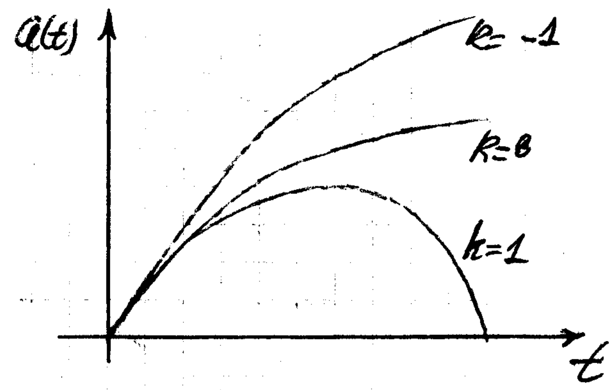
Una cicloide (paramétrica)

con $k=-1$ es:

$$a(t) = \frac{\alpha}{2}(\cosh - 1)$$

$$t = \frac{\alpha}{2}(\operatorname{senh}\theta - \theta) \quad 0 \leq \theta \leq \infty$$

La solución $k=1$ es acotada lo cual da un comportamiento interesante; reeclapsamiento.



En el comienzo de los tiempos van todos parecido y luego la curvatura del espacio-tiempo hace su gracia. En todos los casos la expansión es desacelerada.

Van como $t^{2/3}$ ~~na~~

- Universo dominado por la radiación

comentaremos que: $k=0$

$$a(t) \sim t^{1/2}$$

y para $k=-1, +1$ es similar.

- Universo dominado por Λ

Aquí da un universo acelerado; con $k=0$

$$a(t) \sim e^{Ht}$$

INFLACIÓN ETERNA

$-\infty \leq t \leq +\infty$

, con $k=1$

$$a(t) = \frac{1}{H} \cdot \cosh(Ht)$$

$-\infty \leq t \leq +\infty$

$$\boxed{H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\rho_0} \text{ constante}}$$

, con $k=-1$

$$a(t) = \frac{1}{H} \operatorname{senh}(Ht)$$

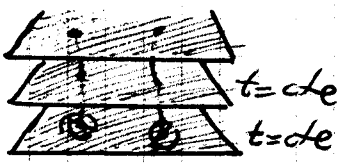
$0 \leq t \leq \infty$

Universo que se expande desde $-\infty$ a $+\infty$; universo que va y vuelve, universo que se expande pero arranca en un tiempo finito

Práctica

- Cosmología. GUÍA 8

Vimos las coordenadas comóviles y el espacio foliado:



los obs comoviles serán galaxias.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\underbrace{\gamma_{ij}\, dx^i dx^j}_{\text{NO depende de } t}$$

Si las galaxias poseen una velocidad respecto del sistema comovil, tiende a reducirse con la expansión; surge de resolver problema 3

- **Problema 3**

Geodésica tipo 't' con $\vec{v}_1$ en t_1

$$a(t_2)\gamma_2|\vec{v}_2| = a(t_1)\gamma_1|\vec{v}_1|$$

$$\gamma_s = \left(1-|\vec{v}_s|^2\right)^{-1} \qquad s=1,2$$

$$|\vec{v}_s|^2 = \underbrace{g_{ij}}_{\to\ \gamma_{ij}a^2(t)} v_s^i v_s^j$$

$$v_s^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

Ahora habría que ver quién mide cada cosa.

$|\vec{v}_s|$ es el módulo, ¿respecto de qué observador?

Tendríamos que ir a la base ortonormal del observador, para ver este asunto porque las expresiones anteriores se hallan en base coordenada

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\gamma_{ij}\,dx^i dx^j}$$

$$\gamma_{ij}\begin{cases}\gamma_{rr} = \dfrac{1}{1-kr^2}\\ \gamma_{\theta\theta} = r^2\\ \gamma_{\varphi\varphi} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta\end{cases}$$

$$g_{ij} = a^2(t)\,\gamma_{ij}$$

Para el observador comoviles

$$U = e_t = \partial_t \qquad \{\underbrace{U^\mu = (1,0,0,0)}_{\text{base coord. comovil}}\}$$

, con el detalle

$$e_{\hat t} = U \qquad e_{\hat\varphi} = \frac{e_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$$e_{\hat r} = \frac{e_r}{\sqrt{g_{rr}}} \qquad e_{\hat\theta} = \frac{e_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}$$

$$\Rightarrow\quad dx^\alpha e_\alpha = dx^{\hat\alpha} e_{\hat\alpha}$$

, por la ORTOGONALIDAD igualo coordenada a coordenada

$$dx^t e_t = dx^{\hat t} e_{\hat t} = dx^{\hat t} e_t$$

$$dx^t = dt = dx^{\hat t}$$

$$dx^i e_i = dx^{\hat i} e_{\hat i}$$

$$dx^i e_i = dx^{\hat i}\frac{e_i}{\sqrt{g_{ii}}}$$

$$dx^i = \frac{dx^{\hat i}}{\sqrt{g_{ii}}}$$

$$\frac{dx^i}{dx^t} = \frac{dx^{\hat i}}{dx^{\hat t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}$$

$$v^i = \underbrace{v^{\hat i}}_{\star}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}$$

, donde $\star$ es la velocidad medida por el observador.

$$v^{\hat i} = \sqrt{g_{ii}}\,\frac{dx^i}{dt}$$

$$v^{\hat i} = \frac{U^{\hat i}}{U^{\hat t}}\,, \quad \text{con } U^i = \frac{dx^i}{d\tau} \text{ partícula}$$

ESTO SE PUEDE PROBAR

$$|\vec{v}|^2 = \left(\frac{dx^{\hat i}}{dx^{\hat t}}e_{\hat i}\right)\cdot\left(\frac{dx^{\hat j}}{dx^{\hat t}}e_{\hat j}\right)$$

$$= \frac{dx^{\hat i}}{dx^{\hat t}}\cdot\frac{dx^{\hat j}}{dx^{\hat t}}\cdot\delta_{ij}$$

$$= \left(\frac{dx^i}{dt}e_i\right)\cdot\left(\frac{dx^j}{dt}e_j\right) =$$

$$= g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

Luego de esta digresión proseguimos con el problema 3.

$$ds^2 = -d\tau^2 = -dt^2\underbrace{\left(1 - g_{ij}\frac{dX^i}{dt}\frac{dX^j}{dt}\right)}_{1-|\vec{v}|^2}$$

$$-d\tau^2 = -dt^2\,\gamma^{-2}(v)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1-|\vec{v}|^2} = \gamma^2$$

La geodésica tipo tiempo. Podemos escribir la ecuación y calcular los Γ; esto es:

$$\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\rho}{d\tau} = 0$$

con $\frac{dX^\nu}{d\tau}\cdot\frac{dX^\rho}{d\tau}g_{\nu\rho} = -1$

, o bien se puede usar un $\mathcal{L}$

$$\tilde{\mathcal{L}} = g_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau}$$, y

con las E-L equations

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\mu} = 0$$

Seguimos este segundo camino con el:

$$\mathcal{L} = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + a^2(t)\gamma_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\frac{dX^j}{d\tau}$$

, haciendo la cuenta resulta en:

$$\frac{d}{d\tau}\left(-2\frac{dt}{d\tau}\right) = 2\dot{a}\,a\,\gamma_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}\cdot\frac{dX^j}{d\tau}$$

$$2\frac{d\gamma}{d\tau} = 2\frac{\dot{a}}{a}|\vec{v}|^2\gamma^2$$

$$-\cancel{2}\frac{d\gamma}{\cancel{dt}}\frac{dt}{\cancel{d\tau}} = -\cancel{2}\frac{da}{\cancel{dt}}\frac{|\vec{v}|^2\gamma^2}{a} \quad (1-\gamma^{-2})$$

$$\frac{d\gamma}{}\frac{\gamma}{(\gamma^2-1)} = -\frac{da}{a}$$

$$\frac{\ln(\gamma^2-1)}{2} = -\ln(a) + cte$$

$$\sqrt{\gamma^2-1}\cdot a(t) = cte.$$

$$\gamma^2-1 = |\vec{v}|^2\gamma^2 \Rightarrow$$

$$a(t)\,|\vec{v}|\,\gamma(\vec{v}) = cte.$$

$$\boxed{a(t_1)|\vec{v}_1|\gamma(\vec{v}_1) = a(t_2)|\vec{v}_2|\gamma(\vec{v}_2)}$$

Observamos que:

$$|\vec{v}_2| = \frac{a(t_1)\gamma(v_1)}{a(t_2)\gamma(v_2)}\cdot|\vec{v}_1|$$

, si la v es $\ll 1 \Rightarrow \gamma(v)\approx 1 \Rightarrow$

$$|\vec{v}_2| \sim \frac{a(t_1)}{a(t_2)}|\vec{v}_1|$$

, luego con un universo en expansión $a(t_2) > a(t_1) \to$

$$\boxed{|\vec{v}_2| < |\vec{v}_1|}$$

Si hay una pequeña velocidad peculiar entonces se plandiera con la expansión.

Por otro lado,

$$m\,a(t)|\vec{v}|\gamma(\vec{v}) = p\cdot a(t)$$

$\to \quad p_1 \equiv |\vec{p}_1|$

$$p_1\,a(t_1) = p_2\,a(t_2)$$

, y acá volvemos al problema 9 de la guía 2 se tenía:

$$|\vec{p}| = \left[(\underset{\sim}{u}_{obs}\cdot\underset{\sim}{p})^2 + \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{p}\right]^{1/2}$$

$$\downarrow$$

$$E^2 = \omega^2$$

$|\vec{p}| = E = \omega$ y luego

el corrimiento al rojo

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}}$$

y hemos visto que como $p.a(t) = cte$ luego

$$\dot{(p.a)} = 0$$

$$\dot{p}.a + p.\dot{a} = 0$$

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{a}}{a} \equiv H$$

Esta es la "Hubble drag Force".

17-11-08 ■ Teoría

• Análisis General de las Soluciones

Veíamos de:

$$\boxed{3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}} \quad [1]$$

, donde hay tres componentes en

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$$

y con las expresiones

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0)\cdot\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3$$

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0)\cdot\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^4$$

$$\rho_\Lambda(t) = cte.$$

Introducimos números entre 0 y 1 para indicar fracciones de abundancia. Consideramos una:

$$\boxed{\rho_{crítica} = \frac{3H_0^2}{8\pi}}$$

Evaluando [1] hoy (en t_0)

$$3H_0^2 = 8\pi\rho_0 - \frac{3k}{a_0^2}$$

$$\boxed{1 = \rho_0/\rho_{crítica} - \frac{\cancel{3}k}{\cancel{3}H_0^2 a_0^2}}$$

, de aquí vemos que la $\rho_{crítica}$ determina si el Universo es plano, abierto o cerrado.

Asimismo definimos:

$$\Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{crítica}} \qquad \Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{crítica}}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda(t_0)}{\rho_{crítica}}$$

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$$

Ahora reescribimos todo en términos de Ω. Adimensionalizamos con

$$\tilde a(t) = a(t)/a_0$$

$$\tilde t = H_0 t$$

Si el Universo fuese plano (STA) el factor de escala está definido a menos de una constante, pues se puede cambiar el factor $a(t)$ en la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]$$

por un reescalado de x, y, z que siguió una constante factor fuera del $dx^2 + dy^2 + dz^2$.

$$\rho_m(t) = \frac{\Omega_m\,\rho_{crítica}}{\tilde a^3}$$

$$\rho_r(t) = \frac{\Omega_r\,\rho_{crítica}}{\tilde a^4}$$

$$\rho_\Lambda(t) = \Omega_\Lambda\,\rho_{crítica} \equiv cte$$

También introducimos un Ω_c "omega en curvatura"

$$\Omega_c \equiv -\frac{k}{H_0^2 a_0^2}$$

, que sale de dividir [1] sobre $3H^2$

$$1 = \frac{8\pi\rho}{3H^2} - \frac{k}{a^2H^2}$$

, que evaluada hoy [en t_0] resulta:

$$1 = \frac{\rho_0}{\rho_{crítica}} - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$

$$\boxed{1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_c}$$

Ahora podemos reescribir la ecuación de Friedman para que simule una ecuación con potencial efectivo

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde a}{d\tilde t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\Omega_\Lambda\tilde a^2 + \frac{\Omega_m}{\tilde a} + \frac{\Omega_r}{\tilde a^2}\right] = -\frac{k}{2H_0^2a_0^2}} \quad [2]$$

, donde usamos:

$$\boxed{\frac{da}{dt} = a_0\frac{d\tilde a}{d\tilde t}H_0}$$

y hemos adimensionalizado y escrito en términos de las fracciones

Se suele tomar como datos las fracciones Ω_Λ, Ω_m, Ω_r. Calculamos entonces $\tilde{a}(\tilde{t})$; y reescalamos el (a_0, H_0) para obtener $a(t)$.

Si llegase a ocurrir que existe $\tilde{t}_s$ tal que:

$$\tilde{a}(\tilde{t}_s) = 0$$

$\Rightarrow$ elegimos $\tilde{t}_s = 0$

Así podemos calcular la edad del Universo, con $\tilde{t}_s$ llegando a 1.

$$\tilde{a}(\tilde{t}_s) = 1 \rightarrow \tilde{t}_0 = f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r, H_0)$$

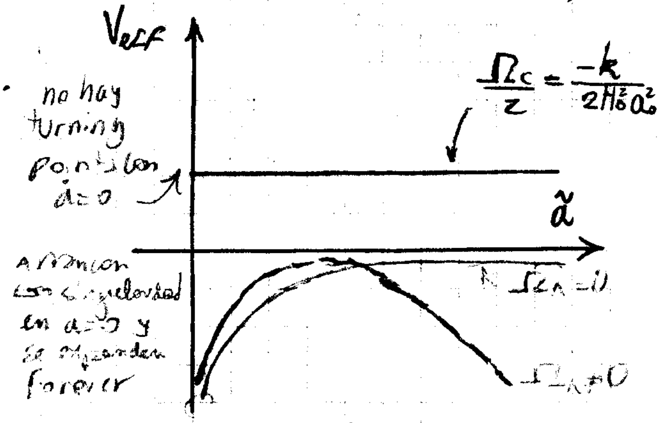
- Comportamiento Cualitativo de las Soluciones

Asumimos:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2 - V_{ef}(\tilde{a}) = -\frac{k}{2H_0^2 a_0^2}}$$

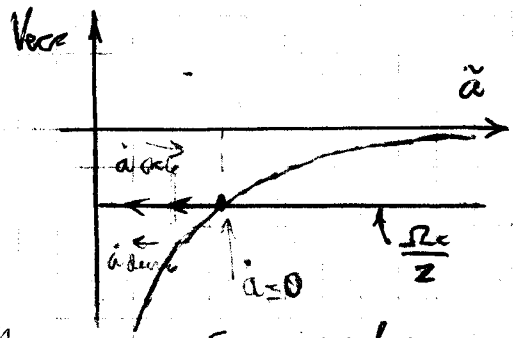
e imaginemos:

① $\Omega \leq 1$ $(k=0$ ó $k=-1)$



② $\Omega > 1$ $(k=+1)$

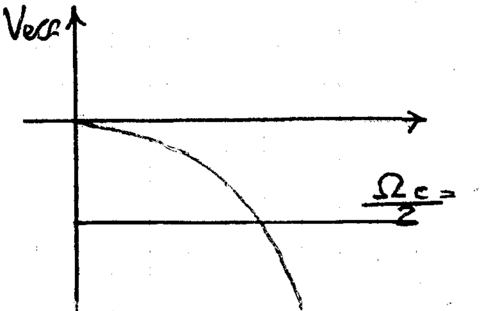
i) $\Omega_\Lambda = 0$



Hay expansión y recolapso en un Big Crunch

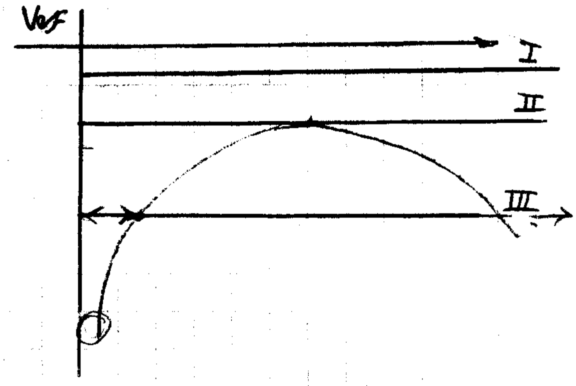
$\tilde{a} = 0$ $V_{ef} \to \infty$ $\dot{a} \to \infty$

ii) $\Omega_m = \Omega_r = 0$ (no muy realista)



No hay singularidad inicial; llega a un mínimo y se vuelve a expandir

iii) General Case:



I. Solo hay expansión

II. Solución estática. Solución exacta: el universo de Einstein.

III. Dos alas: una singularidad inicial y una final con expansión en el interior

NB Para solución isótropa y homogénea (estática) Einstein agregó una constante cosmológica

Los valores aceptados actualmente son:

$$\boxed{H_0 = 72 \frac{km/seg}{Mpc}}$$

$\Omega_m = 0{,}3$ $\Omega_\Lambda = 0{,}7$ $\Omega_r = 8 \cdot 10^{-5}$

, con lo cual

$$\Omega = 1{,}00008$$

- Edad del Universo

Podemos calcularla como:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{a_0} \frac{da}{\left(\frac{da}{dt}\right)}$$

la cual mediante reescaleo

$$a = a_0 \tilde{a}$$
$$\tilde{t} = t H_0$$

$$t_0 = \int_0^1 \frac{d\tilde{a}}{\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right) H_0} \Rightarrow$$

NB: El A_μ' es solución de las ecuaciones de Maxwell con el gauge de Lorentz

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \frac{d\tilde{a}}{\left[\Omega_c + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

, cuando uno labura numéricamente tenemos un universo de 13 mil millones de años.

Análogamente, calculando la distancia propia al horizonte hoy de la información del universo visible, ~ 14 Gpc.

● Ondas Gravitatorias

Una masa que se mueve en el espacio tiempo hará cambiar la curvatura de una manera altamente no-trivial. Si todo esto es brusco podría ser capaz de propagarse la deformación del et hacia lugares fuera de ahí (ondas gravitatorias). Laburaremos en la aproximación de campo débil.

No se han detectado aún directamente. La detección indirecta consta de la observación en sistemas binarios de la variación del período por la pérdida de energía debida a la radiación emanada en forma de ondas gravitatorias.

La detección de ondas gravitacionales indicaría choques de objetos masivos.

Veamos algo de EM para introducir el tema: comenzamos con la elección del Gauge

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu}$$

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = J_\nu$$

son las ecuaciones de Maxwell en presencia de corriente. En el gauge de Lorentz $\boxed{\Box A_\nu = J_\nu}$

, pues $\underline{\partial_\mu A^\mu = 0}$ *

El gauge de Lorentz permite también:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \phi = A_\mu'$$

si le pido al ϕ alguna condición

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

, como ser $\underline{\Box \phi = 0}$ * vale este nuevo A_μ'.

Veamos las ondas planas ahora:

$$\Box A^\mu = 0$$

, pero desde los cuatro grados de libertad A^μ restándole las condiciones * resultarán las dos polarizaciones físicas:

$$A_\mu = e_\mu e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + \text{c.c}$$

$$k^2 = 0 = \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$$

, pero

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow$$

$$= i k^\mu e_\mu e^{ikx} + \text{c.c.}$$

, luego

$$k^\mu e_\mu = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{e} = 0} \quad [1]$$

Usamos la otra libertad de cambiar el ϕ, entonces:

$$\phi = i\varepsilon e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + \text{c.c}$$

$$A_\mu' = e_\mu' e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + \text{c.c.}$$

$$\partial_\mu \phi = -\varepsilon k_\mu e^{i\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}} + \text{c.c}$$

arbitrario ‡

$$\rightarrow \boxed{e_\mu' = e_\mu - \varepsilon k_\mu} \quad [2]$$

Entonces con [2] puedo elegir arbitrariamente alguna componente que sea nula. Llego a dos grados de

‡ Lo uso para fijar los otros dos

libertad. La opción usual es que [2] vincule la k_0 y $k_{\text{dirección}}$ de propagación. (me quedan los otros dos transversales)

Consideremos por ejemplo:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$$

$$k^\mu e_\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega(e_0 + e_3) = 0$$

tiempo prop.

, transformando de Gauge nuevamente

$$e_0' = e_0 + \epsilon\omega$$

$$e_3' = e_3 - \epsilon\omega$$

$$e_1' = e_1 \;;\; e_2' = e_2$$

, ahora elijo $\epsilon = -e_0/\omega \rightarrow e_0' = 0$ pero esto implica que $e_3' = 0$ porque vale lo mismo $e_0' + e_3'$ que $e_0 + e_3$ (estoy siempre en el gauge de Lorentz).

Luego para una onda plana en la dirección $\hat{3}$ puedo elegir el gauge para que me queden componentes A^μ del potencial vector transversales a esa dirección.

Quisiera ver, ahora, lo mismo en las ecuaciones de Einstein linealizadas; suponemos un sistema tal que:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

, con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Trabajaremos en $h_{\mu\nu}$ 1er orden, y consideraremos que vive en el espacio de Minkowski (suben y bajan índices con $\eta_{\mu\nu}$).

$$h^{\mu\nu}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} = h_{\sigma\rho}$$

$$(\text{traza}) \rightarrow h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

, lo cual vale a orden 1º, pues

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma + O(h^2)$$

Veremos que definiendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}$$

es posible elegir coordenadas:

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

y en ellos ver que vale:

$$\boxed{\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}}$$

y llegaremos a ondas planas

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} + C.C$$

y usando transformaciones extras

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

Entonces $e_{\mu\nu}$ tiene solo dos componentes independientes por ende $e_{\mu\nu}$ TIENE DOS POLARIZACIONES.

Si elegimos coordenadas tales que $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$

$$\boxed{e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{21} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

y $e_{12} = e_{21}$ y e_{11} se puede vincular a e_{22}.

Práctica

Problema 5

Sea universo dominado por materia y $k = +1$.

Fluido ideal sin presión

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \cancel{p}) U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu} \cancel{p}$$

$$T_{00} = \rho$$

, con la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega_2\right]$$

La ecuación de Friedman será:

[1] $H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$ $\left(H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{dt}\frac{1}{a}\right)$

[2] $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho)$

$\nabla_\mu T^{0\nu} = 0 \rightarrow$

$$\dot{\rho} = -3H\rho$$

$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho$ lleva a:

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{a_0^3}{a^3} = \overset{\text{cte.}}{C}$$

$$\boxed{\dot{a}^2 = -1 + \frac{C}{a}} \quad [3]$$

, existe un valor máximo para a dado el ^2 en [3]. El máximo valor de $a = C$; si $a < a_{max} = C \Rightarrow$

$$\frac{da}{dt} = \pm\sqrt{-1 + \frac{C}{a}}$$

hacemos un cambio de variables a tiempo conforme:

$$\frac{dt}{a(t)} = d\eta$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta}\cdot\frac{1}{a(t)}$$

$$\frac{da}{dt} = \pm\sqrt{-1 + \frac{C}{a}}$$

, si el Universo está en expansión considero $\sqrt{\ } > 0$ y me quedo con el "+"

$$\frac{da}{\sqrt{aC - a^2}} = \pm d\eta$$

$$-\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{-2a + C}{C}\right]\Big|_0^a = \pm\eta$$

$$-\operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{-2a + C}{C}\right] + \frac{\pi}{2} = \pm\eta$$

$$-\frac{2a}{C} + 1 = \cos(\eta)$$

$$\boxed{a(\eta) = \frac{C}{2}\left[1 - \cos(\eta)\right]}$$

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^\eta d\eta \cdot \frac{C}{2}\left[1 - \cos(\eta)\right]$$

$$\boxed{t(\eta) = \frac{C}{2}\left[\eta - \operatorname{sen}\eta\right]}$$

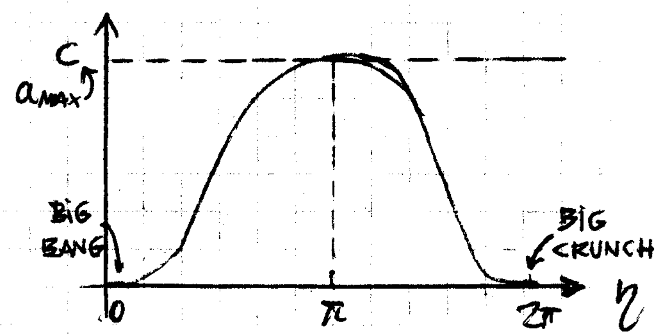
$$\boxed{a(\eta) = \frac{C}{2}\left[1 - \cos\eta\right]}$$

Solución para universo cerrado con $k=1$ y dominado por materia.

● Problema 6

Queremos ver la evolución del factor de escala

$$a_{MAX} = C = a(\pi)$$
$$a(0) = 0$$



Pero η es el tiempo conforme, dado que podemos poner

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dS^2_{3D}$$

$$ds^2 = a^2(\eta)\Big[\underbrace{-\frac{dt^2}{a^2(t)}}_{d\eta^2} + dS^2_{3D}\Big]$$

Para el caso $k=1$ se podía reescribir la ds^2 en función de $d\eta^2$

y para η = cte la

$$ds^2\Big|_{\substack{cte\\ \eta}} = a^2(t)\left[dx^2 + \operatorname{sen}^2 x\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi \in (0,\pi)\\ \theta \in (0,\pi)\\ \phi \in (0,2\pi)\end{array}\right\} (S^3) \text{ es una 3 esfera}$$

Para verlo podemos embeber en 4D euclídeo a la S^3

$$ds^2_{4D} = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2$$

, considero la superficie:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = a_0^2$$

y parametrizo

$$\begin{aligned}X_1 &= a_0 \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \cos\phi\\ X_2 &= a_0 \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\\ X_3 &= a_0 \operatorname{sen}\chi \cos\theta\\ X_4 &= a_0 \cos\chi\end{aligned}$$

Claro, esto es una superficie 3D en un espacio 4D análogamente a como una esfera silvestre es una superficie 2D en un espacio 3D.

$$\left(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2\right)\Big|_{esf} = dS^2\Big|_{\eta\, cte.}$$

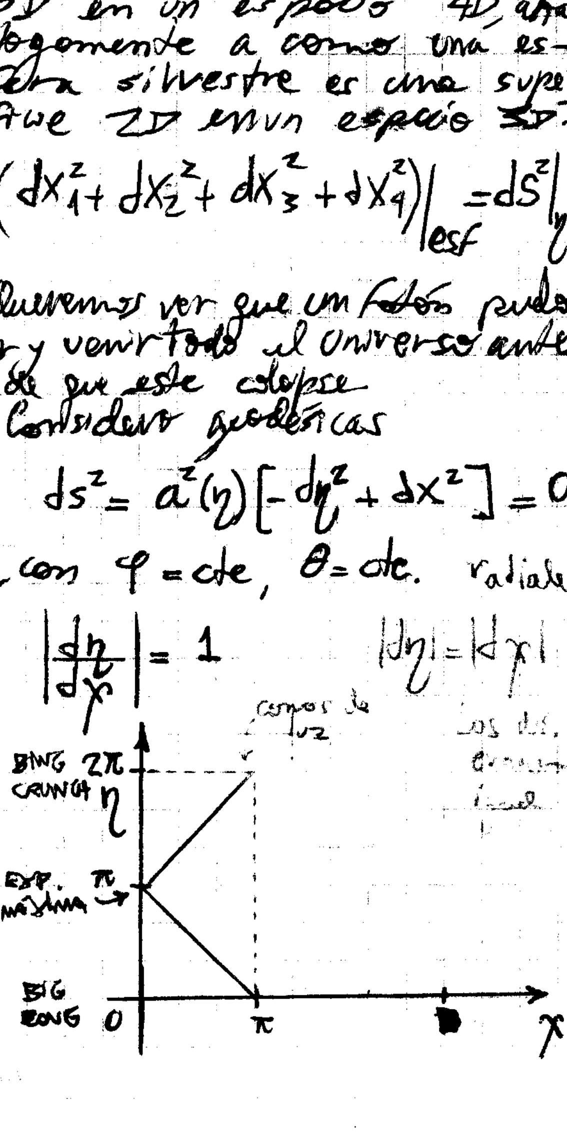
Queremos ver que un fotón puede ir y venir todo el Universo antes de que este colapse

Considero geodésicas

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + dx^2\right] = 0$$

, con φ = cte, θ = cte. radiales

$$\left|\frac{d\eta}{d\chi}\right| = 1 \qquad |d\eta| = |d\chi|$$



Dar una vuelta es el recorrido

$\chi = 0 \to \pi \to 0$ (1 vuelta)

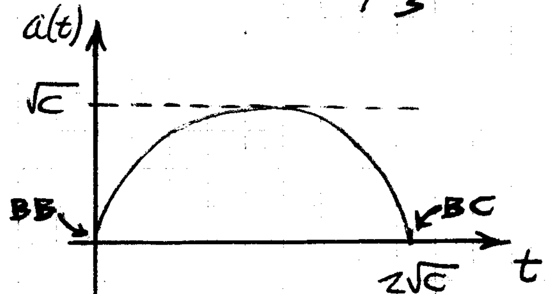
$\eta = 0 \to 2\pi$ (una vuelta)

Un fotón alcanza a completar una vuelta entera en el big crunch.

Si el Universo estuviese dominado por radiación y con $k=1$, la solución es

$$\boxed{a(t) = \sqrt{C'}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2\right]^{1/2}}$$

con $C' = 8\pi G \dfrac{\rho_0 a_0^4}{3}$



Recorriendo en modo ídem un fotón solo alcanza a la 1/2 vuelta

■ Teoría 19-11-08

● Ecuaciones de Einstein Linealizadas

Supongamos la métrica era

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

, y su inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$$

Este supuesto abandona la covariancia general (pues en algún sistema quizás no sea $|h_{\mu\nu}| \ll 1$). La $\eta^{\mu\nu}$ subirá y bajará índices

$$h^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}$$

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

Necesitamos los tensores de curvatura y Ricci,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} \quad \left(\text{1er orden en } h\right)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\epsilon}\left[g_{\epsilon\beta,\delta} + g_{\epsilon\delta,\beta} - g_{\beta\delta,\epsilon}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\epsilon}\left[h_{\epsilon\beta,\delta} + h_{\epsilon\delta,\beta} - h_{\beta\delta,\epsilon}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[h^{\alpha}{}_{\beta,\delta} + h^{\alpha}{}_{\delta,\beta} - h_{\beta\delta}{}^{,\alpha} \right]$$

A orden 1 →

$$R^{(1)\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\Big\{ \cancel{h^{\alpha}{}_{\beta,\delta\gamma}} + h^{\alpha}{}_{\delta,\beta\gamma} - h_{\beta\delta}{}^{,\alpha}{}_{,\gamma} - \cancel{h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma\delta}} - h^{\alpha}{}_{\gamma,\beta\delta} + h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}{}_{,\delta} \Big\}$$

Ahora, para Ricci será:

$$R^{(1)}{}_{\beta\delta} = R^{(1)\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}$$

$$\boxed{R^{(1)}{}_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\Big\{ h^{\alpha}{}_{\delta,\beta\alpha} - \Box h_{\beta\delta} - h_{,\beta\delta} + h_{\beta\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\delta} \Big\}} \quad [1]$$

Quiero cambiar coordenadas para castear esto y hacer desaparecer información extra. Usamos las coordenadas armónicas.

$$\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0$$

, que en campo débil se puede desarrollar

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \sqrt{|\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})|} \approx 1 + \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2)$$

, esto se puede probar pero lo aceptamos.

$$\left|\left(1+\frac{h}{2}\right)\left(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\right|_{,\nu} = 0$$

$$\left(- h^{\mu\nu} + \frac{h}{2}\eta^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0$$

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

La condición de Gauge de Lorentz (COORD. ARMONI.) en permite que se cancelen en [1] lo que dijimos que se cancelaba.

Luego, en coordenadas armónicas

$$R^{(1)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$$

$$R^{(1)} = -\frac{1}{2}\Box h$$

La ecuación de Einstein lee

$$R^{(1)}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(1)}\eta_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\Box h\, \eta_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$-16\pi T_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h$$

$$\boxed{-16\pi T_{\mu\nu} = \Box \bar{h}_{\mu\nu}}$$

, es la ecuación de Einstein linealizada

- Otros cambios de coordenadas que mantienen el carácter de armónica

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$$

nueva métrica en un punto P con coord. nuevas (P')

$$\varepsilon^{\mu} = \mathcal{O}(h_{\mu\nu})$$

$$\boxed{\underbrace{g'^{\mu\nu}(x')}_{\eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu}(x')} = \underbrace{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}}_{\ddagger} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}}_{*} \underbrace{g^{\lambda\rho}(x)}_{\eta^{\lambda\rho} - h^{\lambda\rho}(x)}} \quad [2]$$

LA MISMA

Pero como $x' = x + \varepsilon$ se verá que esta suma dentro del argumento da solamente cosas cuadráticos, entonces me quedo con

$$h'^{\mu\nu}(x') \approx h'^{\mu\nu}(x)$$

Dados:

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \varepsilon^{\nu}(x) \rightarrow$$

$$* \quad \delta^{\nu}_{\rho} + \varepsilon^{\nu}{}_{,\rho}$$

$$\ddagger \quad \delta^{\mu}_{\lambda} + \varepsilon^{\mu}{}_{,\lambda}$$

Siempre a orden uno, haciendo el cálculo en [2] resultará en:

$$\boxed{h'^{\mu\nu}(x) = h^{\mu\nu}(x) - \varepsilon^{\mu,\nu}_{(x)} - \varepsilon^{\nu,\mu}_{(x)}}$$

queda como una transformación de Gauge. Un cambio de coordenadas a orden lineal es como un cambio de Gauge. Esto porque $x' \approx x$.

Si $h^{\mu\nu}$ satisface la condición de coordenada armónica

$$\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h\right)_{,\nu} = 0$$

$$y \quad \Box\varepsilon^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h'\right)_{,\nu} = 0 \quad [3]$$

lo cual es equivalente a lo que hicimos con anterioridad

$$\boxed{\begin{array}{l} A^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \rightarrow \text{si } A'_{\mu} = A_{\mu} + \varepsilon_{,\mu} \\ \qquad\qquad \Box\varepsilon = 0 \\ \text{luego} \quad A'^{\mu}{}_{,\mu} = 0 \end{array}}$$

Si queremos probar [3] lo escribimos explícitamente

$$\Big(\cancel{h^{\mu\nu}} - \varepsilon^{\mu,\nu} - \varepsilon^{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \times [\cancel{h} - 2\varepsilon^{\rho}{}_{,\rho}]\Big)_{,\nu} =$$

por condición coord. arm.

$$-\varepsilon^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - \varepsilon^{\nu,\mu}{}_{,\nu} + \varepsilon^{\rho}{}_{,\rho,\nu}\eta^{\mu\nu} =$$

$$\underbrace{\Box\varepsilon^{\mu}}_{=0} \underbrace{- \varepsilon^{\nu,\mu}{}_{,\nu} + \varepsilon^{\rho}{}_{,\rho,\nu}\eta^{\mu\nu}}_{\text{se cancelan}}$$

$$= 0$$

En resumen:

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$$

$$\bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad \text{con} \quad \Box\varepsilon^{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu,\nu} - \varepsilon^{\nu,\mu}$$

$$\bar{h}'^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

Ahora veamos ondas planas, sin fuentes

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

para luego agregarle las fuentes. En este caso particular

$$\Box\bar{h} = 0 \qquad \text{(problema tantiano de } \bar{h} \text{ nula traza)}$$

$$\bar{h} = h - 2h = -h \rightarrow$$

$$\text{si } \Box\bar{h} = 0 \Rightarrow \Box h = 0 \rightarrow$$

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

$A^{\mu} \rightarrow h^{\mu}$

$\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{\mu}$

Buscaremos solución tipo onda plana

$$h_{\mu\nu}(x) = \underbrace{e_{\mu\nu}}_{10 \text{ com}} e^{ik^{\mu}x_{\mu}} + \text{c.c}$$

$$\text{con} \quad \underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x} = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}k^{\nu}$$

$$k^2 = 0 = \eta_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu}$$

$$h^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{2}h^{,\mu}$$

$$\boxed{e^{\mu\nu}k_{\nu} = \frac{1}{2}e_{\nu}{}^{\nu}k^{\mu}} \quad \text{4 ecuaciones para el } e_{\mu\nu}$$

y hemos usado $\quad h^{\mu\nu}{}_{,\nu} = ie^{\mu\nu}k_{\nu}$

Hacemos una transformación de coordenadas quedándonos dentro de las armónicas.

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \quad \text{con} \quad \Box\varepsilon^{\mu} = 0$$

$$\varepsilon^{\mu}(x) = i\, c^{\mu} e^{ikx}$$

4 constantes arbitrarias

ahora:

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu,\nu} - \varepsilon^{\nu,\mu}$$

$$h'^{\mu\nu} = e'^{\mu\nu}e^{ikx} + \text{c.c}$$

lowereando los índices resulta que

$$e'_{\mu\nu}e^{ikx} + \text{c.c} = e_{\mu\nu}e^{ikx} + c_{\mu}k_{\nu}e^{ikx} + c_{\nu}k_{\mu}e^{ikx} + \text{c.c}$$

Con la transformación de coordenadas las constantes viejas pasan a ser nuevas constantes de acuerdo a:

$$e_{\mu\nu} \to e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + C_\mu k_\nu + C_\nu k_\mu$$

Podemos elegir las constantes como se nos cante; en particular

$$C_\mu : \quad e'_{0\mu} = 0 \quad \overset{4}{\text{cond.}}$$

Hemos partido de 10 cantidades y obtenido antes 4 ecuaciones y ahora 4 condiciones tenemos 2 independientes. (dos componentes indeptes.)

$$\boxed{h'_{\mu\nu} = e'_{\mu\nu} e^{ikx} + \mathbb{C}C}$$

$$\boxed{e'_{0\mu} = 0}$$

$$\boxed{e'^{\mu\nu} k_\nu = \frac{1}{2} e'^{\nu}{}_{\nu} k^\mu}$$

Podemos remover las "'" y eso haremos

$$0 = e^{0\nu} k_\nu = \frac{1}{2} e^\nu{}_\nu k^0$$

, pero k^0 no es nunca nulo → la traza $e^\nu{}_\nu$ será nula; pero como $e^{0\nu} = 0$ ⇒

$$e^i{}_i = 0$$

, con lo cual

$$e^{\mu\nu} k_\nu = 0 = \cancel{\underbrace{e^{\mu 0}}_{=0} k_0} + e^{\mu i} k_i$$

$$e^{ji} k_i = 0$$

En resumidas cuentas:

$$\boxed{h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{ikx} + \mathbb{C}C}$$

$$e_{0\nu} = 0 \ \left(\overset{4}{\text{cond.}}\right)$$

$$e_i{}^i = 0 \ \left(\overset{1}{\text{cond}}\right) \quad e^{ji} k_i = 0 \ \left(\overset{3}{\text{cond}}\right)$$

Para $h_{\mu\nu}$ se puede escribir

$$h_{0\nu} = 0 \quad h^i{}_i = 0 \quad h^{ji}{}_{,i} = 0$$

, esto es el "gauge TT", porque la perturbación es ⊥ al vector de propagación

$$TT \doteq \text{transversal traceless}$$

● EJEMPLO

Sea onda viajando en $\hat{z}$

$$k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$$

$$h^{TT}_{\mu\nu} = e^{TT}_{\mu\nu} e^{ikx} + \mathbb{C}C$$

, metiendo en una matriz la información de las condiciones

$$e^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{TT}_{11} & e^{TT}_{12} & 0 \\ 0 & e^{TT}_{12} & -e^{TT}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, aquí vemos las dos polarizaciones, que son vistas como dos constantes

UNA: $e^{TT}_{11} \neq 0 \quad e^{TT}_{12} = 0 \equiv \oplus$

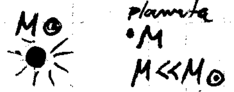
OTRA: $e^{TT}_{12} \neq 0 \quad e^{TT}_{11} = 0 \equiv \otimes$

Podemos hacer una analogía con el EM respecto de las ondas

● $\Box A_\mu = J_\mu$, $\partial_\mu A^\mu = 0$	● $\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$, $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$
● Carga Eléctrica	● Masa
● $\vec{d} = \sum_A e_A \vec{x}_A$ (mom. dipolar eléctrico)	● $M\vec{X}_{CM} = \sum_i m_A \vec{X}_A$ (masa total × pos. cm)
● $\vec{\mu} = \sum_A e_A \vec{X}_A \times \vec{V}_A$	● $\vec{L}$
● Potencia total emitida: con mom. dipolar. elec. $\sim (\ddot{\vec{d}})^2$; con mom. dipolar mag. $\sim (\ddot{\vec{\mu}})^2$; con mom. cuadrupolar $\sim (\dddot{Q}_{kj})(\dddot{Q}_{kj})$	● Potencia total emitida: si se conserva valen 0 $\sim (\dot{\vec{P}})^2 = 0$, el primer no nulo es $\sim (\dot{\vec{L}})^2 = 0$ → $\sim (\dddot{I})^2$; $I_{ij} = \sum_A m_A X^i_A X^j_A$

Podemos hacer una cuenta de órdenes de magnitud; considere-

$$P \sim \dddot{I}^2 \frac{G}{c^5}$$



mos un sistemita planeta-Sol como el ilustrado arriba ↑

$$\dddot{I}^2 \frac{G}{c^5} = \frac{G}{c^5}\left(\frac{MR^2}{T^3}\right)^2$$

Para Júpiter da ~ 10^{10} erg/seg. Asimismo el $\underbrace{\tau}_{\text{tiempo en el cual se desenergiza al ritmo actual}} \sim E/P \sim 10^{23}$ años; escala a la cual se nota la pérdida de energía por ondas gravitacionales.

■ Práctica

● Problema 8

Se dan $\rho_M, \rho_R, \rho_V, \varkappa$

$$[1]\quad H^2 + \frac{\varkappa}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$[2]\quad \frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho+3P)$$

$$\Rightarrow \dot\rho = -3H(\rho+P) \quad [3]$$

$$P=\alpha\rho \quad (\text{Ec. de Estado})$$

Usamos la ecuación de estado en [3] y se tiene:

$$\dot\rho = -3\frac{\dot a}{a}\rho(1+\alpha) \Rightarrow$$

$$\rho(t) = \underbrace{\rho(t_0)}_{\text{densidad de materia actual}}\left(\underbrace{\frac{a(t)}{a(t_0)}}_{\tilde a\,[\text{hoy}]}\right)^{-3(1+\alpha)}$$

Los ejemplos de materia son:

- NR ó polvo $P=0 \to \alpha=0$
- Radiación $\alpha=\frac{1}{3}$
- Const. cosmológica $\alpha=-1$

$$1+\frac{\varkappa}{\tilde a^2\, a(t_0)^2 H^2} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$$

$$1+\underbrace{\frac{\varkappa}{\tilde a^2 (a(t_0))^2 H_0^2}}_{-\Omega_c\ (\text{curvatura})}\underbrace{\left(\frac{H_0}{H}\right)^2}_{\left(\frac{1}{\tilde h}\right)^2} = \underbrace{\boxed{\frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}}}_{\frac{1}{\rho_c(t_0)}}\left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \qquad H_0 = \frac{\dot a}{a}\Big|$$

$$\tilde h^2 - \frac{\Omega_c}{\tilde a^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t_0)}$$

si $t=t_0$ resulta que:

$$1-\Omega_c = \rho(t_0)/\rho_c(t_0)$$

luego resulta:

- $\rho(t_0)=\rho_c(t_0) \Rightarrow \Omega_c=0$ (UNIVERSO PLANO)
- $\rho(t_0)>\rho_c(t_0) \Rightarrow \Omega_c<0 \Rightarrow \varkappa=1$ (UNIVERSO CLOSED)
- $\rho(t_0)<\rho_c(t_0) \Rightarrow \Omega_c>0 \Rightarrow \varkappa=-1$ (UNIVERSO OPEN)

$$\frac{\rho_M(t)}{\rho_c(t_0)} = \underbrace{\left[\frac{\rho_M(t_0)}{\rho_c(t_0)}\right]}_{\Omega_M}\tilde a^{-3} \quad \left(\begin{matrix}\text{materia}\\ \text{NR}\end{matrix}\right)$$

$$\frac{\rho_R(t)}{\rho_c(t_0)} = \Omega_R\,\tilde a^{-4}$$

$$\frac{\rho_V(t)}{\rho_c(t_0)} = \Omega_V$$

$$[\tilde h(t)]^2 = \frac{\Omega_c}{\tilde a^2(t)}+\frac{\Omega_M}{\tilde a^3(t)}+\frac{\Omega_R}{\tilde a^4(t)}+\Omega_V$$

En $t=t_0$

$$\boxed{1 = \Omega_c+\Omega_M+\Omega_R+\Omega_V}$$

$$\left(\frac{d\tilde a}{d\tilde t}\frac{1}{\tilde a}\right)^2 = \tilde h^2 \quad \to \tilde t = tH_0$$

Si a $t=0$ nos hallamos en

el Big Bang $\Rightarrow$ t_0 = Edad universo

$$\frac{d\tilde a}{\sqrt{\frac{\Omega_M}{\tilde a}+\frac{\Omega_R}{\tilde a^2}+\tilde a^2\Omega_V+\Omega_C}} = \int_0^{\tilde t_0} d\tilde t = \tilde t_0$$

$$\int_0^1 d\tilde a\, f(\tilde a) = t_0 H_0$$

Algunas suposiciones permiten simplificar el asunto:

si $\Omega_C=0$ $\quad \tilde a \in (0,1) \to$

$$\tilde a^2 < \tilde a^{-1} < \tilde a^{-2}$$

y veo como pesan en la raíz los diferentes términos.

24-11-08 Para universos

materia ($\Omega_M=1$) y plano ($\Omega_C=0$)

$$t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}$$

radiación ($\Omega_R=1$) y plano

$$t_0=\frac{1}{2}H_0^{-1}<\frac{2}{3}H_0^{-1}$$

vacío ($\Omega_V=1$) y plano

$$t_0\to+\infty$$

Con las observaciones experimentales

$\Omega_M\sim 0.3 \qquad \Omega_R\sim 8\cdot 10^{-5}$

$\Omega_V\sim 0.7 \qquad \Omega_C\sim 0$

$$t_0\cong(0.963)\cdot H_0^{-1}$$

$$H_0\sim 72\,\frac{km}{Mpc}$$

Problema Adicional

Con $\Omega_C=0$, usamos el horizonte de partículas

$$d_H(t_0)=a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)}$$

$$H=\frac{da}{dt}\frac{1}{a(t)}\to$$

$$dt=\frac{da}{aH}=\frac{da}{a_0\tilde a\tilde h H_0}$$

y se puede usar la ecuación de Friedman $\tilde h(\tilde a)$

a) Halle una expresión integral para $d_H(t_0)$ en términos de los parámetros cosmológicos (Ω, etc)

b) Resolver analíticamente para un universo dominado por materia y para otro x radiación

c) Resolver numéricamente la integral usando valores actuales de los parámetros y H_0. (en Gpc)

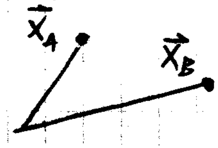
■ Teoría

● Detección de Ondas Gravitacionales.

Definimos unas coordenadas TT tales que:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}^{TT}$$

Se quiere ver el efecto de una onda gravitacional que atraviesa dos partículas



Inicialmente se hallan en reposo

$$\underset{\sim}{U}_A^{(0)}=\underset{\sim}{U}_B^{(0)}=(1,0,0,0)$$

Todo el tiempo la cuadrivelocidad será el (1,0,0,0) más correcciones en h

$$\underset{\sim}{U}_A=\underset{\sim}{U}_A^{(0)}+\mathcal{O}(h_{\mu\nu})$$

$$\underset{\sim}{U}_B=\underset{\sim}{U}_B^{(0)}+\mathcal{O}(h_{\mu\nu})$$

Para las geodésicas, como los Γ son de orden 'h' me quedo con $U^\alpha U^\beta$ en reposo, es decir:

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}U^\beta U^\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}\approx-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}U^\beta_{(0)}U^\gamma_{(0)}=-\Gamma^\alpha_{00}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left[h^{TT}_{\beta 0,0} + h_{0\beta,} - h_{00,\alpha}\right]$$

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = 0 \rightarrow \frac{dU^{\alpha}}{d\tau} \approx 0 \rightarrow$$

$$U^{\alpha}_{A,B} = (1,0,0,0)$$

$$\vec{X}_A(\tau) = \vec{X}_A = cte$$
$$\vec{X}_B(\tau) = \vec{X}_B = cte$$

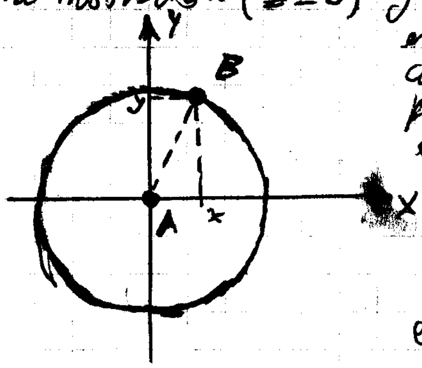
Las coordenadas espaciales se mantienen constante. Pero esto no implica que la distancia entre partículas se mantenga constante.
Para calcular la distancia física entre partículas suponemos que:

onda plana en $\hat{z}$

$$h^{TT}_{xx},\ h^{TT}_{xy},\ h^{TT}_{yy} = -h^{TT}_{xx}$$

(las cuales son función de $[t,z]$)

situamos las partículas según la ilustración ($z=0$) y pensamos en una circunferencia porque allí es más fácil ver el efecto de una onda que pase por el espacio.



$$\Delta L^2(t) = g_{ij}\, \Delta x^i \Delta x^j$$

$$\Delta L^2(t) = (\eta_{ij} + h^{TT}_{ij})\, \Delta x^i \Delta x^j$$

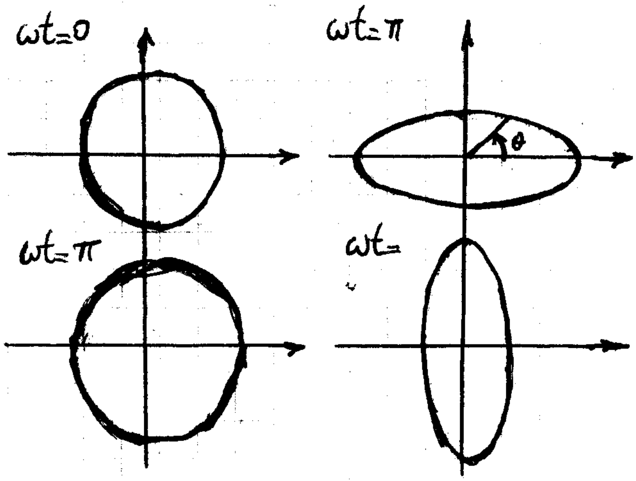
$$\Delta L^2(t) = x^2 + y^2 + h^{TT}_{xx}(0,t)x^2 + h^{TT}_{yy}(0,t)y^2 + 2xy\, h^{TT}_{xy}(0,t)$$

Veamos: * Polarización $\oplus$

$$h_{xy} = 0 \qquad h^{(t,0)}_{xx} = -h^{(t,0)}_{yy} = e_{11}\,\mathrm{sen}[\omega t]$$

$$(\Delta L)^2(t) = x^2(1 + e_{11}\cdot \mathrm{sen}\,\omega t) + y^2(1 - e_{11}\cdot\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$\Delta L^2 = \frac{X^2}{(1-e_{11}\,\mathrm{sen}\,\omega t)} + \frac{Y^2}{(1+e_{11}\,\mathrm{sen}\,\omega t)}$$



* Polarización $\otimes$

$$h_{xx} = h_{yy} = 0$$

$$h_{xy}(t,0) = e_{12}\cdot\mathrm{sen}(\omega t)$$

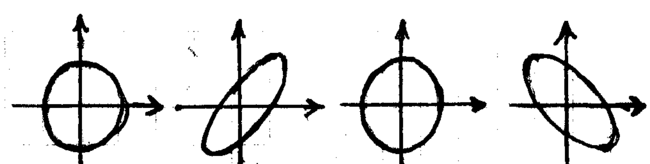
$$\Delta L^2(t) = x^2 + y^2 + 2xy\,e_{12}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

redefiniendo coordenadas:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$$

vuelvo a la misma ecuación de antes (rotadas $\pi/4$)

$$X^2 + Y^2 + (Y^2 - X^2)e_{12}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$



Entonces podemos detectar el paso de una onda gravitacional si podemos medir distancias físicas de forma muy precisa

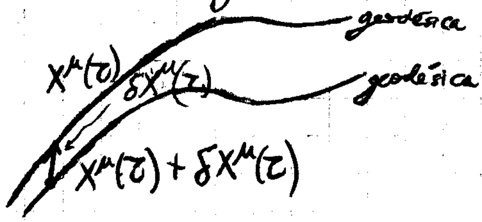
- EXPERIMENTOS TENDIENTES A DETECTAR ONDAS GRAVITACIONALES

EL más conocido es LIGO: Laser-Interferometer Gravitational-Wave Observatory

www.ligo.caltech.edu

- Ecuación de Desviación de las Geodésicas

Ja el comportamiento del vectorcillo que une dos geodésicas. Es una manera alternativa de introducir el tensor de Riemann.
Sean dos geodésicas cercanas.



$$\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\lambda}{d\tau}=0$$

$$\frac{d^2}{d\tau}(X^\mu+\delta X^\mu)+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X+\delta X)\frac{d(X^\nu+\delta X^\nu)}{d\tau}\frac{d(X^\lambda+\delta X^\lambda)}{d\tau}=0$$

Restando ambas ecuaciones y a primer orden en δX^μ, usando que

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X+\delta X)=\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(X)+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\delta X)$$

resulta en:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(\delta X^\mu)+\Gamma^\mu_{\nu\lambda,\rho}\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\lambda}{d\tau}\delta X^\rho+2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dX^\nu}{d\tau}\frac{dX^\lambda}{d\tau}\cong 0$$

$\delta X^\mu \doteq \xi^\mu$ [es un vector]

$$\boxed{(\nabla_u \xi)^\mu=\xi^\mu{}_{;\rho}U^\rho=\frac{d\xi^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\xi^\nu U^\rho=\frac{D\xi^\mu}{D\tau}}$$

Pero quiero derivar otra vez a lo largo de la misma curva

$$[\nabla_u(\nabla_u \xi)]^\mu=(\xi^\mu{}_{;\rho}U^\rho)_{;\lambda}U^\lambda\equiv\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}$$

$$=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau}\right)+\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\frac{D\xi^\rho}{D\tau}U^\lambda=$$

$$=\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\cdots+$$

Entonces podemos escribir todo en términos de este objeto, que es covariante.

$$\boxed{\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}=-R^\mu{}_{\rho\nu\lambda}\xi^\nu U^\rho U^\lambda}$$ ECUACIÓN DE LAS GEODÉSICAS

, la otra manera de definir el tensor de Riemann y dar idea de curvatura. Si es nulo el miembro derecho las geodésicas si son paralelas seguirán siéndolo.

- Generación de Ondas Gravitacionales

las ec. linealizadas (reducéan a)

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu}$$

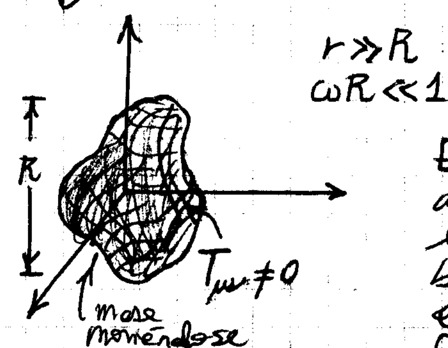
$$\left(\bar{h}_{\mu\nu}-h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}\right)$$

, y las coordenadas armónicas.

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$$

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \Leftrightarrow \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0}$$

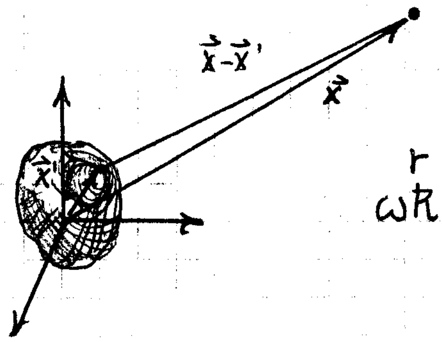
Aproximaremos con fuentes concentradas en alguna región del espacio y miraremos desde lejos.



Este es análogo a la solución llevada a cabo en el libro de Classical Electrodynamics de J.D. Jackson

$$\boxed{h_{\mu\nu}(t,\vec{x})=4\int d^3x'\,\frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}',t-|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

, es como la función de onda retardada. Sobre ella usaremos las aproximociones. Las dos aproximaciones serán necesarias $|\vec{x}|=r \,,\; |\vec{x}'|=R$



$r \gg R$
$\omega R \ll 1$

$$\boxed{h_{\mu\nu}(t,\vec{x}) \cong \frac{4}{r}\int d^3x'\, T_{\mu\nu}(\vec{x}', t-r)}$$

$$e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{x}'|)} \approx e^{i\omega t}\, e^{-i\omega(r)}$$

Usando la conservación del $T_{\mu\nu}$ puede seguirse simplificando.

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0} \Rightarrow$$

• i) $\boxed{\int d^3x'\, T^{0\mu}(\vec{x}, \_) = P^{\mu} = cte}$ (por la conservación)

• ii) $\int d^3x'\, T^{ij}(\vec{x}', \_) =$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int T^{00}(\vec{x}', \_)\, x'^i x'^j\, d^3x'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(I^{ij}\right)$$

, y esta cuenta se hace merced a:

$$\frac{d}{dt}\int T^{00}(\vec{x}', t)\, x'^i x'^j\, d^3x' =$$

$$\int \partial_0 T^{00}(\vec{x}', t)\, x'^i x'^j\, d^3x' =$$

, pero: $\partial_0 T^{00} + \partial_k T^{k0} = 0$

entonces:

$$= -\int [\underbrace{\partial_k}_{\frac{\partial}{\partial x'^k}} T^{k0}]\, x'^i x'^j\, d^3x'$$

$$= \int d^3x'\, T^{k0}(\vec{x}', t) \cdot \left\{ \delta^{ik} x'^j + \delta^{jk} x'^i \right\}$$

Derivando otra vez resulta en:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00}\, x'^i x'^j\, d^3x' =$$

$$\int d^3x'\, \partial_0 T^{k0}\{\dots\} = -\int d^3x'\, \partial_\ell T^{k\ell}\{\dots\} =$$

$$\int d^3x'\, T^{k\ell}\left\{\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{jk}\delta^{i\ell}\right\}$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00}\, x'^i x'^j\, d^3x' = 2\int d^3x'\, T^{ij}(\vec{x}', t)}$$

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{4}{r}\int d^3x'\, T^{\mu\nu}(\vec{x}', t-r) \Rightarrow$$

$$\bar{h}^{0\mu} = \frac{4}{r} P^{\mu}$$

$$\boxed{\bar{h}^{ij} = \frac{2}{r}\frac{d^2}{dt^2} I^{ij}(t-r)}$$

, donde

$$I^{ij}(t-r) = \int d^3x'\, T^{00}(\vec{x}', t-r)\, x'^i x'^j$$

está relacionado con el momento cuadrupolar de masa

$$\boxed{\mathcal{I}^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} I} \quad I \to \text{traza}\,(I^{ij})$$

la parte dependiente del tiempo está asociada al flujo de ondas hacia el infinito

A partir de todo esto podemos ver como calcular el:

$$h^{TT}_{ij}(r,t) = \frac{2}{r}\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{I}^{TT}_{ij}(t-r)\right)$$

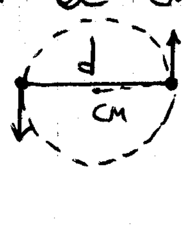
, y la potencia emitida en ondas gravitacionales resulta

$$\boxed{P = \frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ij}(t-r)\, \dddot{\mathcal{I}}_{ij}(t-r) \right\rangle}$$

, esta cuenta es ciclópea. El < > es un promedio temporal

● **EJEMPLO**

Sean dos masas en Mov. circular en torno al CM. Esto es relativamente fácil porque hay que evaluar el cuadrupolar,



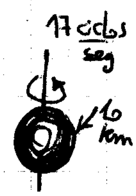
$$\boxed{P = \frac{8}{5}\frac{G\omega^6 m^2 d^4}{c^5}}$$

, además newtonianamente tratado el sistema tiene una variación del período "T" debido a la pérdida de energía en ondas gravitacionales

$$\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2} P \cdot \frac{T}{E}$$

, donde $E = \text{Cin.} + \text{Pot.}$ es la energía total. El primer sistema detectado donde se vió esto fue en el pulsar binario PSR B 1913+16, con datos

$m \approx 1.4\, M_\odot$
$d \approx 1.2 \times 10^9\, m$
$T \approx 7h\, 45m$
$v \sim 10^{-4} c$



$$\frac{dT}{dt} = -6.10^{-6}\ \text{seg/año}$$

Con órbitas circulares de esto, pero da de la excentricidad de 0,6 resulta ser que:

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = 2.422 \cdot 10^{-12}$$

En 1974 obtuvieron mediciones que le valieron el nobel en 1993 de este efecto (1993 a Hulse y Taylor).

26-11-08 ■ Teoría & Práctica
Clase de Consultas pre-parcial

3-12-08 ■ Teoría
● Energía & Momento del campo Grav.
En general:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad P^\mu = \text{cte}$$

, es decir que no implica una ley de conservación.

Quisiéramos definir operativamente un concepto de masa en función de los efectos gravitantes.

Newtonianamente:

$$M = \int d^3x\, \rho$$

, y se cumple a $\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$

, lo cual lleva a:

$$\boxed{M = \frac{1}{4\pi}\int_{r\to\infty} d^3x\, \vec{\nabla}\phi}$$

, entonces puedo definir la masa en base a los efectos gravitatorios sobre el potencial.

Otro ejemplo es el de carga Q de un sistema y usando las ecuaciones de Maxwell

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = J^\mu \Rightarrow$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = 0 = J^\mu{}_{,\mu}$$

luego hay una cantidad conservada

$$Q = \int d^3x\, J^0 = \int d^3x\, F^{0\nu}{}_{,\nu}$$

, pero dada la antisimetría de $F^{\mu\nu}$ sólo contribuyen las derivadas espaciales

$$Q = \int_{\text{todo el espacio}} dx^3 F^{0i}{}_{,i} = \int_{r\to\infty} dS_i\, F^{0i}$$

entonces la carga se define en función del campo en el infinito.

● Enfoque GR (Weinberg chap. 7)
Reescribiremos las ecuaciones de Einstein para hallar un ($T^{\mu\nu}$ eff) que se conserve, i.e.,

$$\left(T_{\mu\nu}{}^{(EFF)}\right)^{,\nu} = 0$$

El precio a pagar será la pérdida de la covarianza.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ \ddagger$$

, con $|h_{\mu\nu}| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

, es decir que tiende asintóticamente al espacio plano aunque no es $|h_{\mu\nu}|$

‡ métrica asintóticamente plana

● Comentarios

P^λ = "cuadrimpulso" total

$t_{\mu\nu}$ = "tensor" no es un tensor general.

Decimos que no es un tensor porque en un cambio general de coordenadas no transforma como un tensor.

Haciendo cambios de coordenadas se puede poner

$$t_{\mu\nu}\Big|_{x=x_0}=0$$

Sin embargo 'P^λ, $t_{\mu\nu}$' son, para transformaciones de Lorentz, cuadrivector y tensor.

El $t_{\mu\nu}=\mathcal{O}(h^2)$

El P^λ cumple que

P^λ se conserva

$$P^\lambda_{total}=\sum_i^N P^\lambda_i$$ si los sistemas 'i' están muy alejados entre sí. Así como la masa de una estrella tiene contribuciones de la masa de la estrella y el aporte del campo gravitatorio

$$M_{total}\neq\sum_i M_i$$

Asimismo P^λ sí es un cuadrivector ante una transformación de coordenadas

$$x'^\mu=x^\mu+\Delta^\mu(x)$$

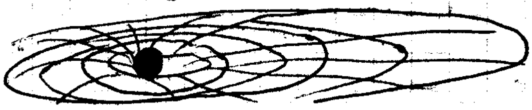
, si vale que

$$\Delta^\mu(x)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

pues el P^λ se define en términos de los campos en el ∞.

● Masa en Schwarzschild

Sea un sistema estático y veamos lejos de la fuente



donde valía

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=-16\pi T_{\mu\nu}=0$$

en coordenadas armónicas

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$$

, y si la métrica es estática

$$\bar{h}_{\mu\nu,0}=0$$

$$\boxed{\nabla^2\bar{h}_{\mu\nu}=0}$$

$$\Rightarrow\bar{h}_{\mu\nu}\propto\frac{1}{r}a_{\mu\nu}\quad[3]$$

, pero

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0=\bar{h}^{\mu i}{}_{,i}$$

por la independencia temporal, con lo cual

$$a^{\mu i}=0$$

, por ello el a^{00} es el único no nulo.

$$a^{00}\neq0$$

que surge de derivar en [3].

Entonces

$$\bar{h}_{\mu\nu}\longrightarrow h_{\mu\nu}\longrightarrow \text{con } r\to\infty$$

$$ds^2=-\left[1-\frac{2M}{r}\right]dt^2+\left[1-\frac{2M}{r}\right]^{-1}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

donde $\boxed{M=a_{00}/4}$

, es la métrica de Schwarzschild para $r\to\infty$ en coordenadas armónicas.

Con el h me fabrico el Q y puedo hacer

$$P^\lambda=\frac{1}{8\pi}\int_{r\to\infty}dS_j\,Q^{j0\lambda}=M\,\delta^\lambda_0$$

La M que entra en Schwarzschild es la de la fuente más su campo gravitacional.

Notemos que

$$h_{\mu\nu}\propto\frac{1}{r}\qquad t_{\mu\nu}\propto\frac{1}{r^4}$$

Eso hace que

$$\int t_{\mu\nu}\, d^3x < \infty \rightarrow P^\nu = cte$$

Ahora metamos una dependencia temporal.

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2}{r}\, \ddot{I}_{ij}(t-r) \quad [1]$$

$$I_{ij} = \int d^3x\, T^{00} x_i x_j$$

, donde los coeficientes I_{ij} están relacionados con el momento cuadrupolar de masa.

$$\boxed{\mathcal{I}_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} I}$$

Queremos ver la potencia emanada en ondas gravitacionales por la pérdida de energía.

$$\text{Potencia} = \frac{1}{5} \underbrace{\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ij}(t-r)\, \dddot{\mathcal{I}}_{ij}(t-r) \rangle}_{\text{promedio temporal}}$$

, el cual con las unidades lleva un factor G/c^5 pegado.

Supongamos que vamos a hacer la cuenta. Ahora tenemos una onda esférica, no plana, en [4] y quiero un análogo del gauge TT.

$\boxed{1}$ El gauge TT para ondas esféricas

$$h_{\mu\nu}(r,t) = f(r)\, e^{i\omega(t-r)} \Rightarrow$$

puedo hacer un cambio de coordenadas:

$$h^{TT}_{0\mu} = 0$$

$$h^{\mu\,TT}_{\ \mu} = 0$$

$$h^{TT}_{\mu j}\, n^j = 0$$

$=0$ la radial es nula

Para ver todo esto es necesario hacer la cuenta

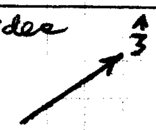
$\boxed{2}$ Manera sistemática de sacar las componentes sobrantes de un h_{ij} no en el gauge TT (Me quiero quedar con la parte transversal sin traza).

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij}^{TT}$$

Definimos un proyector en $\hat{r}$ radial

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \quad \text{, con} \quad \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$$

idea



$\hat{3}$

$\mathbb{P}(\ ) =$ lo lleva al plano XY

Para el caso de una onda plana en $\hat{3}$

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formando una matriz

$$\mathbb{h}^{TT} = \underbrace{\mathbb{P}\mathbb{h}\mathbb{P}}_{\text{proyectar en el subespacio}} \underbrace{- \frac{1}{2}\mathbb{P}\, \text{Traza}(\mathbb{P}\mathbb{h})}_{\text{quitar la traza}}$$

$$h^{TT}_{ij} = P_{ik} h_{kl} P_{lj} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} h_{lk}$$

, donde vemos que

$$h^{TT}_{ij}\eta^{ij} = 0 \ \wedge\ h^{TT}_{ij}\eta^j = 0$$

, están en el gauge "TT".

Es necesario aclarar que aquí hemos pasado de h_{ij} porque h_{0i} ya se satisface automáticamente.

$\boxed{3}$ El cálculo de la potencia.

Si el sistema pierde energía es por un flujo del $t_{\mu\nu}$.

$$Pot = \int_{r\to\infty} \underbrace{\langle t^{0r} \rangle}_{\text{promedio temporal}} r^2\, d\Omega$$

Vimos que el $t^{\mu\nu}$ era el "tensor" asociado a las ondas. En una situación dependiente de 't' interpreto que al ver que $t^{\mu\nu}$ tiene un flujo no nulo en el ∞ debe ser pérdida de energía.

Hay que poner t^{or} en términos de $(h^{\lambda\rho}{}_{,\sigma})^2$

$$P^\lambda = \int T^{0\lambda}_{EFF} d^3x$$

$$P^\lambda{}_{,0} = \int T^{0\lambda}_{EFF,0} d^3x = -\int (T^{i\lambda}{}_{,i} + t^{i\lambda}{}_{,i}) d^3x$$

$$\frac{dP^0}{dt} = \int t^{i0}{}_{,i} d^3x = -\int_{r\to\infty} dS_i t^{0i}$$

$$\frac{dP^0}{dt} = -\int r^2 t^{or} d\Omega$$

Luego debe escribir h_{ij} en términos de I_{ij}, luego

$$Pot = \int_{r\to\infty} \frac{1}{8\pi \cancel{r^2}} \langle \dddot{I}^{TT}_{ij} \dddot{I}^{TT}_{ij} \rangle \cancel{r^2} d\Omega$$

Derivando en [4] le suma un '$\cdot$' a la I_{ij} y me preocupa el $(t-r)$ porque el $1/r$ dará cosas que se mueren en ∞

$\boxed{4}$ Expresar el resultado en términos de $\dddot{I}_{ij}$ porque los componentes TT tienen en cada punto del espacio direcciones diferentes.

$$\dddot{I}^{TT} = \mathbb{P}\dddot{I}\,\mathbb{P} - \frac{1}{2}\mathbb{P}\,\mathrm{tr}(\mathbb{P}\dddot{I})$$

$I^{TT}_{ij} \longrightarrow I_{ij}$ de forma idem a lo hecho con el h_{ij}.

$$\dddot{I}^{TT}_{ij}\dddot{I}^{TT}_{ij} = \mathrm{Tr}(\dddot{I}^{TT})^2$$

en los proyectores aparecen las variables angulares

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$$

integrales del tipo

$$\int d\Omega\, n_i n_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}$$

$$\int d\Omega\, n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

etc.

Finalmente:

$$\boxed{Pot = \frac{1}{5} \langle \dddot{I}_{ij} \dddot{I}_{ij} \rangle}$$

Práctica

Algunos comentarios del parcial

2 b) ii)

$$d_H(t_e) = a(t_e)\int_0^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = a(t_e)\left(\frac{t}{t_e}\right)^{\dots}$$

$$= 2t_e = 2\frac{t_e}{t_0} t_0$$

$$d_H(t_e) = 2\frac{1}{(1+z_e)^{3/2}} \cdot \frac{2}{3H_0}$$

---

3 a)

$$\underline{U}_1 = \left(\frac{e_1}{1-\frac{r}{r_s}}, 0, 0, \frac{l_1}{R^2}\right)$$

y había que meter los valores de e_1 y l_1

3 b) $2\pi = \Delta\tau \cdot \frac{l_1}{R^2}$

3 d) $\gamma(v) = -\underbrace{U_1}_{e_{\hat{0}_1}} \cdot \underbrace{U_2}_{e_{\hat{0}_2}}$

No hace falta las bases ortonormales debido a que piden solo el módulo

$$E_1 = \gamma(v) m_1 \big|_{02} = -e_{\hat{0}_2} \cdot U_1 m_1$$

$$= P_1^{\hat{0}}$$

$$\gamma(v) = - \underline{U_2} \cdot \underline{U_1}$$

$$\gamma(v) = - \underline{U_1} \cdot \underline{U_2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Son la misma.

$$- \underline{U_1} \cdot \underline{U_2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_s}{R}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} =$$

obs.

$$\underline{U_1} = \left(\frac{e_1}{1-r_s/R}, 0, 0, \frac{l_1}{R^2} \right)$$

es en base coordenada

$$\underline{U_1} = \frac{e_1}{(1-r_s/R)} \underline{e_t} + \frac{l_1}{R^2} \underline{e_\varphi}$$

FIN DEL CURSO