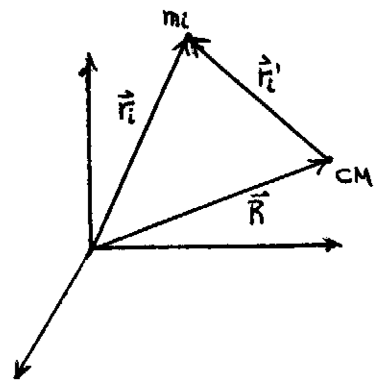
- **Momento Angular**

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{L}_o^{TOT} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$
$$= \sum_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i'\right) \times m_i\left(\vec{V} + \vec{v}_i'\right)$$
$$\vec{L}_o^{TOT} = \sum_i \left(\vec{R} \times m_i\vec{V} + \vec{R} \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times m_i\vec{V} + \vec{r}_i' \times m \ldots\right.$$
$$\vec{L}_o^{TOT} = \vec{R} \times M\vec{V} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i\vec{v}_i'}_{\frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{r}_i'\right)} + \left(\sum_i m_i\vec{r}_i'\right) \times \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m \ldots$$
$$\vec{L}_o^{TOT} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i'$$
$$\boxed{\vec{L}_o^{SIST.} = \vec{L}^{CM} + \vec{L}_{CM}^{SIST.}}$$

$\vec{L}^{CM}$ ||| L orbital $\vec{L}_{CM}^{SIST.}$ ||| L spin

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$
$$M\vec{R} = \sum_i m_i\left(\vec{R} + \vec{r}_i'\right)$$
$$M\vec{R} = \sum_i m_i\vec{R} + \sum_i m_i\vec{r}_i'$$
$$M\vec{R} = M\vec{R} + \sum_i m_i\vec{r}_i'$$
$$0 = \sum_i m_i\vec{r}_i'$$

Conservación del $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{\tau}_o$$

↗ torque de fuerzas externas → τ^{ext} si son nulas o centrales es cero

↘ torque de fuerzas internas → τ^{int} si vale PA&R fuerte ↘ $(r_i - r_j \; // \; F_{ij})$ ⇒ $\tau^{int} = 0$

- **Trabajo & Energía**

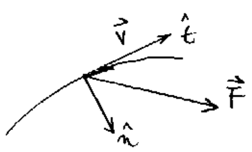
$$T_2 - T_1 = W_{1\to 2} = U_1 - U_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

$T_2 - T_1 = W_{1\to 2}$: siempre

$W_{1\to 2} = U_1 - U_2$: si $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

se conserva la energía

Solo las componentes de la fuerza tangenciales producen W



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \rightarrow$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_n$$
$$m\, dv \cdot \frac{ds}{dt} = F_t \cdot ds = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$
$$m\int v \cdot dv = \int F_t \cdot ds$$
$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2 \Big|_i^f = W_{i\to f}}$$

teorema de fuerzas vivas

$d\vec{s}$ ↑ versor de desplazamiento (camina por la trayectoria)

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

$$\sum_i^N \int \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{s}_i \rightarrow \text{necesito } \vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i)$$
$$\vec{\nabla}_i \times \vec{F}_i = 0$$

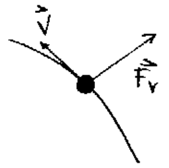
$$W_i^{int} = \int \sum_j^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_i$$
$$W^{int} = \sum_i \int \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_i$$
$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \int \vec{F}_{ij} d\vec{s}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_j = \frac{1}{2}\sum\sum' \int \vec{F}_{ij} (d \ldots$$

• Definiciones

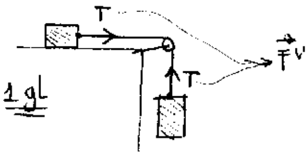
grados de libertad = # coord. indeptes. para resolver el problema

F^v se acomodan en todo momento para satisfacer las ligaduras

$\vec{F}^v \perp$ despl. compatible con el vínculo $\Rightarrow W_{F^v} = 0$



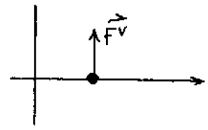
1gL

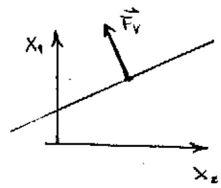


1gL

vínculo soga ℓ

1D

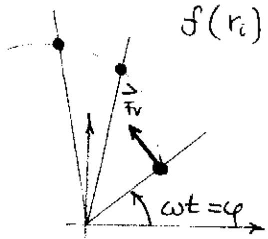




* VÍNCULOS

holónomos $\left\{\begin{array}{ll} f(r_i,t)=0 & \text{reónomos} \\ f(r_i)=0 & \text{esclerónomos} \end{array}\right\}$ cumplen que el $W^{F^v}_{\text{VIRTUAL}} = 0$

no holónomos $\left\{\begin{array}{l} f(r_i,t) \geq 0 \\ f(\dot{r}_i)=0 \\ f(r_i) \geq K \end{array}\right\} \rightarrow$ No cumplen, en general, $\vec{F}^v \perp$ despl. posible



desplazamiento virtual :
despl. a t_0 fijo compatible con los vínculos

desplazamiento real :
despl. en δt durante el cual varían fuerzas y ligaduras

a t fijo el despl. es en $\hat{r} \perp F_v \hat{\varphi}$

$$f(x_i,t) = K \quad \rightarrow \quad \sum_i^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \delta t = 0$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{\delta r} = 0$$

Principio de los Trabajos Virtuales

Fuerza aplicada

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^v$$

$$m_i \vec{a}_i = \dot{\vec{P}}_i \longrightarrow \dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^a - \vec{F}_i^v = 0$$

despl. virtuales

$$\sum_i^N \left(\dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^a - \vec{F}_i^v\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Hagamos los despl. compatibles con los vínculos $\longrightarrow$

$$\sum_i^N \left(\dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^a\right) \cdot \delta\vec{r}_i - \sum_i^N \underbrace{\vec{F}_i^v \cdot \delta\vec{r}_i}_{=0} = 0$$

porque $\vec{F}_i^v \perp \delta\vec{r}_i$ si los $\delta\vec{r}_i$ son compatibles con los vínculos

PTV $\to$ $$\boxed{\sum_i^N \left(\dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^a\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

equivale a

ecuación de vínculo $\blacktriangleright$ $f(\vec{r}_i) - K = 0$

$$\sum_i^N \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i = 0$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$\Rightarrow$ como $\delta\vec{r}_i$ son indeptes. $\Rightarrow$ $\dot{\vec{P}}_i - \vec{F}_i^a = 0 \quad \forall i$

Construcción del Lagrangiano

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \quad \text{(hay } N \text{ relaciones)}$$

N partículas
k ecuaciones de vínculo
$3N-k$ g.L.

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\underbrace{\delta t}_{=0}$$

Por ser virtual el despl.

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

$$\sum_i^N \dot{\vec{P}}_i \cdot \delta\vec{r}_i - \sum \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\sum_i^N m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$$

$$\sum_i^N \sum_j^{3N-k} \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j$$

pero

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i v_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j$$

pero

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) dq_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) dt$$

$$\sum_i^N \sum_j^{3N-k} \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}\right)\right\}\delta q_j$$

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\sum_j^{3N-k} \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)\right\} \cdot \delta q_j$$

$$\equiv \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\ell} = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\ell}\right) = \frac{\partial \vec{r}_i / \partial t}{\partial q_\ell / \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_\ell}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\ell} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\ell \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\ell \partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\ell}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\ell} \longleftarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\ell}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\ell \partial q_j} dq_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\ell \partial t} dt\right)$$

$$\sum_i^N \dot{\vec{P}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T) \right\} \delta q_j$$

$$\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j^{3N-k} \underbrace{\sum_i^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j \equiv \text{ fuerza generalizada}} \cdot \delta q_j = \sum_j^{3N-k} Q_j \cdot \delta q_j$$

$$\sum_j^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T) - Q_j \right\} \delta q_j$$

Supongamos que las fuerzas son conservativas $\Rightarrow$

$$Q_j \delta q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \Rightarrow \text{ como } V = V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) \text{ se tiene}$$

$$V = \sum_i^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}}_{\vec{F}_i^a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}} \cdot \delta q_j$$

$$\sum_j^{3N-k} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) \right\} \delta q_j = 0$$

$\Rightarrow$ tomamos $T - V \equiv \mathcal{L}$ y $\Rightarrow$

$$\sum_j^{3N-k} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

Si hubiese fuerzas no provenientes de potencial sería

$$Q_j + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC} \rightarrow$$

$$\sum_j^{3N-k} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j^{3N-k} Q_j^{NC} \cdot \delta q_j \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC}}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

● <u>Invariancia del $\mathcal{L}$ ante la adición de dF/dt con $F(\vec{r}_i,t)$</u>

Sea $\quad F = F(q_i, t)$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF}{\partial t} \qquad\qquad \mathcal{L} = T - V$$

$$\sum_j^{3N-k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

$$= \sum_j^{3N-k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)} = 0$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j^{3N-k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

son iguales porque $F \in C^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\dfrac{dF}{dt}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial q_j} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial q_j} + \dfrac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial q_j}\left(\dfrac{dF}{dt}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \cdot \dot{q}_j + \dfrac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \end{cases}$$

• Momentos Conjugados & Coordenadas Cíclicas

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j}$$ Momento canónicamente conjugado a q_j

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j \rightarrow \text{fuerza generalizada en el g.L. } j$$

$$\sum_i^N \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j^{3N-k}\underbrace{\sum_i^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j}\delta q_j$$

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_n, \dot{q}_i, t)$$

$$\rightarrow \quad Q_k - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}}_{=0} = 0 \rightarrow Q_k = 0 \rightarrow \dot{p}_k = 0 \rightarrow p_k = cte$$

$\nexists$ fuerza generalizada en el g.L. k

Se conserva el momento p_k canónicamente conjugado a q_k.

• Energía Cinética de un sistema (en función de coordenadas generalizadas)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \cdot \left(\sum_j^{3N-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_s^{3N-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

despl. real $\rightarrow$ $$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\cdot dt \qquad \text{usando} \qquad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\sum_j^{3n-k}\sum_s^{3n-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\cdot\dot{q}_j\cdot\dot{q}_s + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 + 2\sum_j^{3n-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\dot{q}_j\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i^N m_i\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{\equiv T_0} + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\sum_{j,s}^{3N-k}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\cdot\dot{q}_s\cdot\dot{q}_j\right) + \sum_i^N m_i\left(\sum_j^{3N-k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\cdot\dot{q}_j\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_j\sum_s\underbrace{\sum_i^N m_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}}_{a_{js}(q_1,\ldots q_{3N-k},t)}\cdot\dot{q}_s\cdot\dot{q}_j \qquad \sum_j^{3N-k}\underbrace{\sum_i^N m_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{b_j(q_1,\ldots,q_{3N-k},t)}\cdot\dot{q}_j$$

$$\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{T_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j^{3N-k}\sum_s^{3N-k}a_{js}(q_1,\ldots,q_{3N-k})\,\dot{q}_s\cdot\dot{q}_j}_{T_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_j^{3N-k}b_j(q)\cdot\dot{q}_j}_{T_1}}$$

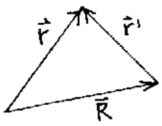
partícula libre $T = T_2$ (siempre)

partícula con vínculos $T = T_0 + T_1 + T_2$ (puede llegar a tener T_0, T_1)

- **Energía Cinética Sist. Partículas**

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\dot{\vec{R}}+\dot{\vec{r}}_i'\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\dot{\vec{R}}^2+\dot{\vec{r}}_i'^{\,2}+2\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}_i'\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \vec{V}_{cm}^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \vec{v}_i'^{\,2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i^N m_i\, 2\,\vec{V}_{cm}\cdot\vec{v}_i'}_{=0}$$



$$\boxed{T^{TOT} = T^{CM} + T_{CM}^{TOTAL}}$$

$$M\vec{R}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M\vec{R}_{cm} = \sum_i m_i(\vec{R}+\vec{r}_i')$$

$$M\vec{R}_{cm} = \sum_i m_i\vec{R} + \sum m_i \vec{r}_i'$$

$$0 = \sum_i m_i \vec{r}_i'$$

$$0 = \sum_i m_i \vec{v}_i'$$

$$0 = \sum_i^N m_i \vec{V}_{cm}\cdot\vec{v}_i'$$

- **Trabajo en un Sistema de Partículas**

$$W = W^{ext} + W^{int}$$

No dependencia del camino para [1] requiere

$$[1]\quad W^{ext} = \sum_i^N \int_1^2 \vec{F}_i^e\cdot d\vec{s}_i \quad ; \text{ si } \left.\begin{array}{l}\vec{F}_i^e = \vec{F}_i^e(\vec{r}_i)\\ \vec{\nabla}_{r_i}\times\vec{F}_i^e = 0\end{array}\right\} \Rightarrow W^{ext} = -\sum_i^N \Delta V_i\Big|_1^2$$

puedo inducir una f. potencial para las f. externas

$$W_i^{int} = \int_1^2 \sum_{\substack{j\\ j\neq i}}^N \vec{F}_{ij}\cdot d\vec{s}_i$$

$$[2]\quad \sum_i^N W_i^{int} = W^{int} = \sum_{\substack{i\\ i\neq j}} \int_1^2 \sum_{\substack{j\\ j\neq i}}^N \vec{F}_{ij}\cdot d\vec{s}_i$$

Lagrangiano Cíclico en el tiempo

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}[q,\dot{q},t]\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\cdot\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\dot{q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\cdot\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\ddot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\cdot\dot{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\dot{q}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\cdot\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}\right) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right]\cdot\dot{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\cdot\dot{q}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{L}] = \frac{d}{dt}\left[p\cdot\dot{q}\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{p\cdot\dot{q} - \mathcal{L}}_{\equiv H}\Big] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Ez hamiltoniano ⟶

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

$H = (cte)$ si $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$

$H = E$ si $\begin{cases} T = T_2 \\ V \neq V(\dot{q}) \\ \text{vínculos} \neq \text{vínculos}(t) \end{cases}$ ⟵ esta condición genera, en realidad, que $T = T_2$

$E = (cte)$ si $W^{NC} = 0$

- **Energía Cinética & el Hamiltoniano**

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{T_0} + \underbrace{\sum_{l=1}^{3N-k} b_l(q_1,\ldots,q_{3N-k})\cdot \dot{q}_l}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{s=1}^{3N-k} a_{js}(q_1,\ldots,q_{3N-k})\cdot \dot{q}_j \dot{q}_s}_{T_2}$$

$$E = T_0 + T_1 + T_2 + V \qquad\qquad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 2T_2 + T_1$$

$$H = \sum_i p_i \cdot \dot{q}_i - \left(T_0 + T_1 + T_2 - V\right)$$

$$H = 2T_2 + T_1 - T_0 - T_1 - T_2 + V = T_2 - T_0 + V$$

$$E = T_0 + T_1 + T_2 + V \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = H} \Leftrightarrow$$

$$T_0 + T_1 + T_2 + V = T_2 - T_0 + V$$

$$2T_0 + T_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{matrix} T_0 = 0 \\ T_1 = 0 \end{matrix}}$$

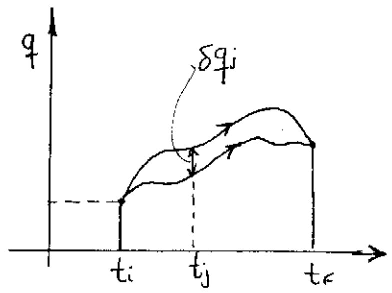
● Principio de Acción Mínima

También principio variacional de Hamilton.

$$\boxed{S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt} \qquad \mathcal{L} \equiv T - V$$

la acción

La trayectoria real de un sistema con lagrangiano $\mathcal{L}$ es tal que S es mínimo para cualquier trayectoria posible entre $q_i(t=t_i)$ y $q_i(t=t_f)$



Consideraremos una variación con extremos fijos y con t fijo

$$\delta q(t=t_i) = 0 \qquad \delta t = 0$$
$$\delta q(t=t_f) = 0$$

t fijo significa que todos las trayectorias emplearán el mismo tiempo (no se varía el tiempo)

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

$$\delta I = \int \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) + \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt$$

$$\delta I = \int \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \int \sum_i \underbrace{\left\{ -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right\}}_{=0 \text{ por Euler-Lagrange}} \delta q_i \, dt$$

$$① \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\delta q_i}_{=0} \Big|_{t_i}^{t_f} +$$

Si se hace $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df}{dt}$ $\Rightarrow$ la trayectoria que minimiza $\mathcal{L}'$ es la misma que minimiza $\mathcal{L}$ por la condición ①

$$\boxed{\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i^N \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$$

• Aplicaciones del Principio de Acción Mínima

$\mathcal{L}$ con $V = V_0$ (constante) sujeta a potencial constante

$$S = \int (T - V_0)\, dt$$

la integral de acción da una medida de la long. de la órbita (el espacio recorrido).

$$S = \int \frac{1}{2} m v_0^2 \, dt \quad \rightarrow \quad S = \frac{m v_0^2}{2}(t - t_0)$$

Partícula sujeta a $V=0$

$$S = \frac{m . v_0}{2} . \underbrace{v_0 (t - t_0)}_{\text{distancia recorrida}}$$

Cálculo de Variaciones

$$I = \int f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) . dt \quad \Rightarrow \quad I \text{ es extremo si:}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \left[\frac{dx}{dt}\right]}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$I = \int f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) . dx$$

• Multiplicadores de Lagrange

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}\left(q_i[t], \dot{q}_i[t], t\right) . dt \quad \Rightarrow \quad \delta S = 0 \iff$$

$$\int \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right] \underbrace{\delta q_j}_{\text{despl. independientes}} . dt$$

Si no se puede despejar alguna δq_j (con vínculos NO-holónomos, por ej) $\Rightarrow$ algún δq_j es dependiente $\rightarrow$ para que valga $\delta S = 0$ necesitaré

$$\sum_{\ell} a_\ell^k (q_i, t)\, \dot{q}_\ell + b^k (q_i, t) = 0 \qquad \leftarrow \text{vínculos}$$

multiplicamos por δt

$$\sum_{\ell}^{N} a_\ell^k (q_i, t)\, \delta q_\ell + b^k (q_i, t) . \delta t = 0 \quad \Rightarrow \text{vemos que no son indeptes}$$

$k = 1, \dots, s$ son "s" ecuaciones de vínculo

sean δq_ℓ variación a t fijo $\Rightarrow$

$$\sum_{\ell}^{N} a_\ell^k (q_i, t) . \delta q_\ell = 0 \quad \Rightarrow$$

$g^L \rightarrow$

$$\int_{t_i}^{t_f} \lambda^k . \underbrace{\sum_{\ell}^{N} a_\ell^k (q_i, t) . \delta q_\ell}_{=0} . dt = 0$$

$$\sum_{k}^{s} \int \lambda^k \sum_{\ell}^{N} a_\ell^k (q_i, t) . \delta q_\ell . dt = 0$$

lo otro Σ fue absorbida y paré de $l \to j$

$$\int \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{k}^{S} \lambda^k a_j^k(q_i,t) \right\} \delta q_l \, dt = 0$$

si los vínculos son hol.

$$\Rightarrow \sum_{j}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{j}^{N}\sum_{k}^{S} \lambda^k a_j^k(q_i,t) = \sum_{j}^{N}\sum_{k}^{S} \lambda^k \vec{\nabla}_j f^k \cdot \frac{\delta \vec{r}_j}{\delta q_j}$$

$(i=1,\dots,N)$ — grad. de la ec. de vínculo según j

donde λ^k es la fuerza de vínculo asociada al vínculo no despejado pues como

Fuerza generalizada (no proviene de V)

$$Q_j = \sum_i^N \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$ comparando

$$= \sum \lambda^k \, a_j^k(q_i,t)$$ todos — VÍNC. NO holónomos

$$Q_j = \sum \lambda^k \, \vec{\nabla}_j f^k \cdot \delta \vec{r}_j$$ vinc. holónomos

$$\lambda^k \frac{\partial f^k}{\ } \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow \vec{F}_i^a = \lambda^k \quad \text{pues} \quad a_j^k = \frac{\partial f^k}{\partial q_j}$$

VINC. holónomos __________

$g(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n,t) = 0$ → no los quise despejar en función de $q_1,\dots,q_n$

$$\sum_i^N \frac{\partial g^k}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{\nabla}_i g^k \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial g^k}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j \delta q_j = \sum_i^N \lambda \cdot \overbrace{\left(\vec{\nabla}_i g^k \cdot \delta \vec{r}_i\right)}^{a_j^k \cdot \delta q_j}$$ → despl. virtual de la partícula

$$Q_j \delta q_j = \lambda \cdot \sum_k \frac{\partial g^k}{\partial \vec{r}_i} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Vínculos holónomos → $\boxed{\frac{\partial g^k}{\partial q_j} \equiv a_j^k}$ ⇒ λ^k son las fuerzas de vínculo

vinc. no holónomos __________

λ^k son las F^v asociadas a los vínculos no retirados

$$Q_j \cdot \delta q_j = \sum \lambda^k \left(\vec{\nabla}_i g^k \cdot \delta \vec{r}_i\right)$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \cdot \frac{\partial g^k}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_k \lambda^k \cdot \frac{\partial g^k}{\partial q_j} \rightarrow \lambda^k = F^v$$

$$= \sum_i F_i^v \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Para cada g.l sub. j — δq_j son ahora independ.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_k^S \lambda^k \cdot a_j^k = 0$$

$$\underbrace{\sum_i^N F_i^a \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j}$$

VINC. HOL. → $\lambda^k \cdot \nabla_j f^k$ — $\frac{\partial f^k}{\partial q_j}$

Constantes de Movimiento & Simetrías

Sean $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow$ si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} = (cte)$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} \equiv p_i}$$

si $\delta q_i \overset{es}{\rightarrow}$ trasl. rígida $\Rightarrow p_i = \vec{P}\cdot\hat n \quad \wedge \quad Q_j = \vec F \cdot \hat n$

si $\delta q_i \overset{es}{\rightarrow}$ rot. rígida $\Rightarrow p_i = \vec{l}\cdot\hat n \quad \wedge \quad Q_j = \vec \tau \cdot \hat n$

En Vale: $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$ pues $\begin{cases} T \text{ es escalar} \rightarrow \text{no cambia ante rotación} \\ T = T(\dot q) \rightarrow \text{no depende del origen} \end{cases}$ $T = T_z$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

$T = T_z$, $V \neq V(\dot q) \Rightarrow$ Euler-Lagrange adopta

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}(p_i) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \Rightarrow \dot p_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

fuerza total proyectada en $\hat n$

Noether theorem

Si existe una transformación continua $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$ que deje invariante al $\mathcal{L}$
$\Rightarrow$ hay constante de movimiento asociada a dicha transformación.

transf. $q_i \longrightarrow q_i' = q_i + \delta q_i$

que cumple: $\mathcal{L}(q_i, \dot q_i, t) = \mathcal{L}(q_i', \dot q_i', t) \Rightarrow$ debe valer
$= \mathcal{L}(q_i[q_i', t], \dot q_i[\dot q_i', t], t)$

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i = 0$$

a t fijo

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right)\right]}_{=0 \text{ x Euler-Lagrange}}\delta q_i + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)}_{\text{esta es la cantidad conservada}} = 0$$

Variable cíclica es un caso particular de Noether theorem

$q_i' - q_i = \delta q_i$

$$\boxed{\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) = 0}$$

Nota

Hay constantes de movimiento que no provienen de ninguna simetría.

trasl. infinitesimal $\vec r_i' = \vec r_i + \delta \vec r$

rot. infinitesimal

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}(\delta\alpha\, \hat n \times \vec r_i)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\alpha \sum_i \vec p_i \times \vec r_i\right) = \overbrace{\delta\alpha}^{\equiv \varepsilon \rightarrow \text{parámetro infinitesimal}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\sum_i \vec p_i \times \vec r_i}_{\Gamma_{\text{TOTAL}}}\right) = 0$$

infinitesimal

$$k\ gL \qquad \begin{cases} q_i' = q_i + \underbrace{\varepsilon_i \cdot g_i(q_1,\dots,q_k,t)}_{\delta q} \\ \quad\vdots \\ q_k' = \dots \end{cases}$$

$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}$	trasl. rígida
$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\alpha \cdot \hat{n} \times \vec{r}_i$	Rot. rígida

ó también $\rightarrow \boxed{\delta\hat{r} \times \vec{r}}$

T es invariante siempre frente a ↑ (por ser un escalar)

$T = T'$ (a 1^er orden)

V habrá que examinarlo

$V = V|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \rightarrow$ Invariancia ante una traslación rígida

$V = V(x_1, x_2) \rightarrow$ invariancia de traslación en x_3

$\mathcal{L}$ tendrá como constante un mom. lineal si V es invariante frente a traslación

" " " " " " ang. si V " " " a rotación

una combinación si V " " " a una roto-traslación

→ Lo podemos ver así:

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

$$\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t) - \mathcal{L}(q_i',\dot q_i',t) = 0 \Rightarrow \text{pidiendo que} \quad d\mathcal{L}=0 \quad \text{llego a}$$

$$\sum\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\cdot\delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q'}\cdot\delta q'\right)\right\} = 0$$

$$q' = q + \delta q$$

$$\boxed{q_i' = q_i + \sum_\ell^s \varepsilon_\ell\, g_i^\ell}$$

$$\delta q_i' = \delta q_i + \sum_\ell^s \varepsilon_\ell\cdot \delta g_i^\ell$$

transf. general

$$\sum\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\cdot\delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q'}}_{=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}}\cdot\delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q'}\cdot\sum_\ell^s\varepsilon_\ell\, g_i^\ell\right)\right\} = 0$$

pues $g \neq g(t)$
pues estamos a t fijo

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\cdot\sum_\ell^s\varepsilon_\ell\cdot g_i^\ell = C}$$

→ se puede pensar también como que $\mathcal{L}$ es invariante ante la transf. inf. δq →

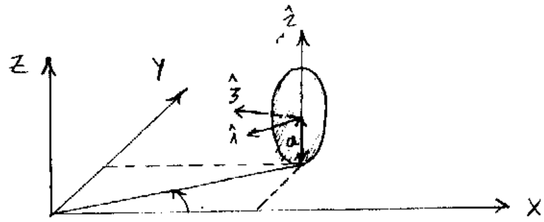
$$\delta\mathcal{L} = 0 = \left(\sum_i^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\cdot\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\cdot\delta\dot q_i\right)$$

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \sum_i^N \underbrace{\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\right]}_{=0 \text{ por Euler-Lagrange}}\delta q_i + \sum_i^N\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\cdot\delta q_i\right)}_{\text{esto es lo que se conserva}}$$

$$\boxed{\delta\mathcal{L} = 0 = \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\cdot\delta q_i\right]}$$

$$\boxed{\text{donde} \quad \delta q_i = \sum_\ell^s \varepsilon_\ell\cdot g^\ell(q_1,\dots,q_n)}$$

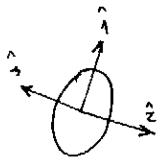
• Moneda rodando sobre un plano



$$\vec{V}_{CM} = -\vec{\Omega} \times \vec{r}$$
$$= -\left(\dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3}\right) \times \left(-a\hat{z}\right)$$
$$\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = -a\dot{\psi}\,\hat{1}$$

VÍNCULOS: $\begin{cases} z_{cm} - a = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$

$$\left.|\vec{V}_{cm}| = a\dot{\psi}\right\} \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix} \Rightarrow 2 \text{ g.L.}$$

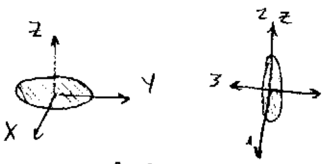


$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3}$$

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2$$

$\theta = \pi/2$

$\psi = 0$, $\dot{\psi} \neq 0$

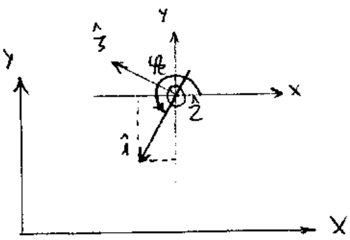


$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \overbrace{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}^{a^2\dot{\psi}^2} + \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2$$

en términos de ψ, φ ...
un problema de ...

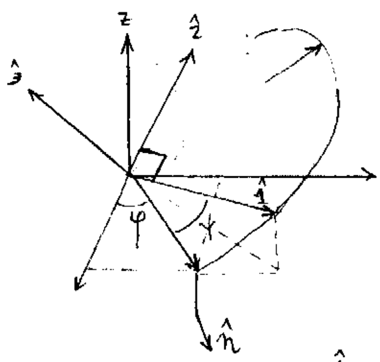
$\left.\begin{matrix} \hat{1} = \hat{x} \\ \hat{3} = -\hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{matrix}\right\}$ Al momento de "bajar" los ejes

Vínculos deptes. de la velocidad $\begin{cases} \dot{y} = a\dot{\psi}\cos\psi\,\text{sen}\varphi = a\,\text{sen}\varphi\,\dot{\psi} \\ \dot{x} = a\dot{\psi}\cos\psi\cos\varphi = a\cos\varphi\,\dot{\psi} \end{cases}$



$$\dot{y} - a\,\text{sen}\varphi\,\dot{\psi} = 0$$
$$\dot{x} - a\cos\varphi\,\dot{\psi} = 0$$

$$\lambda_2\left(dy - a\,\text{sen}\varphi\,d\psi\right) = 0$$
$$\lambda_1\left(dx - a\cos\varphi\,d\psi\right) = 0$$



$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda_i \vec{\nabla}_i f\,\delta \vec{r}_i}$$

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \longrightarrow m\ddot{x} = m\,a\frac{d}{dt}\left(\cos\varphi\,\dot{\psi}\right)$$
$$m\ddot{y} = \lambda_2 \qquad m\ddot{x} = m\,a\left(-\text{sen}\varphi\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi} + \cos\varphi\,\ddot{\psi}\right)$$

$$I_z\ddot{\varphi} = 0$$
$$I_3\ddot{\psi} = -\lambda_2\,a\,\text{sen}\varphi - \lambda_1\,a\cos\varphi$$

$$\hat{1} = \cos\psi\left[\text{sen}\varphi\,\hat{y} + \cos\varphi\,\hat{x}\right]$$
$$\cos\psi\left(\cos\varphi\,\hat{x} + \text{sen}\varphi\,\hat{y}\right)$$

Fuerzas Centrales

$$\vec F(r) = f(r)\,\hat r = -\frac{dV}{dr}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot\varphi^2\right)$$

$\vec L$ se conserva pues $\vec\tau = \vec r \times \vec F = 0$

$\vec L = \vec r \times \vec p = \vec r \times m\dot{\vec r} = (cte) \Rightarrow \vec r, \vec p$ en el mismo plano

$\Rightarrow$ pongo $\theta = \pi/2 \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - V(r)$$

φ es cíclico $\rightarrow$ $\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot\varphi} = \boxed{L = mr^2\dot\varphi}$ $\longrightarrow$ $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{\cancel{m}\,\cancel{r^4}\,L^2}{m^{\cancel{2}}\,r^{\cancel{4}}} - V(r)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot r^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}_{V_{eff}}$$

la energía se conserva $\Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m\dot r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Ecuación de Euler_Lagrange

$$m\ddot r - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

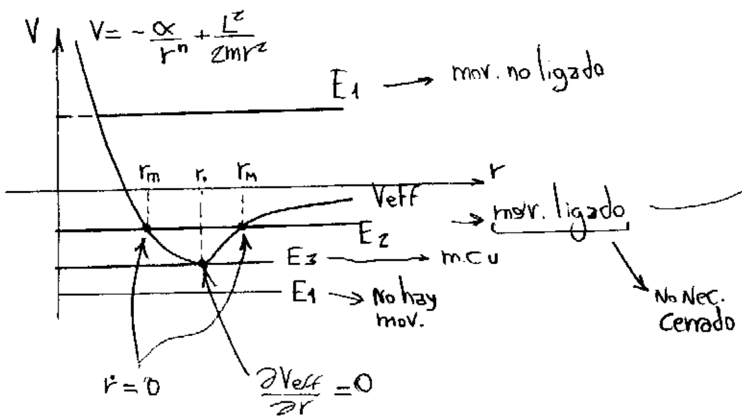
es más sencillo usar

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right)}}$$

de acá saldría $r = r(t)$ $\longrightarrow$ tendría que buscar $r = r(\varphi)$ o $\varphi = \varphi(r)$ que dan la trayectoria física

$m.r^2\frac{d\varphi}{dt} = L \longrightarrow mr^2.\frac{d\varphi}{dr}.\dot r = L$

$\frac{m.r^2}{L}d\varphi = dt$ $\qquad$ $\dot r.d\varphi = \frac{L}{m.r^2}.dr$ $\longrightarrow$ $\int d\varphi = \int \frac{(L/mr^2).dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]}}$



- **Solución a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt \longrightarrow \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{L}{m\cdot r^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}(\dot{r}) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2}$$

$$m\cdot\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\cancel{m}\cdot\frac{L}{\cancel{m}\cdot r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{L}{r^2}\cdot\frac{d}{d\varphi}\cdot\left(\frac{L}{mr^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{L^2}{mr^4}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}r - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr}$$

$$U = \frac{1}{r}$$

$$dU = -\frac{1}{r^2}\cdot dr$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi} = -U^2\cdot\frac{dr}{d\varphi}$$

con problema de Kepler

$$U^2 L\cdot\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{L}{m}\cancel{U^2}\left(-\frac{1}{\cancel{U^2}}\cdot\frac{dU}{d\varphi}\right)\right\} - \frac{L^2}{m}U^3 = F\left(\frac{1}{U}\right)$$

$$-\frac{U^2 L^2}{m}\cdot\frac{d^2U}{d\varphi^2} - \frac{L^2}{m}\cdot U^3 = F\left(\frac{1}{U}\right)$$

$$-\frac{L^2}{m}U^2\left[\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U\right] = F\left(\frac{1}{U}\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U = -\frac{F(1/U)\,m}{L^2U^2}}$$

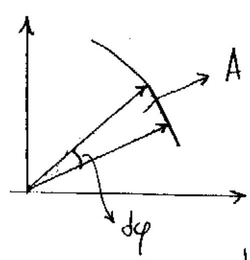
para potencial Kepler será

$$\frac{-k/\cancel{r^2}\cdot m}{L^2\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}} = -\frac{k\cdot m}{L^2} \quad \text{(una constante)}$$

→ sale fácil

- **Velocidad Areolar**

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$



$$A = \frac{1}{2}r\cdot d\varphi\cdot r = \frac{1}{2}r^2\cdot d\varphi$$

$$\frac{1}{2}r^2\int$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{m} \quad (\text{cte})$$

• Fuerzas Centrales [2]

Tenemos:

$$\int d\varphi = \int \frac{(L/mr^2).dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}$$

y

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U = -\frac{F(1/U).m}{L^2U^2} \qquad U = \frac{1}{r}$$

↑ es simétrica respecto a φ y $-\varphi$

⇒ determina una simetría orbital si tomamos

$$U(\varphi=0) = U_0$$

$$\left.\frac{dU}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \quad \rightarrow \quad U_0 \text{ es un extremo (punto apsidal)}$$

$$\Delta\varphi = 2.\int_{r_m}^{r_M} \frac{(L/m.r^2).dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}}$$

ángulo que recorre en una oscilación completa →

$$\Delta\varphi = 2.\underset{\text{número}}{q}$$

si $q = \frac{m}{n}.\pi$ con $m,n \in \mathbb{Z}$ →

$$\Delta\varphi = 2\frac{m}{n}.\pi \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{n}{m} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}} \Rightarrow \text{la órbita se cierra}$$

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + U = \frac{k.m}{L^2}$$

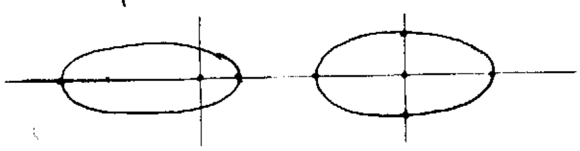
$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + \left(U - \frac{km}{L^2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\beta}{d\varphi^2} + \beta = 0$$

NOTA

$$V = \begin{cases} -k/r \\ \frac{1}{2}(k.r^2) \end{cases} \quad \text{dan órbitas cerradas siempre}$$

Kepler — Osc. Armónico 3D



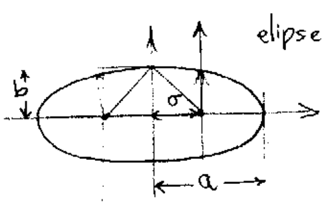
2 puntos apsidales — 4 puntos apsidales

$$\beta = A.\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$U = \frac{km}{L^2} + A.\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{km}{L^2} + A.\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

habría que usar r_m, r_M para evaluar A



elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

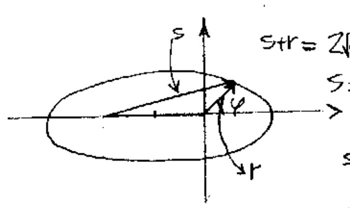
$$\boxed{\sigma^2 = a^2 - b^2}$$

$$b^2 = a^2 - \sigma^2$$

$$b^2 = a^2\left(1 - \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2\right)$$

$$b = a\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma}{a} = \varepsilon$$



$$s + r = 2\sqrt{\sigma^2 + b^2}$$

$$s = 2\sqrt{\sigma^2 + b^2} - r$$

$$s = 2a - r$$

$$a - \frac{\sigma^2}{a}$$

en $\varphi = \pi/2$

$$\frac{1}{a - \frac{\sigma^2}{a}} = \frac{km}{L^2}$$

$$\frac{a}{a^2 - \sigma^2} = \boxed{\frac{a}{b^2} = \frac{km}{L^2}}$$

$$s^2 = (2\sigma)^2 + r^2 - 2.2\sigma.r.\cos(\pi - \varphi)$$

$$(2a - r)^2 = 4\sigma^2 + r^2 + 4\sigma r\cos\varphi$$

$$4a^2 + \cancel{r^2} - 4ar = 4\sigma^2 + \cancel{r^2} + 4\sigma r\cos\varphi$$

$$a^2 - ar = \sigma^2 + \sigma r\cos\varphi$$

$$a(a - r) = \sigma(\sigma + r.\cos\varphi)$$

$$a - r = \varepsilon(\sigma + r.\cos\varphi)$$

$$a - \varepsilon(\sigma + r.\cos\varphi) = r$$

Leyes de Kepler

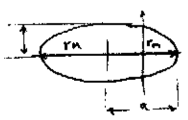
1º común de $V \propto \frac{1}{r}$

Las pl. giran en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos.

2º $A = \frac{1}{2} r^2 . d\varphi \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} . \dot{\varphi} = \frac{L}{2m}$ (constante)

el radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales

3º
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$
$$\pi . a . b = \int dA = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \tau$$
$$a = \frac{L . \tau}{2\pi . b . m}$$
$$\boxed{b = L \left(\frac{a}{mk} \right)^{1/2}}$$
$$\frac{km}{L^2} = \frac{a}{b^2}$$



$$a = \frac{m^{1/2} k^{1/2} \tau}{2\pi\, a^{1/2} m}$$
$$a^{3/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} . \frac{\tau}{2\pi} \rightarrow \boxed{a^3 = \left(\frac{GM}{4\pi^2} \right) \tau^2}$$

indepte. de la masa del planeta

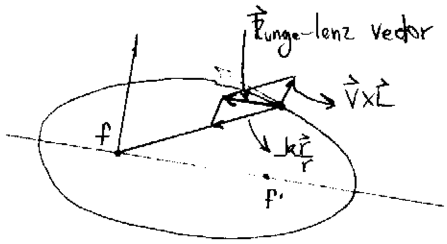
$$r_M + r_m = 2a$$
$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$
$$E - \frac{L^2}{2m} U^2 - kU = 0 \rightarrow \frac{2mE}{L^2} - U^2 - \frac{k 2mE U}{L^2} = 0$$
$$\frac{1}{r_{m,M}} = \frac{-\frac{k 2mE}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2mEk}{L^2} \right)^2 + \frac{4 . 2mE}{L^2}}}{-2}$$
$$\frac{-\frac{2mEk}{L^2} \pm \frac{2mEk}{L^2} \left(\sqrt{1 - \frac{8mE}{L^2} \left(\frac{L^2}{2mEk} \right)^2} \right)}{-2} = \frac{2mEk}{2 . L^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 L^2}{mEk^2}} \right)$$

- **Vector de Runge-Lenz**

$$\vec{R} = \vec{V} \times \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r}$$

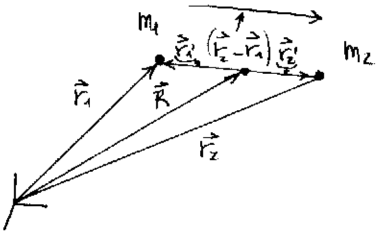
$$\frac{d\vec{r}}{dt} . r - \frac{dr}{dt} . \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{L} + \vec{V} \times \frac{d\vec{L}}{dt} - k \left(\frac{d\vec{V}/dt . r - dr/dt . \vec{r}}{r^2} \right)$$



$$\frac{d\vec{V}}{dt} \times \left(\vec{r} \times m\vec{V} \right) + \vec{V} \times \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V}}_{=0} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} \right)$$
$$\vec{V} \times \left(\vec{r} \times m . \frac{d\vec{V}}{dt} \right)$$

• Reducción del Problema de 2 cuerpos a uno equivalente



$r \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ $\qquad \dot{r} = |\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1|$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} + V(r)$$

$$E = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1'\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2'\right)^2 + V(r)$$

$$E = \frac{m_1}{2}\vec{V}^2 + \frac{m_2}{2}\vec{V}^2 + \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{r}}_1')^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{r}}_2')^2$$

$$E = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{r}}_2'\right)^2$$

$$+\left(\frac{m_2^2}{2m_1} + \frac{m_2}{2}\right)\left(\dot{\vec{r}}_2'\right)^2$$

$$+ \frac{m_2(m_2+m_1)}{2\, m_1}\left(\dot{\vec{r}}_2'\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{m_2\,\cancel{(m_2+m_1)}\, m_1^{\cancel{2}}}{\cancel{m_1}\,(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_2\, m_1}{M}}\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r)$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad M.\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$$

$$0 = m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2'$$

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2'$$

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1'$$

relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2' - \vec{r}_2' = -\frac{(m_2+m_1)}{m_1}\vec{r}_2'$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1' + \frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1' = \vec{r}_1'\left(\frac{m_2+m_1}{m_2}\right)$$

$$\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}_1' =$$

$$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \left(\frac{m_2+m_1}{m_1}\right)^2 (\dot{\vec{r}}_2')^2$$

E se conserva

$V_{CM} = (cte)$

ojo, este $\vec{r}$ es un vector distancia relativa

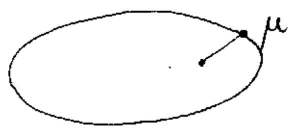
$$\boxed{e = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r)}$$

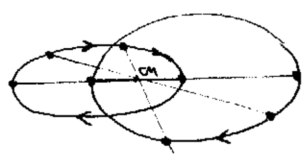
Problema equivalente para la partícula centro de masa

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

la distancia relativa "describe" una elipse.

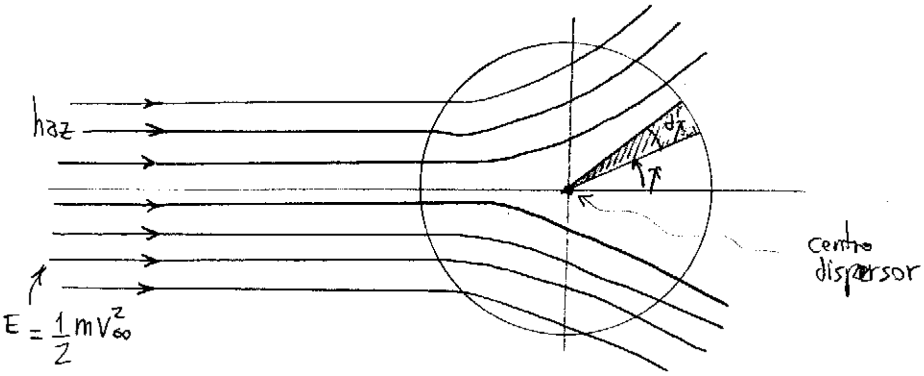
Las trayectorias reales son dos elipses "confocales"





$\boxed{\text{Dejan de cumplirse las leyes de Kepler en este caso}}$

● Dispersión



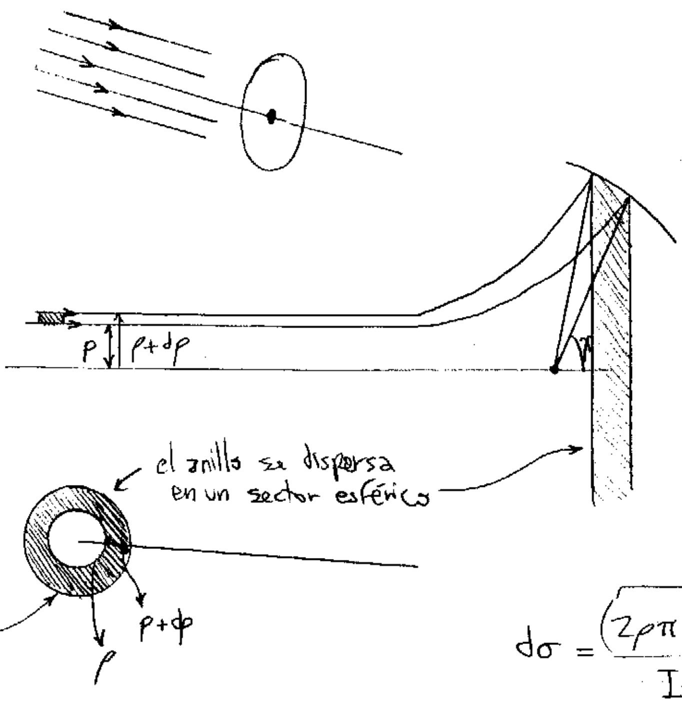
$$\boxed{d\sigma = \frac{dN}{n}}$$

$dN \rightarrow$ # part. dispersadas entre χ y $\chi + d\chi$ por unidad de tiempo

$n \rightarrow$ # part. emitidas por tiempo y por área

$[d\sigma] = $ área

Consideramos el centro dispersor con simetría esférica (cilíndrica basta)



— Suposiciones —

* simetría esférica
* todo lo que emerge por $\rho - \rho + d\rho$ pasa dispersado entre $\chi - \chi + d\chi$
* se conserva E y $\vec{L}$

$$A = \pi\left([\rho + d\rho]^2 - \rho^2\right)$$

$$= \pi\left(\cancel{\rho^2} + 2\rho . d\rho + d\rho^2 - \cancel{\rho^2}\right)$$

$$A \sim \pi\, 2\rho . d\rho$$

$$d\sigma = \frac{\overbrace{(2\rho\pi . d\rho)\, I}^{\#\text{ part. dispersadas entre } \chi \text{ y } \chi + d\chi}}{I}$$

$I \rightarrow$ # part. por unidad de tiempo y área

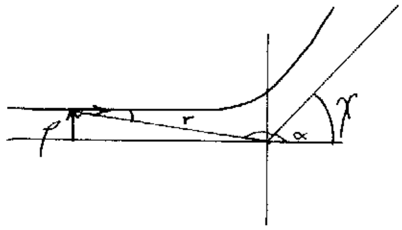
$$\boxed{d\sigma = 2\pi\, \rho(\chi) \left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| . d\chi}$$

ρ es el parámetro de impacto

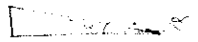
↓ Se conservan

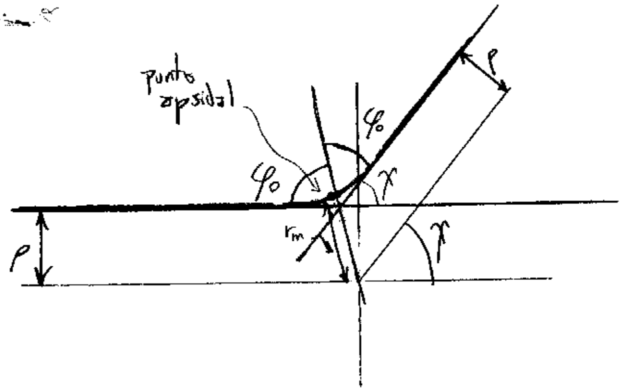
$$E = \frac{1}{2} m . V_\infty^2$$

$$L = m \rho V_\infty^2$$



r. sen α





En general se desconoce V(r)

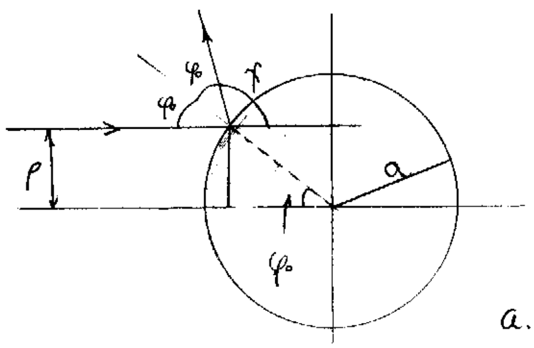
$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

donde
$$\varphi_0 = \int_{r_m}^{\infty} \frac{\frac{L}{mr^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi = \pi - 2\varphi_0(\rho) \quad \rightarrow$$ se invierte desde aquí

Esfera maciza



$$\chi = \pi - 2\varphi_0$$

$$\text{sen}\, \varphi_0 = \frac{\rho}{a}$$

$$a . \text{sen}\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) = \rho$$

$$- a . \cos\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) . \frac{1}{2} \quad = d\rho$$

χ se integra desde 0 a π

$$d\sigma = 2\pi . a . \text{sen}\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right) . a . \cos\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right) \frac{1}{2} . d\chi$$

$$d\sigma = \frac{\pi . a^2}{2} . \text{sen}(\pi - \chi) . d\chi = \frac{\pi}{2} a^2 \,\text{sen}(\chi) . d\chi$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi a^2}{2} \text{sen}(\chi) . d\chi = \frac{\pi a^2}{\cancel{2}} . \cancel{2} \Rightarrow \boxed{\sigma = \pi . a^2}$$

NOTAS

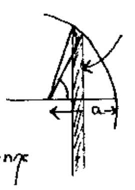
Los cuerpos duros equivalen a potenciales del tipo

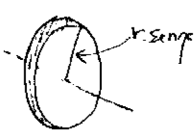
$$\begin{cases} V(\text{cuerpo}) = \infty \\ V(\text{fuera}) = 0 \end{cases}$$

La sección eficaz es la "sombra" para estos casos

* Ángulo sólido

$$\Omega = \frac{\text{Área}}{r^2}$$





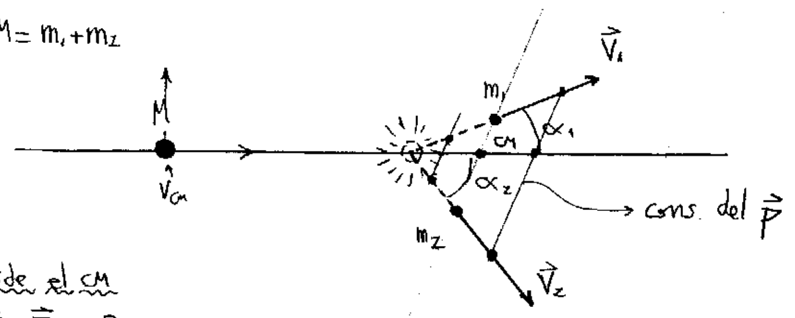
$$d\Omega = \frac{1}{r^2} . 2\pi r . r . \text{sen}\chi . d\chi$$

$$d\Omega = 2\pi . \text{sen}\chi . d\chi$$

$$\boxed{\Omega = 4\pi}$$
esfera

• Dispersión por 2 cuerpos

$M = m_1 + m_2$



* desde el CM

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$

$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = 0 \rightarrow \vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{V}_2$

$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = V_2 + \frac{m_2}{m_1}V_2 = \vec{V}_2\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right) \equiv \vec{V} \rightarrow$ v relativa

* E

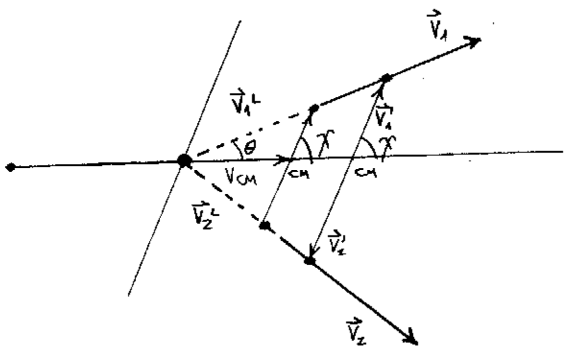
$$\frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \mathcal{E}_{int} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \mathcal{E}_{INT_1} + \mathcal{E}_{INT_2} + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

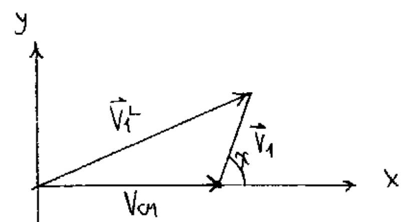
$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \mathcal{E}_{INT} - \mathcal{E}_{INT_1} - \mathcal{E}_{INT_2} = \Delta\mathcal{E}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}V_2^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 =$$

$$\frac{1}{2}V_2^2\left(\frac{m_2(m_2+m_1)}{m_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{m_1^{\cancel{2}}}{\cancel{(m_1+m_2)^2}\cancel{m_1}}\,m_2\cancel{(m_1+m_2)} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot V = \Delta\mathcal{E}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2.\Delta\mathcal{E}}{\mu}}}$$





NB

El problema es, evidentemente plano.

$\vec{V}_1^L = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_1'$

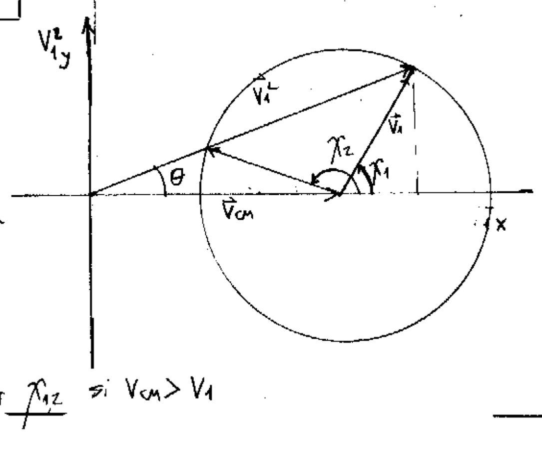
$(\vec{V}_1^L - \vec{V}_{CM}) = \vec{V}_1$

$V_1^{L^2} - V_{CM}^2 - 2\vec{V}_1^L\cdot\vec{V}_{CM} = V_1^2$

$V_{1x}^{L^2} + V_{1y}^{L^2} - V_{CM}^2 - 2V_{1x}^L V_{CM} = V_1^2$

$$\boxed{(V_{1x}^L - V_{CM})^2 + V_{1y}^{L^2} = V_1^2}$$

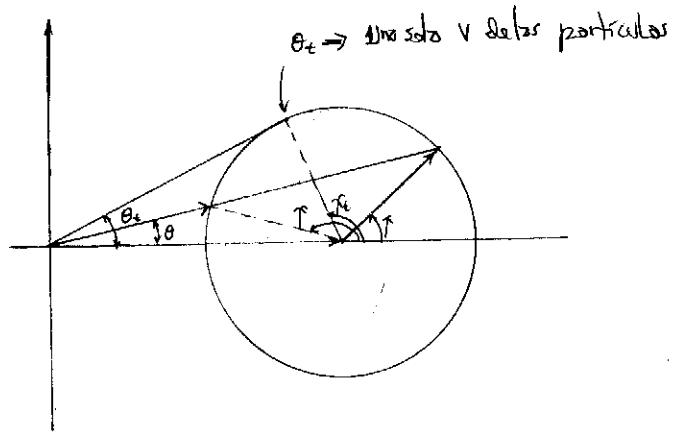
una circunferencia



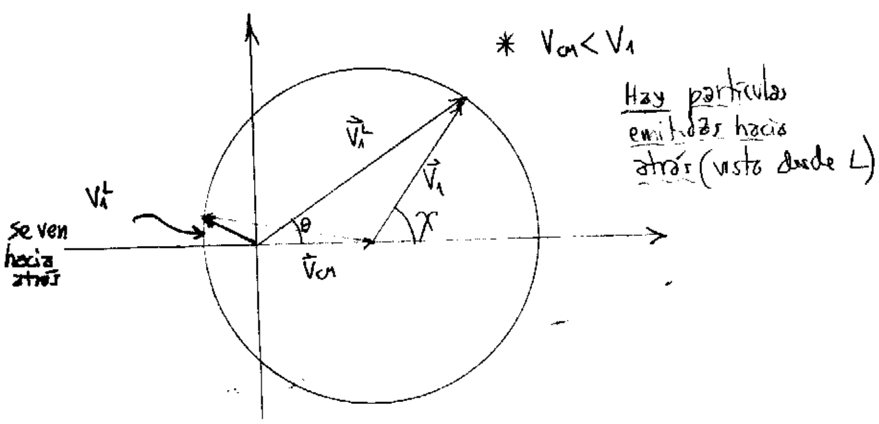
$$\boxed{\tan\theta = \frac{V_1.\,\text{sen}\,\chi}{V_{CM} + V_1.\cos\chi}}$$

dos raíces χ_{12} si $V_{CM} > V_1$

$* \; V_{cm} > V_1$



$* \; V_{cm} < V_1$



$$d\sigma = 2\pi\rho \cdot \left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi$$

$$d\Omega = 2\pi \, \text{sen}\,\chi \cdot d\chi$$

Áng. sólido esfera $\rightarrow$ $$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\chi \cdot d\chi$$

<u>Energía</u>

distribución isótropa de partículas

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \dashrightarrow \text{(desde el CM)}$$

$$V_L^2 = V_1^2 + V_{cm}^2 - 2V_1V_{cm}\cos(\pi-\chi)$$

$$V_L^2 = V_1^2 + V_{cm}^2 + 2V_1V_{cm}\cos(\chi)$$

a iguales V_1, V_{cm} se tienen variables V_L, χ →

$$dV_L^2 = -2V_1V_{cm} \cdot \text{sen}\,\chi \cdot d\chi$$

$$2V_L\,dV_L = -2V_1V_{cm}\,\text{sen}\,\chi \cdot d\chi$$

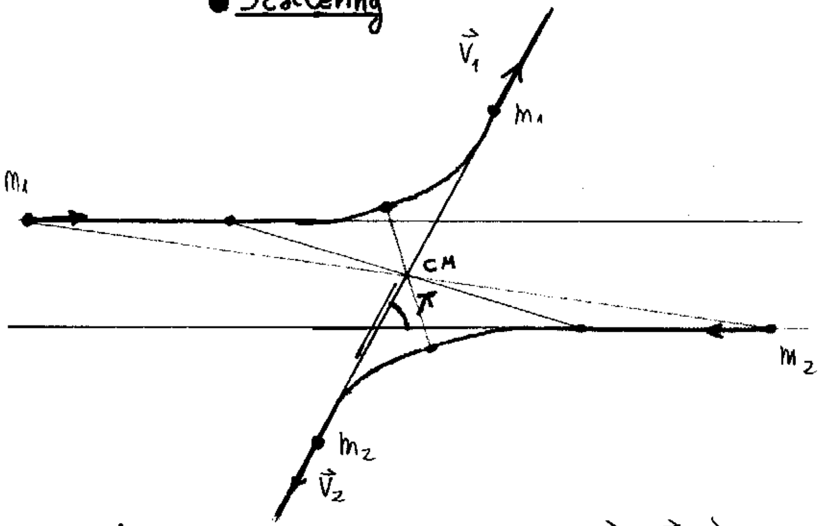
$$\frac{dV_L^2}{2V_1V_{cm}} = \text{sen}\,\chi \cdot d\chi \longrightarrow$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dV_L^2}{4\,V_1V_{cm}}$$

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\left(\frac{1}{2}m_1V_L^2\right)}{m_1 \cdot V_1 \cdot V_{cm}}\right)$$

<u>centro de masa</u>

• Scattering



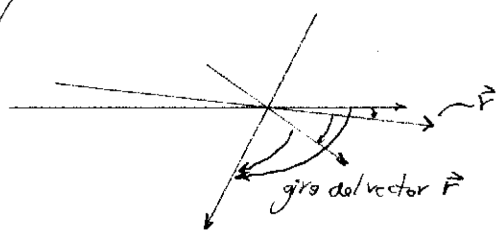
suposiciones
* interacción elástica
* conservación E, P

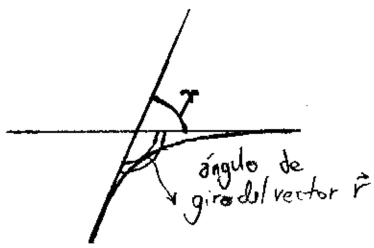
desde CM

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$$

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$E = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)$$





$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = 0$$

$$m_1\vec{V}_1 = -m_2\vec{V}_2$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{V}_2$$

$$V = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \frac{m_2}{m_1}\vec{V}_2 = \vec{V}_2\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)$$

$$\vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}$$

$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_{1\,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_{2\,in}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{1\,CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2\,CM}^2$$

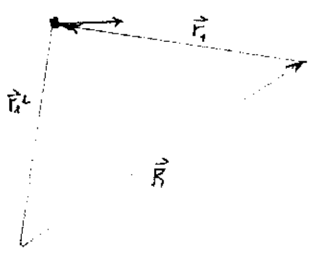
$$= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_1} \frac{m_2^2}{m_1^{\cancel{2}}} V_2^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) V_2^2$$

$$\left(T - \tfrac{1}{2} M V_{CM}^2\right) \equiv t = + \frac{1}{2} \frac{m_2\cancel{(m_2+m_1)}}{\cancel{m_1}} \frac{m_1^{\cancel{2}}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} V^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} V^2$$

$$t = \frac{1}{2}\mu v^2$$



$$\vec{V}_1^L = \vec{V}_{CM} - \frac{m_2}{M}\vec{V}$$

$$\vec{V}_2^L = \vec{V}_{CM} + \frac{m_1 \vec{V}}{M}$$

$$\vec{P}_1^L = m_1 \vec{V}_{CM} - \mu\vec{V} = m_1 \vec{P}/M - \mu\vec{V}$$

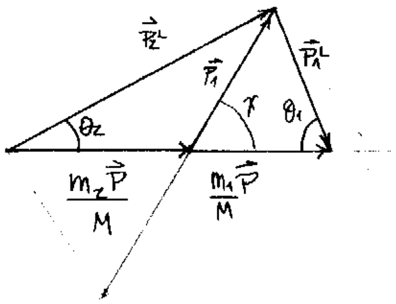
$$\vec{P}_2^L = m_2 \vec{V}_{CM} + \mu\vec{V} = m_2 \vec{P}/M + \mu\vec{V}$$

$$\vec{V}_{CM} + \vec{V}_1 = \vec{V}_1^L$$

$$\vec{P}_2^L = \frac{m_2}{M}\vec{P} + \mu V \hat{n} \qquad \vec{P}_1^L = \frac{m_1 \vec{P}}{M} - \mu V \hat{n}$$

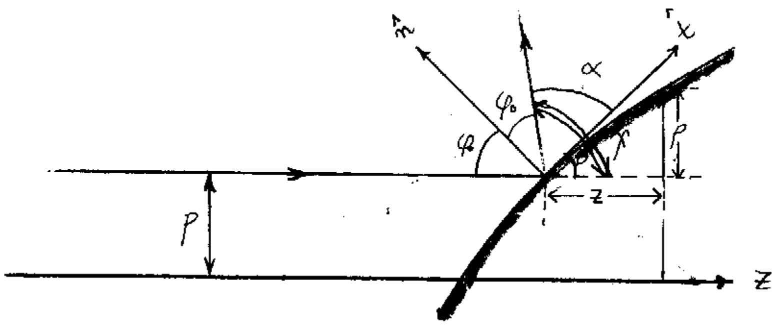
$$\frac{m_1 \vec{P}}{M} + \frac{m_2 \vec{P}}{M} = \vec{P} = \vec{P}_1^L + \vec{P}_2^L$$

P_{2x}^L



$$\tan\theta_2 = \frac{P_1 . \operatorname{sen}\chi}{\frac{m_2 P}{M} + P_1 . \cos\chi}$$

● **Dispersion por potenciales ∞**



$\varphi_0 + \alpha = \pi/2$

$\varphi_0 +$

$2\varphi_0 + \alpha + \beta = \pi$

$\varphi_0 + \beta = \pi/2 \rightarrow \alpha = \beta$

$2\alpha = 2\beta = \chi$

$$\frac{d\rho}{dz} = \operatorname{tang}(\beta) = \tan(\chi/2)$$

$\rho = \rho(z)$ es la función que da la curva roja (el perfil del cuerpo dispersor)

$$\boxed{\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho/d\theta}{dz/d\theta}}$$ con θ variable paramétrica

NOTA

La idea es: sabiendo ρ (parámetro de impacto) quiero saber que ángulo χ se desvían las particulas incidentes

• Cuerpos Rígidos (Rigid Bodys)

condición de rigidez

VÍNCULOS [1] $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij} \qquad i \neq j$

discreto → continuo

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \longrightarrow \vec{R} = \frac{\int \rho \, dv \, \vec{r}}{\int \rho \, dV}$$

* grados de libertad de un CR

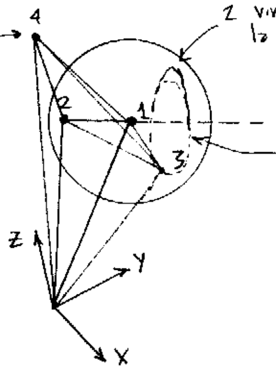
Cada punto tiene como vínculos las ecuaciones [1]

1 necesita 3 coordenadas

4 ya está totalmente fijo

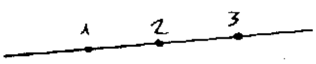
2 vive sobre la esfera (2 coordenadas)

3 solo puede rotar entorno a $\overline{12}$ ⇒ (1 coordenada)



$$\boxed{CR \to 6\,gL}$$

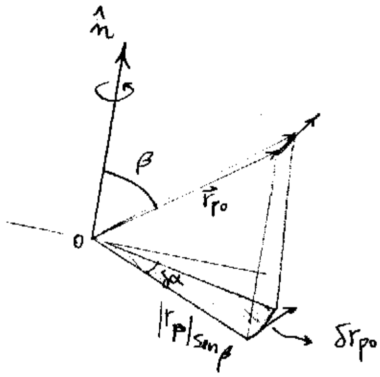
$$\boxed{CR \text{ lineales} \to 5\,gL}$$



la rotación de 3 no tiene goyete

* Velocidad de un CR

lo único que pueden hacer los puntos del RB es rotar



$$\delta r_{po} = r_{po} \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \delta\alpha$$

$$\frac{\delta r_{po}}{\delta t} = \frac{\delta\alpha}{\delta t} \cdot r_{po} \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$V_{po} = \dot{\alpha} \cdot r_{po} \cdot \operatorname{sen}\beta$$

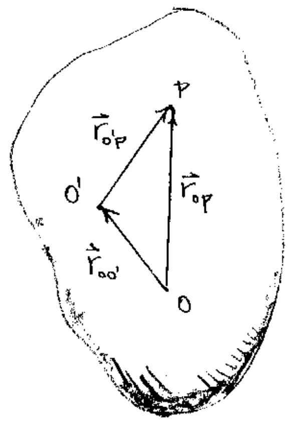
pero $V_{po} \left.\begin{matrix} \perp \hat{n} \\ \perp r_{po} \end{matrix}\right\} \to \vec{V}_{po} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{po}$

$$\boxed{\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{po}}$$

Campo de velocidad del cuerpo rígido

Luego para ir a un sistema inercial le sumo la V de algún punto del rígido (el origen "O") medida desde un sist. inercial

* Unicidad de la velocidad de rotación



$$\vec{V}_p = \vec{V}_{o'} + \underbrace{\vec{\Omega}'}_{\Omega \text{ como se ve desde } O'} \times \vec{r}_{o'p}$$

$$\vec{V}_p = \vec{V}_o + \underbrace{\vec{\Omega}}_{\Omega \text{ como se ve desde } O} \times \vec{r}_{op}$$

$$\vec{V}_{o'} + \vec{\Omega}' \times \vec{r}_{o'p} = \vec{V}_o + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{op}$$

$$\cancel{\vec{V}_o} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{oo'} + \vec{\Omega}' \times \vec{r}_{o'p} = \cancel{\vec{V}_o} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{op}$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{r}_{oo'} - \vec{r}_{op}) + \vec{\Omega}' \times \vec{r}_{o'p} = 0$$

$$\vec{r}_{oo'} + \vec{r}_{o'p} = \vec{r}_{op}$$

$$\vec{r}_{oo'} - \vec{r}_{op} = -\vec{r}_{o'p}$$

$$-\vec{\Omega} \times \vec{r}_{o'p} + \vec{\Omega}' \times \vec{r}_{o'p} = (\vec{\Omega}' - \vec{\Omega}) \times \vec{r}_{o'p} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}}$$

$\vec{\Omega}$ es la misma para cualquier punto del CR

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{V}_p = \vec{\Omega} \cdot \vec{V}_o + \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{op})$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{V}_p = \vec{\Omega} \cdot \vec{V}_o \qquad \forall p \in CR \longrightarrow \text{si } \vec{\Omega} \cdot \vec{V}_o = 0 \rightarrow \vec{\Omega} \perp \vec{V}_o \rightarrow \vec{\Omega} \perp \vec{V}_p$$

Si en un instante dado $\vec{\Omega}$ es $\perp$ a $\vec{V}_p$ $\Rightarrow$ $\vec{\Omega}$ es $\perp$ a $\vec{V}_{p'}$ para todo punto p' del CR

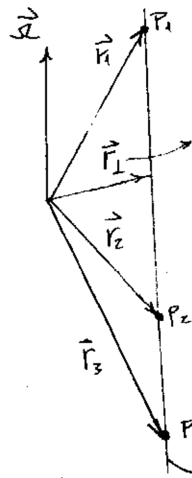
* Eje instantáneo

Si p es tal que $\vec{V}_p = 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{\vec{V}_o}_{\text{velocidad desde un sistema inercial}} = -\vec{\Omega} \times \vec{r}_{po}$$

desde el sistema inercial el CR realiza una rotación pura (pues veo al punto O rotar en torno a algún eje)

$$\vec{V}_o = -\vec{\Omega} \times (r_{\hat{\perp}} + r_{\hat{\parallel}}) = -\vec{\Omega} \times r_{\hat{\perp}}$$



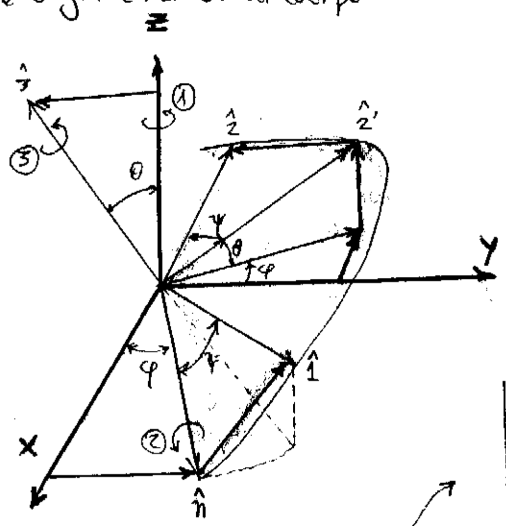
para todo $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ tenemos

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}_i = \vec{\Omega} \times r_{\hat{\perp}} \qquad i = 1,2,3$$

$\Rightarrow$ Esto define un eje instantáneo de rotación

Angulos de Euler

Se toma un sistema 123 inicialmente coincidente con uno XYZ paralelo al inercial; 123 tiene origen en el CM del cuerpo



$$A_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \varphi \hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

expresando $\hat{z}, \hat{\eta}$ en $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\Omega} = & \left(\dot{\varphi}.\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}.\cos\psi\right)\hat{1} \\ & \left(\dot{\varphi}.\operatorname{sen}\theta.\cos\psi - \dot{\theta}.\operatorname{sen}\psi\right)\hat{2} \\ & \left(\dot{\varphi}.\cos\theta + \dot{\psi}\right)\hat{3} \end{aligned}}$$

$$\vec{L}_0^{\,sist \equiv CR} = \underbrace{\vec{L}^{CM}}_{\vec{R}_{cm}\times M\vec{V}_{cm}} + \vec{L}_{CM}^{\,sist \equiv CR}$$

en el sistema 123

$$\vec{L}_{spin} = \sum_i^N m_i (\vec{r}_i' \times \vec{V}_i')$$

$$\vec{L}_{spin} = \sum_i^N m_i [\vec{r}_i \times \vec{\Omega} \times \vec{r}_i]$$

$$[\vec{\Omega}(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i\cdot\vec{\Omega})]$$

$\boxed{\text{Checar en Landau}}$

$$\vec{L}_{spin} = \sum_i^N m_i \left[\vec{\Omega} \sum_j^3 (x_j^{2i}) - \vec{r}_i \sum_l^3 x_l^i . \Omega_l)\right]$$

Componente k-ésima

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[\Omega_k . \sum_j^3 (x_j^{2i}) - x_k^i . \sum_j^3 (x_j^i . \Omega_j)\right]$$

$$L_k = \sum_i^N m_i \left[\sum_j^3 \delta_{kj}\Omega_j (r_i^2) - x_k^i . \sum_j^3 x_j^i . \Omega_j\right]$$

$$L_k = \sum_j^3 \sum_i^N m_i [\delta_{kj} . r_i^2 - x_k^i . x_j^i] \Omega_j$$

$$L_k = \sum_j^3 I_{kj} . \Omega_j \rightarrow \boxed{\vec{L}_{SPIN} = I . \vec{\Omega}}$$

tensor de inercia

dos Σ separadas pueden tener índices iguales

$$\sum_j + \sum_l = \sum_j + \sum_j$$

$$\sum_j . \sum_l \neq \sum_j . \sum_j$$

el producto NO (se pueden perder términos cruzados)

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

continúa en Angulos de Euler (2)

• Energía Cinética del CR

referida al CM (posiciones de los puntos del CR referidas al centro de masa)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \left(V_{CM}^2 + \left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i\right)^2 + 2\left[\vec{V}_{CM}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i\right)\right]\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\sum_i^N m_i \cancel{2}\left[\left(\vec{V}_{CM}\times\vec{\Omega}\right)\cdot\vec{r}_i\right]$$

$$\sum_i^N m_i\,\vec{r}_i\cdot\left(\vec{V}_{CM}\times\vec{\Omega}\right)$$

$$\underbrace{M\,\vec{R}_{CM}\Big|_{\text{NO IN.}}}_{=0} \Rightarrow 2\,\vec{V}_{CM}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i\right) = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i\left(\Omega^2\cdot r_i^2 - \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}_i\right)^2\right)$$

$\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$
$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\cdot\Omega_j\cdot x_k^i\cdot x_k^i - \sum_l\sum_p \Omega_l\, x_l^i\cdot\Omega_p\, x_p^i\right)$$

$$\Omega_j = \delta_{jk}\,\Omega_k$$

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\,\delta_{jk}\,\Omega_k\, x_k^i\, x_k^i - \sum_l\sum_p \Omega_l\, x_l^i\cdot\Omega_p\, x_p^i\right)$$

podemos cambiar $j \leftarrow l$, $k \leftarrow p$

$$\left(\sum_j\sum_k \Omega_j\,\delta_{jk}\,\Omega_k\,\underbrace{x_k^i x_k^i}_{(x_k^i)^2} - \sum_j\sum_k \Omega_j\, x_j^i\,\Omega_k\, x_k^i\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_i^N m_i \sum_{j,k}^3 \Omega_j\,\Omega_k\left[\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i\, x_k^i\right]$$

$$T = \frac{1}{2}M\cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k}^3 \Omega_j\cdot\Omega_k\cdot\underbrace{\sum_i^N m_i\left(\delta_{jk}(r^i)^2 - x_j^i\, x_k^i\right)}_{\equiv I_{jk}\ \text{tensor de inercia}}$$

$$T = \frac{1}{2}M\cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k}^3 \Omega_j\, I_{jk}\,\Omega_k$$

forma cuadrática

donde $I = (I_{lp})$: $l = p$ momentos de inercia; $l \neq p$ productos de inercia

cinética de un cuerpo rígido

$$\boxed{T = \frac{1}{2}M\cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t\, I\,\vec{\Omega}}$$

transformación del Tensor

$$t'_{ls} = \sum_{i,j} a_{li}\, t_{ij}\, a_{sj} \rightarrow \text{transforma según} \qquad T' = A\,T\,A^t$$

$$I_{ik} = \sum_q m_q \cdot \left(\delta_{ik} (r_q^2) - x_i^q \cdot x_k^q\right)$$

momentos de inercia

continuo

$$\boxed{I_{ik} = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV \cdot \left[\delta_{ik}\, r^2 - x_i x_k\right]} \quad , \quad \text{con } r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$I'_{ik} = \sum_{l,s} a_{il} I_{ls} a_{ks}$$

$$\sum_q m_q\left(\delta_{ik} r'^2_q - x'_i x'_k\right) = a_{il} a_{ks} \sum_q m_q \left(\delta_{ls} r_q^2 - x_l x_s\right)$$

$$i \neq k \qquad\qquad l \neq s$$

$$-\sum_q m_q \cdot x'_i x'_k = -\sum_q m_q \, a_{il} \cdot x_l \cdot a_{ks} \cdot x_s$$

valores repetidos

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

el tensor de inercia es simétrico, de los 9 componentes seis son independientes.

por su definición

$I_{ik} = I_{ki}$ si $i \neq k$

Todo tensor simétrico se puede llevar a una forma diagonal eligiendo bien los ejes del sistema 123 fijo al cuerpo

$I \rightarrow I'$ (diagonal)

$$I' = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}$$

los I_{ik} son los momentos ppales. de inercia (aquellos que están calculados sobre ejes "principales de inercia")

Cuando el CR tiene simetría pueden hallarse a ojo los ejes ppales.

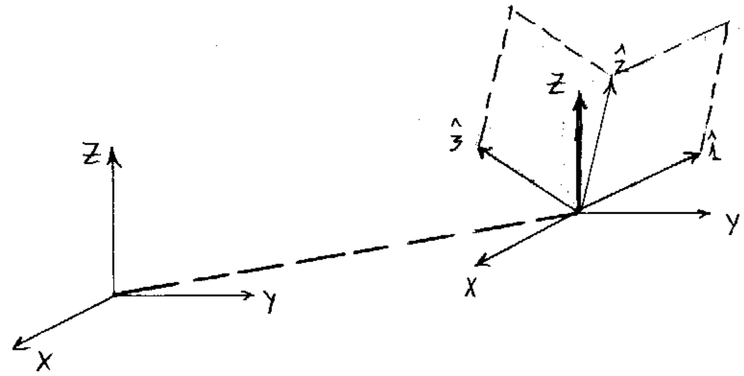
Para el cálculo de I se usa un sistema fijo al CR. Si usamos un sist. inercial $\rightarrow$

$I_{ik} = I_{ik}(t)$ lo cual no es conveniente

Es conveniente elegir <u>123 con origen en el CM y partícipes del mov del CR</u> (clavados al mismo)

XYZ referidos al sist. inercial coincidentes pero trasladados al CM

Así los I_{ik} resultan características geométricas del cuerpo.


Z
Y
X
Z
Y
X
$\hat{1}$
$\hat{2}$
$\hat{3}$

● Angulos de Euler (2)

Sean 1,2,3 los ejes ppales. →

$$\vec{L}_{spin} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I\,\vec{\Omega}$$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{in} \bullet = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \bullet + \vec{\Omega} \times \bullet}$$

VÁLIDO PARA SISTEMAS ROTANTES SOLAMENTE (NO AQUELLOS QUE ROTAN Y SE TRASLADAN)

Ω del sistema rotante (en un CR es la $\vec{\Omega}$ del CR)

Esta es la derivada desde un sistema XYZ

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{in} \vec{L}_{spin} = \vec{\tau}_{CM}$$

→ torque del CR referido al CM y medido desde el sistema XYZ (inercial)

$$\vec{\tau}_{CM} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \vec{L}_{spin} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_{spin}$$

I visto desde XYZ es $I = I(t)$

I desde 123 es constante

$$\boxed{\vec{\tau}_{CM} = I \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times \left(I\,\vec{\Omega}\right)}$$

$$\vec{\tau}_{CM} = \begin{pmatrix} I_1 \cdot \dot{\Omega}_1 \\ I_2 \cdot \dot{\Omega}_2 \\ I_3 \cdot \dot{\Omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1\Omega_1 & I_2\Omega_2 & I_3\Omega_3 \end{vmatrix}$$

$$\tau_1 = I_1 \cdot \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 I_3 \Omega_3 - \Omega_3 I_2 \Omega_2 =$$

$$\tau_2 = I_2 \cdot \dot{\Omega}_2 + \Omega_3 I_1 \Omega_1 - \Omega_1 I_3 \Omega_3 =$$

$$\tau_3 = I_3 \cdot \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 I_2 \Omega_2 - \Omega_2 I_1 \Omega_1 =$$

Ecuaciones de Euler ▶

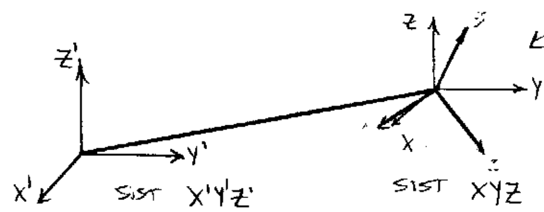
$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \cdot \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\Omega_2 \Omega_3 &= \tau_1 \\ I_2 \cdot \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_3 \Omega_1 &= \tau_2 \\ I_3 \cdot \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_1 \Omega_2 &= \tau_3 \end{aligned}}$$

Requieren I en ejes ppales.

$\vec{\Omega}$ en 1,2,3 (en función de φ, θ, ψ)

$\vec{\Omega}$ es la velocidad de rotación del sistema CR (rotante) respecto a un sistema XYZ fijo en el CM y coincidente con X'Y'Z' (inercial) a todo tiempo. Salvo la traslación del CM este sistema XYZ será inercial.

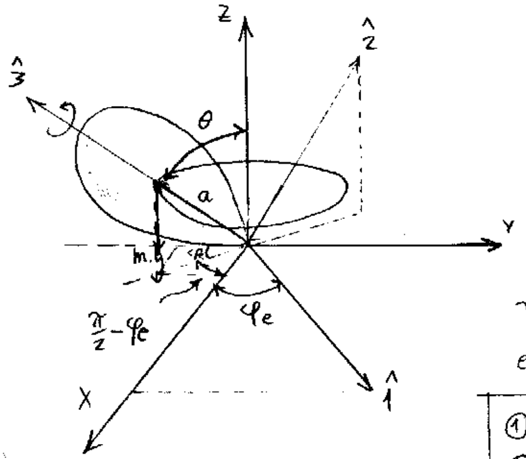
Todo este tratamiento de ecuaciones de Euler es para el $\vec{L}_{spin} \equiv \vec{L}_{CM}^{\,SISTEMA}$; entonces no me importan las traslaciones del CM



trabajo aquí

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{XYZ} \vec{L}_{spin} = \vec{\tau}_{CM} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{123} \vec{L}_{spin} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_{spin}}$$

• Peonza Simétrica



$$T_{rot} = \frac{I_1}{2}\Omega_1^2 + \frac{I_2}{2}\Omega_2^2 + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2$$

$$\Omega_1 = \dot{\theta}$$
$$\Omega_2 = \dot{\varphi}.\operatorname{sen}\theta$$
$$\Omega_3 = \dot{\varphi}.\cos\theta + \dot{\psi}$$

$\psi=0$ No es vínculo es comodidad $\rightarrow$ pues $\dot{\psi}\neq 0$ y es indepte.

$$\boxed{\begin{array}{l} ①\ \theta_e = \theta \\ ②\ \varphi_e + \frac{3}{2}\pi = \varphi \rightarrow \dot{\varphi}_e = \dot{\varphi} \\ ③\ r^2 = a^2 = X_{cm}^2 + Y_{cm}^2 + Z_{cm}^2 \end{array}}$$

VÍNCULOS

Centro de masa

$$X = a.\operatorname{sen}\theta.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_e\right) = a.\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}(\varphi_e)$$
$$Y = a.\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}\left(\pi/2-\varphi_e\right) = -a.\operatorname{sen}\theta.\cos(\varphi_e)$$
$$Z = a.\cos\theta$$

$$\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2 = a^2\dot{\theta}^2 + a^2.\operatorname{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2$$

$-\varphi+\varphi_e = \frac{\pi}{2}$

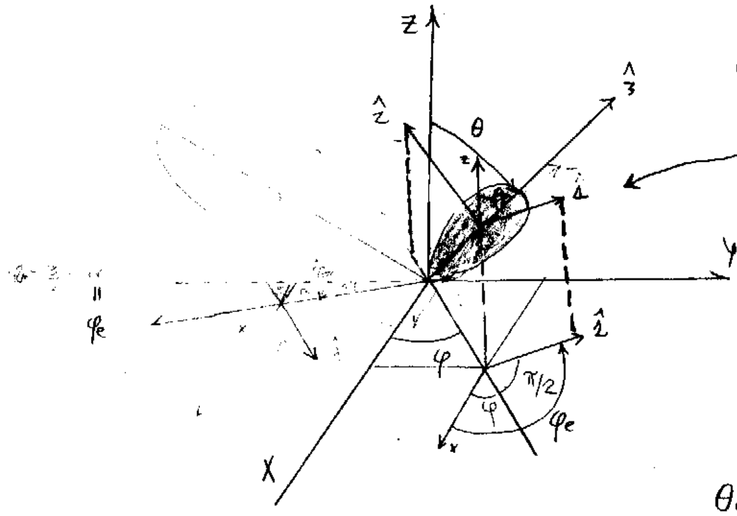
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M.\left(a^2\dot{\theta}^2 + a^2.\operatorname{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)^2$$

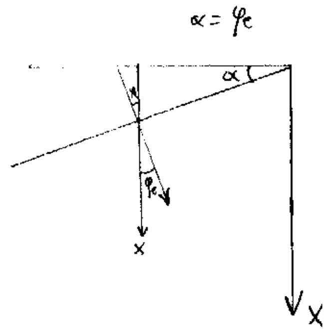
$I_1 = I_2 \equiv I \rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Ma^2\left[\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta.\dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2}I\left[\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right] + \frac{1}{2}I_3\left[\dot{\psi}+\dot{\varphi}.\cos\theta\right]^2$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(Ma^2+I)\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\right)^2}_{\text{es una rotación pura si tomo}} - m.g.(a\cos\theta)$$

$Ma^2 + I \equiv I'$ (otro momento de inercia) ubico $\hat{2}\hat{z}$ al momento de bajar $\psi=0$ →





$$\theta_e = \theta$$

equivalentes
$$\varphi_e = \varphi + \pi/2$$
$$\varphi_e + \frac{3}{2}\pi = \varphi + 2\pi = \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ (precesión)} \\ \theta \text{ (nutación)} \\ \psi \text{ (rotación propia)} \end{array} \right.$$

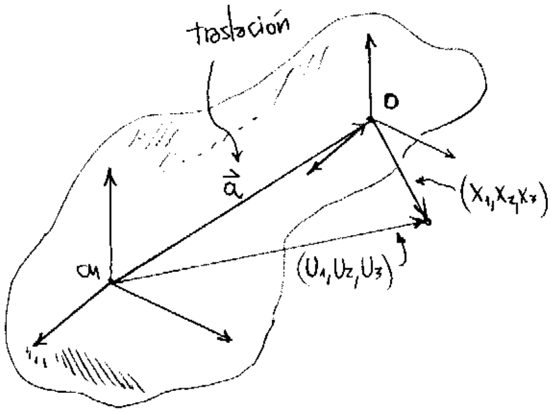
movimientos del trompo y ángulos asociados

$$T = T_{trasl.} + T_{rot.} + \underbrace{T_{acopl.}}_{=0}$$ si elegimos $0 = 0' = CM$

$$\vec{V} = \vec{V}_{CM} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$T_{acopl.} = 0$ si $V_0 = 0$ (aquí también se anula $T_{trasl.}$)

- **Teorema de Steiner**



$$\vec{X} = \vec{U} - \vec{a}$$

$$I_{ij}^{(0)} = \sum_s^N m^s \left(\delta_{ij} X_s^2 - x_i^s x_j^s \right)$$

$$I_{ij}^{0} = \sum_s^N m^s \left(\delta_{ij} \left(\vec{U}_s - \vec{a}\right)^2 - \left(U_i^s - a_i\right)\left(U_j^s - a_j\right) \right)$$

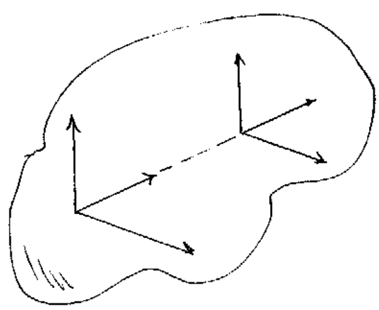
trasladamos el punto (con el sistema de ejes paralelo al del CM) SIN ROTARLO!!!

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s \left[\delta_{ij} \left(U_s^2 + a^2 - 2U_s a \right) - \left(U_i^s U_j^s + a_i a_j - a_i U_j^s - U_i^s a_j \right) \right]$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s \left[\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s + \delta_{ij} a^2 - a_i a_j - \delta_{ij} 2 U_s a + a_i U_j^s + U_i^s a_j \right]$$

$$I_{ij}^0 = \sum_s^N m^s \left(\delta_{ij} U_s^2 - U_i^s U_j^s \right) + \sum_s^N m^s \cdot \left(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j \right) - \underbrace{\sum_s^N m^s \delta_{ij} 2 U_s \cdot a}_{=0} + \underbrace{\sum_s^N m^s \left(a_i U_j^s + U_i^s a_j \right)}_{=0}$$

$$\boxed{I_{ij}^0 = I_{ij}^{CM} + M \cdot \left(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j \right)} + \Sigma$$



trasladar en un solo eje conserva la diagonalidad del tensor de inercia

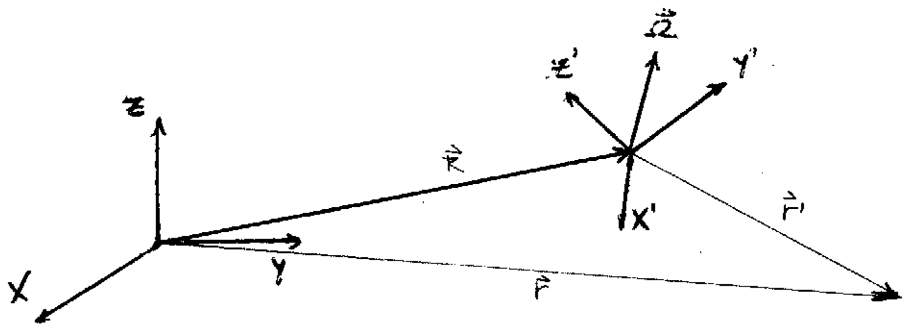
$$\sum_s^N m^s \cdot \delta_{ij} U_s \cdot a = \delta_{ij} a \underbrace{\sum_s^N m^s \cdot U_s \cdot a}_{=0} = 0$$

$$0 = \sum_s^N m^s \vec{U}_s = \sum_s^N m^s \left(U_1^s \hat{1} + U_2^s \hat{2} + U_3^s \hat{3} \right)$$

$$0 = \sum_s^N m^s U_i^s \qquad i = 1, 2, 3$$

$$0 = \sum_s^N m^s \cdot U_i^s \cdot a_i$$

Sistemas No inerciales



$\vec{\Omega}$ es la vel. angular del sistema no inercial

$\ddot{\vec{R}}$ es la aceleración del sistema no inercial

Ambas se miden sólo del sist. inercial

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{in} + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{in}$$

USO

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ IN} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,'}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{No\ IN}\vec{\Omega} \neq 0$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{No\ IN}\vec{R} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{in}\vec{R}$$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{IN}\vec{\Omega} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{No\ IN}\vec{\Omega}}$$

$$\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{in} - \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{in}$$

$$\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ in} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,' = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{in} - \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{in}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{in}\left.\frac{d}{dt}\right|_{No\ in}\vec{r}\,' = \left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{in} - \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_{in} - \left.\frac{d}{dt}\right|_{in}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,'\right)$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{No\ in}\vec{r}\,' + \vec{\Omega}\times\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ in} = \vec{a}\,\Big|_{in} - \ddot{\vec{R}}\Big|_{in} - \left.\frac{d}{dt}\right|_{in}(\vec{\Omega})\times\vec{r}\,' - \vec{\Omega}\times\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{in}$$

$$\left.\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right|_{No\ in} + \left(\vec{\Omega}\times\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ in}\right) = \vec{a}\,\Big|_{in} - \ddot{\vec{R}}\Big|_{in} - \left(\left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{No\ in} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}}_{=0}\right)\times\vec{r}\,' - \vec{\Omega}\times\left(\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ in} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,'\right)$$

No significa que $\vec{\Omega}$ es cte en no in.

$$\vec{a}\,'\Big|_{No\ in} = \vec{a} - \ddot{\vec{R}} - \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' - \vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}\,'\Big|_{No\ in} - \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,'\right) - \vec{\Omega}\times\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{No\ in}$$

$$\boxed{\vec{a}\,'\Big|_{No\ in} = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{R}} - \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' - 2\,\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}\,'\Big|_{No\ in} - \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,'\right)}$$

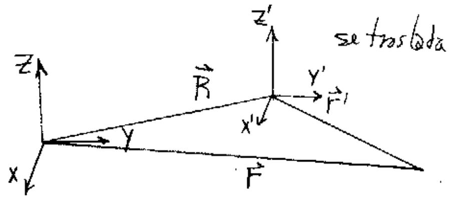
ACLARACIÓN

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{in} + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{NO\ IN} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,'$$

si $\vec{R}=0 \longrightarrow$ $\vec{r}=\vec{r}\,'$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\substack{NO\ IN \\ \equiv \text{ROTANTE}}} + \vec{\Omega}\times\vec{r}$$

• $\mathcal{L}$ de un sistema NO INERCIAL que se traslada



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\, v^2 - U \qquad v = V + v'$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (v' + V)^2 - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (v')^2 + m\, \vec{v}' \cdot \vec{V} + \underbrace{\frac{1}{2} m V^2}_{\equiv \frac{\vec{d}f}{dt} \Rightarrow \text{lo tiro}} - U$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} m V^2$$

$$f = \frac{1}{2} m \cdot \frac{V^3}{3} + K$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V^2 \equiv \frac{df}{dt}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} \cdot \vec{V} = -m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{r}' + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m \vec{r}' \cdot \vec{V}\right)}_{\equiv \frac{df_2}{dt} \Rightarrow \text{lo tiro}}$$

$$=$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\, v'^2 - m \cdot \vec{r}' \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}'} = m \cdot \dot{v}' + m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dU}{d\vec{r}'} = 0 \Rightarrow \boxed{m \cdot \vec{a} = -\frac{dU}{d\vec{r}'} - m \cdot \vec{A}}$$

$m \cdot \vec{a}'$

aceleración del sistema NO inercial

Expresamos $v = v(V, v')$ con lo cual aparecen en el $\mathcal{L}$ las fuerzas ficticias

expreso T en función de coordenadas que se hallan sobre un sistema No inercial

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{in} \vec{r} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \vec{r} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{in} \vec{r} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot} \left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right) + \vec{\Omega} \times \left[\left.\frac{dr}{dt}\right|_{rot} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right]$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{in} \vec{r} = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{rot} \vec{r} + \vec{\Omega} \times \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rot} + \vec{\Omega} \times \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{rot} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$+ \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{rot} \times \vec{r}$$

• Lagrangiano en un sistema rotante

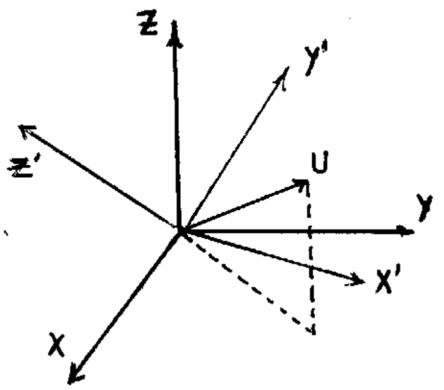
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\, v^2 - U(\vec{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 - U(\vec{r})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\, \vec{v}'^2 + \underbrace{m \vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - U(\vec{r})}_{U_{eff} \;\rightarrow\; U = U(\vec{r}, \vec{v})}$$

para U dependiente de la velocidad es $\longrightarrow$ $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right)$

Sistemas Rotantes



XYZ inercial

X'Y'Z' rotante (NO INERCIAL)

$$\vec{U}' = A \cdot \vec{U}$$

U descripto en XYZ

matriz del cambio de coordenadas (transf. ortogonal)

U descripto en X'Y'Z'

$$\frac{d}{dt}(U)_{XYZ} = \frac{dU_x}{dt}\hat{x} + \frac{dU_y}{dt}\hat{y} + \frac{dU_z}{dt}\hat{z}$$

$U = U(x,y,z)$

$$\frac{d}{dt}(U)_{XYZ} = \frac{dU_{x'}}{dt}\cdot\hat{x}' + U_{x'}\cdot\frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dU_{y'}}{dt}\cdot\hat{y}' + U_{y'}\cdot\frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dU_{z'}}{dt}\hat{z}' + U_{z'}\cdot\frac{d\hat{z}'}{dt}$$

$U = U(x',y',z')$

Pero X'Y'Z' es un sist. ortogonal $\Rightarrow$ Sus versores cumplen condiciones de ortogonalidad $\Rightarrow$

① $\hat{x}'\cdot\hat{x}' = \hat{y}'\cdot\hat{y}' = \hat{z}'\cdot\hat{z}' = 1$

② $\hat{x}'\cdot\hat{y}' = \hat{x}'\cdot\hat{z}' = \hat{y}'\cdot\hat{z}' = 0$

Variaciones

de ① $\hat{x}'\cdot\delta\hat{x}' = \hat{y}'\cdot\delta\hat{y}' = \hat{z}'\cdot\delta\hat{z}' = 0$

de ② $\begin{cases} \hat{x}'\cdot\delta\hat{y}' + \hat{y}'\cdot\delta\hat{x}' = 0 \\ \hat{x}'\cdot\delta\hat{z}' + \hat{z}'\cdot\delta\hat{x}' = 0 \\ \hat{y}'\cdot\delta\hat{z}' + \hat{z}'\cdot\delta\hat{y}' = 0 \end{cases}$

esto vale $\forall\ \delta\hat{x}'$ arbitraria

son productos escalares

variación delta en $\hat{x}'$ correspondiente a $\hat{y}'$ (proyectada en $\hat{y}'$)

$$\delta\hat{x}' = \underbrace{\delta\alpha_{xx}\cdot\hat{x}'}_{=0} + \delta\alpha_{xy}\cdot\hat{y}' + \delta\alpha_{xz}\hat{z}'$$

(variación $\delta\hat{x}'$ arbitraria)

pues

$$\delta\hat{y}' = \delta\alpha_{yx}\hat{x}' + \underbrace{\delta\alpha_{yy}\cdot\hat{y}'}_{=0} + \delta\alpha_{yz}\hat{z}'$$

$$\delta\hat{z}' = \delta\alpha_{zx}\hat{x}' + \delta\alpha_{zy}\hat{y}' + \underbrace{\delta\alpha_{zz}\hat{z}'}_{=0}$$

$$\underbrace{\hat{x}'\cdot\delta\hat{z}'}_{\delta\alpha_{zx}} = \underbrace{-\hat{z}'\cdot\delta\hat{x}'}_{\delta\alpha_{xz}} \qquad \underbrace{\hat{x}'\cdot\delta\hat{y}'}_{\delta\alpha_{yx}} = \underbrace{-\hat{y}'\cdot\delta\hat{x}'}_{\delta\alpha_{xy}}$$

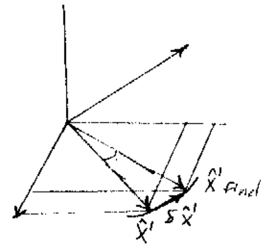
var. delta en $\hat{z}'$ corresp. a $\hat{x}'$ $\rightarrow$ $\hat{x}'\cdot\delta\hat{z}' = \delta\alpha_{zx} = -\delta\alpha_{xz}$

Pero las variaciones son tres:

$$\vec{\delta\alpha} = (\delta\alpha_x, \delta\alpha_y, \delta\alpha_z)$$

la delta de un versor tiene componentes en los otros versores (no en sí mismo versor)

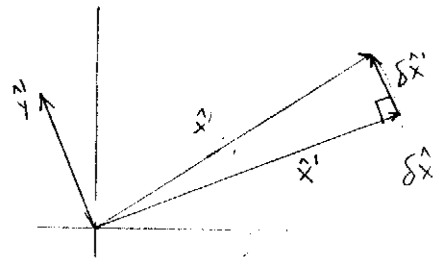
$$\begin{cases} \delta\hat{x}' = \delta\alpha_{xy}\,\hat{y}' + \delta\alpha_{xz}\,\hat{z}' \\ \delta\hat{y}' = \delta\alpha_{yx}\,\hat{x}' + \delta\alpha_{yz}\,\hat{z}' \\ \delta\hat{z}' = \delta\alpha_{zx}\,\hat{x}' + \delta\alpha_{zy}\,\hat{y}' \end{cases}$$



pero

proyección de $\delta\hat{z}'$ sobre $\hat{x}'$

$$\hat{x}'\cdot\delta\hat{z}' = -\hat{z}'\cdot\delta\hat{x}' \rightarrow \delta\alpha_{zx} = -\delta\alpha_{xz}$$
$$\hat{y}'\cdot\delta\hat{z} = -\hat{z}'\cdot\delta\hat{y}' \rightarrow \delta\alpha_{zy} = -\delta\alpha_{yz}$$
$$\hat{x}'\cdot\delta\hat{y}' = -\hat{y}'\cdot\delta\hat{x}' \rightarrow \delta\alpha_{yx} = -\delta\alpha_{xy}$$



$\delta\hat{x}' = \#\,\hat{y}'$

definiciones

$\delta\alpha_{zx} \equiv \delta\alpha_y$
$\delta\alpha_{yz} \equiv \delta\alpha_x$
$\delta\alpha_{xy} \equiv \delta\alpha_z$

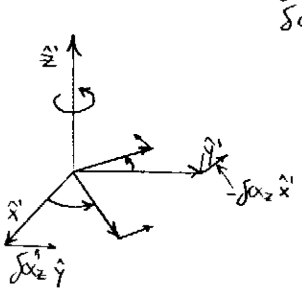
$$\boxed{\begin{aligned} \delta\hat{x}' &= \delta\alpha_z\,\hat{y}' - \delta\alpha_y\,\hat{z}' \\ \delta\hat{y}' &= -\delta\alpha_z\,\hat{x}' + \delta\alpha_x\,\hat{z}' \\ \delta\hat{z}' &= \delta\alpha_y\,\hat{x}' - \delta\alpha_x\,\hat{y}' \end{aligned}}$$

Ejemplito

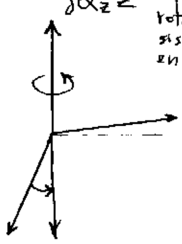
giro en torno a $\hat{z}'$ $\Rightarrow$

$\delta\hat{z}' = 0 \rightarrow \delta\alpha_y = 0$, $\delta\alpha_x = 0$

$$\delta\hat{x}' = \delta\alpha_z\,.\hat{y}'$$
$$\delta\hat{y}' = -\delta\alpha_z\,.\hat{x}'$$
$$\delta\hat{z}' = 0$$



$\delta\alpha_z \doteq \omega_z$



La rotación infinitesimal puede verse como un vector

$$\delta\vec{\alpha} = \delta\alpha_x\,\hat{x} + \delta\alpha_y\,\hat{y} + \delta\alpha_z\,\hat{z}$$

$$\frac{\delta\vec{\alpha}}{\delta t} = \underbrace{\frac{\delta\alpha_x}{\delta t}}_{\equiv\Omega_x}\hat{x} + \underbrace{\frac{\delta\alpha_y}{\delta t}}_{\equiv\Omega_y}\hat{y} + \underbrace{\frac{\delta\alpha_z}{\delta t}}_{\equiv\Omega_z}\hat{z}$$

$$\frac{\delta\hat{x}'}{\delta t} = \frac{d\hat{x}'}{dt} = \Omega_z\,\hat{y}' - \Omega_y\,\hat{z}'$$
$$\frac{d\hat{y}'}{dt} = -\Omega_z\,\hat{x}' + \Omega_x\,\hat{z}'$$
$$\frac{d\hat{z}'}{dt} = \Omega_y\,\hat{x}' - \Omega_x\,\hat{y}'$$

$$\frac{d}{dt} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{x'y'z'} U + U_{x'}\left(\Omega_z\,\hat{y}' - \Omega_y\,\hat{z}'\right) + U_{y'}\left(-\Omega_z\,\hat{x}' + \Omega_x\,\hat{z}'\right) + U_{z'}\left(\Omega_y\,\hat{x}' - \Omega_x\,\hat{y}'\right)$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{U}' = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ U_{x'} & U_{y'} & U_{z'} \end{vmatrix}$$

$(\Omega_y U_{z'} - U_{y'}\Omega_z)\,\hat{x}'$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{in}\vec{U} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{rot}\vec{U} + \vec{\Omega}\times\vec{U}}$$

- **Tensor de Inercia**

$\mathbb{I} \rightarrow$ el tensor de inercia

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Busco $\rightarrow$

$$\mathbb{I}\vec{V} = \lambda \vec{V}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} I_{ij} V_j = \lambda V_i} \quad (1)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} I_{ij} V_j\right) - \lambda V_i = 0$$

$$\delta_{ij} V_j = \begin{cases} 0 \\ V_j = V_i \end{cases} \quad i=j \qquad \sum_{j=1}^{3} (I_{ij} - \delta_{ij}\lambda) V_j = 0$$

$$\begin{cases} (I_{11}-\lambda) V_1 + I_{12} V_2 + I_{13} V_3 = 0 \\ I_{21} V_1 + (I_{22}-\lambda) V_2 + I_{23} V_3 = 0 \\ I_{31} V_1 + I_{32} V_2 + (I_{33}-\lambda) V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det\{\mathbb{I} - \lambda \mathbb{1}\} = 0$$

multiplico (1) por $\sum_i V_i$ y $\sum_i V_i^*$

$$\begin{cases} \sum_i V_i \sum_j I_{ij} V_j^* = \lambda^* \sum_i V_i^* V_i \\ \sum_i V_i^* \sum_j I_{ij} V_j = \lambda \sum_i V_i^* V \end{cases} \Rightarrow \sum_i \sum_j \left(V_i I_{ij} V_j^* - V_i^* I_{ij} V_j\right) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i V_i^* V_i$$

pero como es una resta puedo cambiar subíndices

$$\sum_i \sum_j \left(V_i I_{ij} V_j^* - V_j^* I_{ji} V_i\right) = (\lambda^* - \lambda) \sum_i V_i^* V_i$$

Como $I_{ij} = I_{ji}$ (tensor de inercia simétrico) es

$$\boxed{\lambda_i^* = \lambda_i} \qquad i = 1,2,3$$

* tengo 3 autovalores reales, sea λ^s

Se puede despejar: $\left(V_1^s, V_2^s(V_1), V_3^s(V_1)\right) . e^{i\varphi}$

pero como la fase es la misma para todos me quedo con los módulos (que definirán las direcciones)

Pido $\quad V_1^{s2} + V_2^{s2}(V_1) + V_3^{s2}(V_1) = 1 \quad$ (norma 1)

Sean $\lambda_p \neq \lambda_s \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_i V_i^p \sum_j I_{ij} V_j^s = \lambda^s \sum_i V_i^p V_i^s \\ \sum_i V_i^s \sum_j I_{ij} V_j^p = \lambda^p \sum_i V_i^s V_i^p \end{cases} \Rightarrow \sum_i \sum_j V_i^p I_{ij} V_j^s - V_i^s I_{ij} V_j^p = \overbrace{(\lambda^s - \lambda^p)}^{\neq 0} \sum_i V_i^p V_i^s$$

Podemos cambiar subíndices $\Rightarrow \quad 0 = \sum_i V_i^p \cdot V_i^s$

$$\Rightarrow \boxed{V^p \perp V^s}$$

los autovectores son ortogonales

$$I\vec{V} = \lambda \vec{V}$$
$$\vec{V}^t I \vec{V} = \vec{V}^t \lambda \vec{V}$$
$$\vec{V}^t I \vec{V} = \lambda \; \vec{V}^t \cdot \vec{V} = \lambda$$

pues $|\vec{V}| = 1$

si armo matrices

$$\mathbb{V} = \left(V^s, \; V^p \;\; V^q \right)$$

$$\mathbb{V}^t I \, \mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_1^s & V_2^s & V_3^s \\ V_1^p & V_2^p & V_3^p \\ V_1^q & V_2^q & V_3^q \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} V_1^s & V_1^p & V_1^q \\ V_2^s & V_2^p & V_2^q \\ V_3^s & V_3^p & V_3^q \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{V}^t I \, \mathbb{V} = \lambda \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ $\lambda^s, \lambda^p, \lambda^q$ son los momentos principales de Inercia

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^q \end{pmatrix}$$

vale que:

$$\lambda^s = \sum_{ij} V_i^s \, I_{ij} \, V_j^s \; > 0$$

$\searrow$ forma cuadrática

* Simetrías

rotando en $\frac{2\pi}{3}$ tengo la misma situación física (eje de sim. de orden 3)
$\Rightarrow$ tengo eje principal de inercia allí.

la idea es que si pienso en planos siempre se hacen nulos los prod. de inercia relacionados.

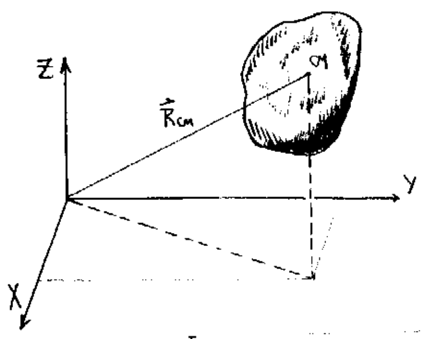
plano de simetría (es eje principal
$\Rightarrow$ es eje ppal. de inercia

• Movimiento de un cuerpo asimétrico

$\vec{L}_{spin} = I\vec{\Omega}$

se conserva → $E = T + V$

$E = \underbrace{T_{trasl}} + \overbrace{T_{rot}}^{\text{se conserva}} + \underbrace{V(R_{cm})}_{\text{se conserva}}$



de que punto/s

$\vec{L}\Big|_0^{SIST} = \vec{L}_{ORB}\Big|_0^{CM} + \vec{L}_{spin}\Big|_{CM}^{SIST}$

referido a

$\dfrac{d\vec{L}^{ORB}}{dt}\Big|_{in} = \vec{\tau}_0^{CM} = \vec{R}_{cm} \times \vec{F} = \vec{R}_{CM} \times -M.g\hat{z} \neq 0$ →

$\vec{L}^{ORB} \equiv \vec{L}_0^{CM}$ no se conserva

$\vec{L}^{spin}$ se conserva pues pensamos la $\vec{F} = M\vec{g}$ aplicada en el CM que es el origen y tiene $\vec{R}_{CM} = 0$

$\vec{L}_{spin} = L_1\hat{1} + L_2\hat{2} + L_3\hat{3}$

$= I_1\Omega_1\hat{1}$
$I_2\Omega_2\hat{2}$
$I_3\Omega_3\hat{3}$

$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)$

$T_{rot} = \dfrac{L_1^2}{2I_1} + \dfrac{L_2^2}{2I_2} + \dfrac{L_3^2}{2I_3}$

$1 = \dfrac{L_1^2}{2I_1T_r} + \dfrac{L_2^2}{2I_2T_r} + \dfrac{L_3^2}{2I_3T_r}$

$L_i = I_i\Omega_i$

$\dfrac{L_i^2}{I_i^2} = \Omega_i^2$

se conservan
$\boxed{T_{rot} \equiv T \quad L_{spin} \equiv L}$

$L_{spin}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$

Sean $I_3 > I_2 > I_1$ ⇒

$L^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2$

$2T = \dfrac{L_1^2}{I_1} + \dfrac{L_2^2}{I_2} + \dfrac{L_3^2}{I_3}$ → elipsoide de semiejes en L_i $\sqrt{2I_1T_r}, \sqrt{2I_2T_r}, \sqrt{2I_3T_r}$

$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ → esfera de radio L en L_i

$2I_3T > 2I_2T > 2I_1T$

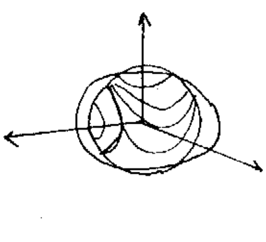
$L^2 > 2I_3T$

$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 > \frac{I_3}{I_1}L_1^2 + \frac{I_3}{I_2}L_2^2 + L_3^2$

$L_1^2\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right) + L_2^2\left(\frac{I_2 - I_3}{I_1}\right) > 0$

⇓

NO VALE



$2I_3T > L^2 > 2I_1T$

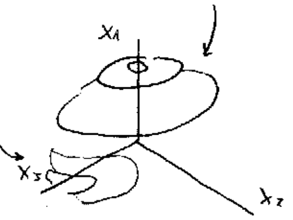
⇒ L_{spin} (su punta) se mueve en la intersección de una esfera y un elipsoide

$L^2 < 2I_1T$

tampoco vale ⇒

$L^2 \sim 2TI_1$

$L^2 \sim 2TI_3$



Estos movimientos son periódicos

La peonza tiene mov. estables para la rotación en torno a $\hat{x}_1, \hat{x}_3$ pero inestables en torno a $\hat{x}_2$

El movimiento puede resolverse mediante ecuaciones de Euler

estable	inestable
rotar en torno al mayor o menor momento de inercia	rotar en torno al momento de inercia intermedio
↘ generación mov. oscilatorio para $\vec{\Omega}$ $\omega^2 > 0$	↘ generación mov. no armónico para $\vec{\Omega}$ $\omega^2 < 0$

$\vec{L}$ constante
- si $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$ $\Rightarrow$ ambos son constantes (corresponde a una rotación) } Se consigue con $\vec{\Omega}$ en la dirección del eje principal
- si $\vec{L} \nparallel \vec{\Omega}$ $\Rightarrow$ $\vec{\Omega}$ oscila en torno a $\vec{L}$

● Pequeñas Oscilaciones

Formalismo para analizar que mov. hace un sistema con ligeras perturbaciones en la posición de equilibrio.

$$V(q_1,\dots q_n) \cong V(q_{o_1},\dots q_{o_n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{i_o}} \cdot (q_i - q_{i_o}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_{i_o}} \cdot (q_i - q_{i_o})(q_j - q_{j_o})$$

$$T(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots \dot q_n) \cong \frac{1}{2}\cdot\left(m(q_{o_1},\dots q_{o_n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m}{\partial q_i}\Big|_{q_{i_o}}(q_i - q_{i_o}) + \dots \right)\cdot \sum_{i,j}^{n} \dot q_i \dot q_j$$

Haciendo la aprox. consistente es:

$$\mathcal{L} = T - V = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q_{i_o}} (\eta_i)\cdot(\eta_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\big|_{q_{o_i}} \dot\eta_i \dot\eta_j$$

con $\left.\begin{array}{l} V_{ij} \equiv \partial^2 V/\partial q_i \partial q_j\big|_{q_{i_o}} \\ m_{ij} = m_{ij}\big|_{q_{i_o}} \end{array}\right\}$ simétricos donde $\eta_i = q_i - q_{i_o}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\,\dot\eta_i\dot\eta_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\,\eta_i\eta_j$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\dot{\vec\eta}^{\,t}\,\mathbb{T}\,\dot{\vec\eta} - \frac{1}{2}\,\vec\eta^{\,t}\,\mathbb{V}\,\vec\eta$$

formas bilineales cuadráticas reales y definidas positivas

*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\eta_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,\frac{d}{d\dot\eta_k}(\dot\eta_i\dot\eta_j)\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ij}\,\frac{d}{d\eta_k}(\eta_i\eta_j)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,\dot\eta_i\dot\eta_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ij}\,\eta_i\eta_j$$

n ecuaciones diferenciales de Euler → $\boxed{\sum_{j=1}^{n} m_{kj}\,\ddot\eta_j + V_{kj}\cdot\eta_j = 0}$

$k = (1,\dots,n)$

Se propone $\eta_j(t) = A_j\cdot e^{i\omega t}$ tomando al final $\mathrm{Re}\{A_j e^{i\omega t}\}$ como solución física

esto lleva a

$$\sum_{j=1}^{n}(-\omega^2 m_{kj} + V_{kj})A_j = 0$$

que equivale a

$$(\mathbb{V} - \omega^2\,\mathbb{T})\,\vec A = 0$$

problema de autovalores y autovectores generalizado. → necesito $|\mathbb{V} - \omega^2\,\mathbb{T}| = 0$

$\omega_1^2,\dots,\omega_N^2$ autofrecuencias $\omega_s^2 \in \mathbb{R}$, $\omega_s^2 \geq 0$

dado un $V = V(q_i)$
puede ser más Fácil

obtener explícitamente $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_{i_0}}$ la serie de taylor

cambiar variable $q_i - q_{i_0} = \eta$
y quedarme con los términos cuadráticos en $\eta_i \eta_j$

dado una $T = T(q, \dot{q})$
puede ser más fácil

evaluar $\left. m_{ij}(q_i)\right|_{q_{i_0}}$ y
quedarme con los términos cuadráticos en $\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$

$$\eta_j^s = A_j^s \cdot e^{i\omega_s t} \qquad s = 1, \dots, N$$

$$\vec{\eta}^s = \vec{A}^s \cdot e^{i\omega_s t}$$ ← para la frecuencia ω_s

$$\vec{\eta}^s = \begin{pmatrix} A_1 \cdot e^{i\omega_s t} \\ A_2 \cdot e^{i\omega_s t} \\ \vdots \\ A_N \cdot e^{i\omega_s t} \end{pmatrix}$$ c/u es un gL moviéndose con frec. ω_s

$$\vec{\eta}_{TOT} = C_1 \vec{\eta}^1 + C_2 \vec{\eta}^2 + \dots + C_n \vec{\eta}^n$$

$$\vec{\eta}_{TOT} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdot A_1^1 e^{i\omega_1 t} + C_2 \cdot A_1^2 e^{i\omega_2 t} + \dots + C_n A_1^n e^{i\omega_n t} \\ C_1 \cdot A_2^1 e^{i\omega_1 t} \\ \vdots \\ \underbrace{C_1 \cdot A_n^1 e^{i\omega_1 t}}_{\vec{A}^1} + \dots + C_n \cdot A_n^n e^{i\omega_n t} \end{pmatrix}$$

mov. + general de un gL n

$\vec{A}^s$ = modo normal de la frecuencia s

$$\vec{A}^s = \begin{pmatrix} A_1^s \\ A_2^s \\ \vdots \\ A_n^s \end{pmatrix} \cdot e^{i\theta_0}$$ tienen la misma fase

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_j(t) &= \sum_{s=1}^{N} C_s \cdot A_j^s \cdot e^{i\omega_s t} \\ \vec{\eta}(t) &= \sum_{s=1}^{N} C_s \cdot \vec{A}^s \cdot e^{i\omega_s t} \end{aligned}}$$

formas de escribir la solución total

j es el g.L.

$$\vec{\eta}(t) = \Re e\left\{\sum_{s=1}^{N} C_s \cdot \vec{A}^s \cdot e^{i\omega_s t}\right\}$$

traspuesto conjugado

daga

pido que la norma (en la métrica dada por $\mathbb{T}$ me de uno)

$$\vec{A}^{\dagger}\, \mathbb{T}\, \vec{A} = 1$$

para hallar A_1

interpolando a la matriz se tiene

$$\boxed{A^{t}\, \mathbb{T}\, A = \mathbb{1}}$$

donde $A \equiv$ matriz modal

A diagonaliza a $\mathbb{T}$

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_n^1 & A_n^2 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$$

modo normal (autovector)

$$(\mathbb{V} - \omega^2\, \mathbb{T})\vec{A} = 0$$

interpolando a la matriz

$$A^{t}\, \mathbb{V}\, A = \omega^2 A^{t}\, \mathbb{T}\, A = \omega^2\, \mathbb{1}$$

Sea el siguiente cambio de coordenadas

$$\boxed{\vec{\eta} = A\vec{\xi}}$$

$$\overset{n\times n}{A}\,\overset{n\times 1}{\xi} \qquad (A\vec{\xi})^{t} = \overset{1\times n}{\xi^{t}}\,\overset{n\times n}{A^{t}}$$

$\longleftarrow$ Coordenadas normales

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^{t}\, \mathbb{T}\, \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^{t}\, \mathbb{V}\, \vec{\eta}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^{t}\dot{\vec{\xi}}^{t}\, \mathbb{T}\, A\dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2} A^{t}\vec{\xi}^{t}\, \mathbb{V}\, A\vec{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}^{t} A^{t}\, \mathbb{T}\, A\dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2}\vec{\xi}^{t} A^{t}\, \mathbb{V}\, A\vec{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}^{t}\, \mathbb{1}\, \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2}\vec{\xi}^{t}\omega^2\, \mathbb{1}\, \vec{\xi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_i \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \xi_i^2\omega_i^2$$

N ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \sum_i \ddot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i\Big) = 0$$

$$\sum_i (-\omega^2 + \omega_i^2) A_i = 0$$

$$\omega^2 = \omega_i^2 \rightarrow \quad \xi_i = C_i \cdot e^{i\omega_i t}$$

COORDENADAS NORMALES	
$\xi_j = C_j . e^{i\omega_j t}$	grados de libertad en ξ [se desacoplan (un gL → una ω) los g.L. en lo que hace a ω]
$\eta_j = \sum_{s=1}^{N} C_s . A_j^s . e^{i\omega_s t}$	grados de libertad en η (un gL → CL de todas las ω)

si $\omega = 0$ →

$$\xi_j = A.t + B$$

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{N-1} C_s A_j^s e^{i\omega_s t} + \underbrace{A_j (G.t + D)}_{\substack{\text{asociado a la} \\ \omega = 0}}$$

Para volver atrás es

$$A^+ \mathbb{T} A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad A^+ \mathbb{T} \vec{\eta} = A^+ \mathbb{T} A \vec{\xi}$$

$$A^+ \mathbb{T} \vec{\eta} = \mathbb{1} \vec{\xi}$$

(coordenadas normales en función de las de desplazamiento)

- Las frecuencias nulas están asociadas a momentos conservados
- En coordenadas normales cada g.l oscila con una frecuencia única (N osciladores independientes)
- $$\vec{A}^s = \begin{pmatrix} a_1^s . e^{i\phi_s} \\ a_2^s . e^{i\phi_s} \\ \vdots \\ a_n^s . e^{i\phi_s} \end{pmatrix}$$ tienen la misma fase los A_j^s $\forall$ frecuencia ω_s

  amplitud

- Los modos normales pueden excitarse por separado (son ortogonales)
- Frecuencias iguales generarán modos normales que son físicamente los mismos. Son generados por la simetría del problema.

$$\bar{A} = a_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} v_2 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\omega_s^2 = \omega_r^2$ generan dos autovectores de esta forma

- **Oscilaciones Viscosas**

$$\sum_j m_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j + B_{ij}\dot{\eta}_j = 0$$

$$\det\left\{ \mathbb{V} + \omega^2 \mathbb{T} + \omega \mathbb{B} \right\} = 0$$

no se puede convertir en oscilaciones independientes

• Ecuaciones de Hamilton

Se pasa de $q, \dot{q} \longrightarrow q, p$ con $\boxed{p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}$

Se parte del

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i^{3N-k} p_i \cdot \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$dH = \sum_i \cancel{p_i \cdot d\dot{q}_i} + \dot{q}_i \cdot dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \cdot dq_i - \underbrace{\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot d\dot{q}_i}}_{p_i \cdot d\dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot dt$$

$$dH = \sum \dot{q}_i \cdot dp_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdot dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot dt$$

$$dH = \sum \dot{q}_i \cdot dp_i - \dot{p}_i \cdot dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \text{se deducen}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$$

Ecuaciones de Hamilton

p, q son $2N$ variables "canónicas" $\rightarrow$ g.L del sistema

Si $\left\{ \begin{array}{l} V \neq V(\dot{q}) \\ \text{Vínculos} \neq \text{Vínculos}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T = T_2 \\ H = E \end{array}$ (cuadrática en las vel. generalizadas)

• Transformación Canónica del H

Una transformación que verifica:

$$K = K(Q_i, P_i, t)$$

$$H \longrightarrow K$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \longrightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \longrightarrow \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

Usemos el principio variacional de Hamilton

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i^N p_i \cdot \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} dt$$

$$\delta S = \sum p_i \cdot \delta\dot{q}_i + \dot{q}_i \cdot \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial t} \underbrace{\delta t}_{=0}$$

t fijo

$$\sum_i^N \underbrace{p_i \cdot \delta \dot{q}_i} + \dot{q}_i \cdot \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \delta p_i$$

$$\frac{d}{dt}(p_i \cdot \delta q_i) - \dot{p}_i \cdot \delta q_i$$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \sum_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \cdot \delta p_i + \frac{d}{dt}(p_i \cdot \delta q_i) \right\} dt$$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \qquad \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}} \qquad \int_{t_i}^{t_f} \sum_i \frac{d}{dt}(p_i \cdot \delta q_i) \cdot dt$$

$$p_i \cdot \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f}$$

llego, pidiendo extremo a δS, a las ecuaciones de Hamilton, luego usando la misma idea que el $\mathcal{L}$ se tiene

si $\boxed{\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} F}$ → generatriz

$$\sum p_i \cdot \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = \sum P_i \cdot \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt}$$

Donde F es una función "generatriz"

- **Generatrices**

$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$ →

$$\sum p_i \dot{q}_i - H + K - \sum P_i \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \cdot \dot{Q}_i - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i - \sum \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right) \dot{Q}_i + K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H \end{array}}$$

◀ Esto define la transformación canónica

$F_1(q_i, Q_i, t)$

$F_2(q_i, P_i, t)$

$F_3(p_i, Q_i, t)$

$F_4(p_i, P_i, t)$

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i \cdot P_i$$

Identidad (transformación)

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i = p_i$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = q_i = Q_i$$

- **Corchetes de Poisson**

Sea $A = A(q_i, p_i, t)$ →

$$\frac{d}{dt} A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} A = \underbrace{\sum_i \left(+\frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)}_{\equiv [A, H]} + \frac{\partial A}{\partial t} \longrightarrow \frac{dA}{dt} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Las constantes de movimiento en un sistema cumplen que su corchete de Poisson con H es nulo.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = [q_i, H]$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = +\dot{p}_i = [p_i, H]$$

una transformación canónica cumple

$$\boxed{\begin{aligned} [p_i, q_j] &= \delta_{ij} \\ [p_i, p_j] &= 0 \\ [q_i, q_j] &= 0 \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ el corchete entre los mom. es nulo

$\rightarrow$ el corchete entre las coord. es nulo

Hamilton - Jacobi

nuevas coordenadas constantes

$q_i \longrightarrow Q_i \equiv \beta_i$

$p_i \longrightarrow P_i \equiv \alpha_i$

nuevos momentos

S de tipo F_2

$$\boxed{S = S(q_i, \alpha_i, t)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

$$① \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H - K$$

$$H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$$

$$\boxed{H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Ecuación de Hamilton - Jacobi

PDE

IMPORTANTE

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i(q_i, \alpha_i, t)$$

HJ tiene solución completa si el problema es totalmente separable

si $H = H(q_i, \alpha_i) \rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H = (cte) \rightarrow H = \alpha_1$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1 \rightarrow \boxed{S = W\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) - \alpha_1 . t}$$

Se procede en la misma forma con cada coordenada hasta obtener S

Podemos ver que

$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_i) \longrightarrow$ si me quedo con $H = \alpha_1 \equiv K$

será ec. Hamilton

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = a = \dot{Q}_i \rightarrow Q_i = \beta = a . t + \beta_0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \beta_i} = 0 = -\dot{P}_i \rightarrow P_i = \alpha_i \text{ (constantes)}$$

No puede depender de q_i pues si $\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} \neq 0 \rightarrow \alpha_1$ No sería constante pues $\dot{\alpha} \neq 0$ pero

Luego invirtiendo las ecuaciones ① determinamos las trayectorias

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$$

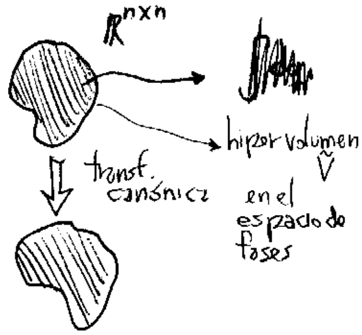
Si el problema es totalmente separable $\Rightarrow$

$$S = \sum_i^N W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \alpha_1 . t$$

(tendré tantas constantes de movimiento como g.l.)

y la solución se compone de problemas independientes en una variable

• Preservación del Volumen (en una transformación canónica)



$$\int dq_1 \dots dq_n \, dp_1 \dots dp_n = \tilde{V}_{p,q}$$

$$\int dQ_1 \dots dQ_n \, dP_1 \dots dP_n = \tilde{V}_{P,Q}$$

EL $\mathbb{J}$ de la transformación es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \dots & & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(Q_1,\dots Q_n, P_1,\dots,P_n)}{\partial(q_1,\dots q_n, p_1,\dots,p_n)} = \frac{\left.\frac{\partial(Q_1,\dots,Q_n,P_1,\dots,P_n)}{\partial(q_1,\dots q_n,P_1,\dots,P_n)}\right|_{P_i \text{ cte}}}{\left.\frac{\partial(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)}{\partial(q_1,\dots,q_n,P_1,\dots,P_n)}\right|_{q \text{ cte}}}$$

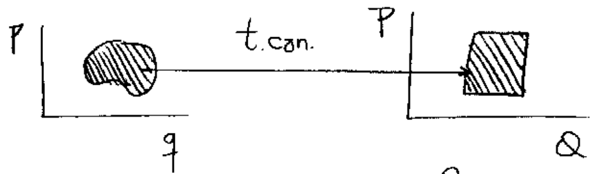
$$\Rightarrow \quad J_{ij}^{NUM} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)$$

$$\parallel$$

$$J_{ij}^{DEN} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{J} = 1 \quad \Rightarrow$ se conserva el volumen [sólo cambia la forma]

En $\boxed{1gL}$



$A_{pq} = \int dp\,dq \qquad A_{PQ} = \int dP\,dQ$

$$\mathbb{J} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}\right| = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} = [Q,P] = 1$$

el corchete de poisson para una transf. canónica en 1gL es el corchete de Poisson, que ya sabíamos da uno

el área se conserva

NOTA

Un sistema disipativo achica el área en la transformación

• Variables Angulo-Acción

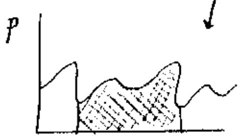
transf. canónica

$$p, q \longrightarrow J, \theta$$

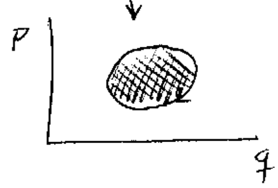
Requiere:

1_ Conservativos $\rightarrow$ $S = W - E.t$
2_ Totalmente separables $W = \sum_i^n W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$
3_ Problemas periódicos

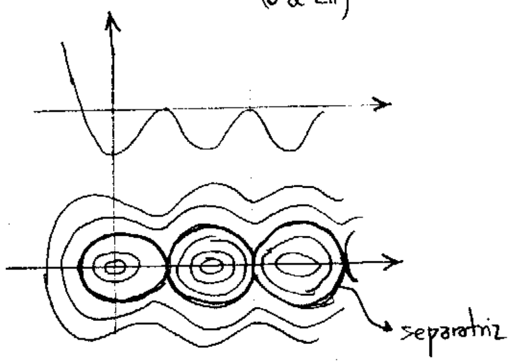
EL mov. periódico es de rotación o libración



en 1 periodo (0 a 2π)



$$S = \sum_i W_i(q_i, J_i) - E.t$$



La periodicidad de cada coordenada no implica periodicidad de todo el movimiento real.

integral de acción (1 por cada g.L)

nuevos momentos $\boxed{J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ciclo}} p_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot dq_i}$

Libración y rotación son movimientos de naturaleza diferente. No se puede pasar de uno a otro mediante pequeños perturbaciones

$$J_i = J_i(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\text{constantes de separación}})$$

constantes

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n)$$

transf. S $\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ \frac{\partial S}{\partial J_i} = \theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \end{cases}$

$W_i = \int p_i \, dq_i$

$\theta_i = \frac{\partial W_i}{\partial J_i}$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_i, J_1, \dots, J_n)$$

EL nuevo hamiltoniano es $E = E(J_1, \dots, J_n)$

$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial J_i} = \dot{\theta}_i \equiv \omega \\ \frac{\partial E}{\partial \theta_i} = -\dot{J}_i \end{cases}$

cond. inciales en (q_{0i}, p_{0i})

$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i(q_i, J_1, \dots, J_n)$

$\Rightarrow$ obtengo $J_1, \dots, J_n$ constantes

$$\boxed{\begin{gathered} \theta_i = \omega.t + \theta_{0i} \\ \frac{\partial W}{\partial J_i} = \theta_i = \theta_i(q_i, J_i) \end{gathered}}$$

$\rightarrow$ $\theta_i(q_i, J_i) = \omega.t + \theta_{0i}$

de acá se despejan los q_i

• Transformación Canónica-Infinitesimal

$$F_2 = F_2(q_i, P_i) = \sum_i^N q_i . P_i$$

Es la identidad $\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \equiv P_i \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \equiv q_i \end{cases}$

Considero $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i . P_i + \varepsilon . G(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)$ con $\varepsilon \sim 0$

$$p_i = P_i + \varepsilon . \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \rightarrow \quad P_i = p_i - \varepsilon . \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \varepsilon . \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad Q_i = q_i + \varepsilon . \underbrace{\frac{\partial G}{\partial P_i}}_{\cong \frac{\partial G}{\partial p_i}}$$

diferirán en un orden ε^2 el cual descarto

$$\delta p_\ell = -\varepsilon . \frac{\partial G}{\partial q_\ell}$$

$$\delta q_\ell = \varepsilon . \frac{\partial G}{\partial p_\ell}$$

si considero H en lugar de G y $\varepsilon = \delta t \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta p_\ell}{\delta t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \\ \frac{\delta q_\ell}{\delta t} &= \frac{\partial H}{\partial p_\ell} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{p}_\ell &= -\frac{\partial H}{\partial q_\ell} \\ \dot{q}_\ell &= \frac{\partial H}{\partial p_\ell} \end{aligned}}$$

◀ EL H genera la transformación evolución temporal

$$\delta A = A(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i) - A(q_i, p_i)$$

$$\delta A = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} . \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} . \delta p_i \right)$$

$$\delta A = \varepsilon . \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} . \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} . \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \varepsilon . [A, H] \quad \rightarrow \quad \frac{\delta A}{\delta t} = [A, H]$$

$\Rightarrow$ las constantes de mov. generan transf. can. inf. que dejan invariante al H

si $\dfrac{dA}{dt} = 0 = [A, H]$

• Potencial Electro Magnético

* Momentos canónicamente conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad \text{para si } V \neq V(\dot{q}) \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

$$\boxed{U(q,\dot{q}) = e.\varphi - e/_C \vec{A}\cdot\vec{V}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = T - e.\varphi + e/_C \vec{A}\cdot\vec{V}$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = m.V_x - (e/_c)\cdot A_x$$

* Cambio de Gauge

potencial generalizado

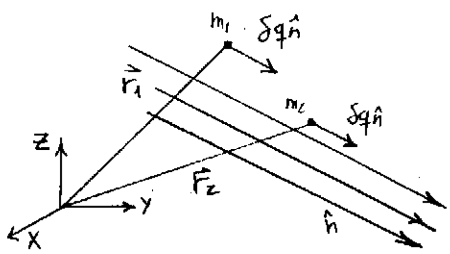
$$\boxed{U = q.\varphi(\vec{r},t) - (q/_c)\cdot \vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{V}(t)}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$ ← no altera las ecuaciones de movimiento

cambio de gauge

* Traslación Rígida

sea coordenada que representa trasl. rígida → $q \rightarrow q + \delta q \qquad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta q\,\hat{n}$



$$p = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \sum_i^N \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial V_i^2}{\partial \dot{q}}\right) = \sum_i^N \frac{m_i}{\cancel{2}} \cancel{2}.\vec{V}_i.\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}} = \sum_i^N m_i\,\vec{V}_i.\hat{n} = \boxed{\vec{p}.\hat{n}}$$

$$dV_i^2 = 2V_i\,dV_i$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}} = \frac{\vec{r}_i + \delta q \hat{n} - \vec{r}_i}{\delta q} = \hat{n}$$

si la coord. q es la asociada a la traslación rígida ⟹ el mom. canónicamente conjugado es el momento proyectado en esa dirección.

Para Fuerzas:

$$Q_j = \sum_i^N \vec{F}_i^a.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \Longrightarrow \quad Q = \left(\sum_i^N \vec{F}_i^a\right)\hat{n} = \boxed{\vec{F}.\hat{n}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_j}}_{=0} = Q_j$$

→ la T no se afecta por cambiar trasladando rígidamente el sistema

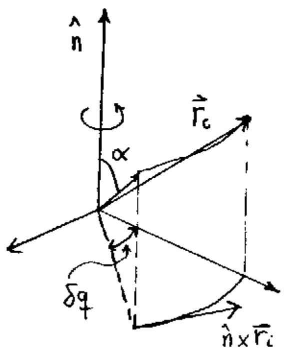
$$\frac{d}{dt}(\vec{p}.\hat{n}) = \vec{F}.\hat{n}$$

⇒ el p_j se conserva si no hay fuerza en $\hat{j}$

$$\frac{\partial V^2}{\partial \dot q} = 2\vec V \cdot \frac{\partial \vec V}{\partial \dot q}$$

* Rotación rígida

Sea coordenada que representa rot. rígida $\quad \vec r_i \to \vec r_i + \delta q\,(\hat n \times \vec r_i)$



$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot q} = \sum_i^N \frac{m_i}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot q} = \sum_i^N m_i \,\vec V_i \cdot \frac{\partial \vec r_i}{\partial q} = \sum_i^N m_i \vec V_i \cdot (\hat n \times \vec r_i)$$

$$= \sum_i^N \hat n \cdot (\vec r_i \times m_i \vec V_i)$$

$$= \boxed{\hat n \cdot \vec L}$$

$$|\delta q(\hat n \times \vec r_i)| = \delta q \cdot r_i \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\partial \vec V}{\partial \dot q} = \frac{\partial \vec r}{\partial q} = \frac{\vec r_i - \vec r_i + \delta q(\hat n \times \vec r_i)}{\delta q} = \hat n \times \vec r_i$$

El momento canónicamente conjugado en la dirección $\hat n$ es el $\vec L$ proyectado en esa dirección.

$$\frac{d}{dt}(\hat n \cdot \vec L) = \hat n \cdot \vec \tau$$

el p_j se conserva si no hay torque

fuerzas generalizadas

$$Q_j = \sum_i^N \vec F_i^a \cdot \frac{\partial \vec r_i}{\partial q} = \sum_i^N \vec F_i^a \cdot (\hat n \times \vec r_i) = \sum_i^N \hat n \cdot (\vec r_i \times \vec F_i^a) = \hat n \cdot \vec \tau$$

OBSERVACIÓN

> la T es un escalar (NO LE IMPORTAN las rotaciones) pues los módulos no varían

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \overbrace{\frac{\partial T}{\partial q}}^{=0} = Q_j$$

$$\frac{d}{dt}(\hat n \cdot \vec L) = \hat n \cdot \vec \tau$$