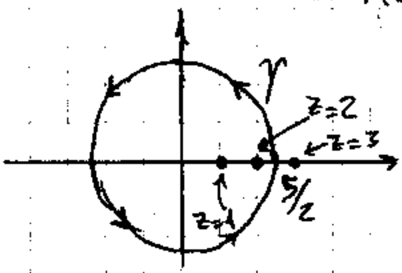
① $$\int_\gamma \underbrace{\frac{z^3}{(z-2)^{20}\cdot(z^2-4z+3)}}_{\equiv f(z)} dz = \int_\gamma \frac{z^3}{(z-2)^{20}\cdot(z-1)(z-3)}\, dz$$



$z=2$ es polo de orden 20 pues $\frac{z^3}{z^2-4z+3}$ es holomorfa en un entorno de $z=2$ y ⇒ puedo escribir $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-2)^{20}}$ → holo en $z=2$ y alrededores

z^2-4z+3

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-4.3.1}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} \to \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$Res(f,\infty) = -Res\left(\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right)$$

$$\frac{1}{w^2}\cdot\frac{\frac{1}{w^3}}{\left(\frac{1}{w}-2\right)^{20}\cdot\left(\frac{1}{w}-1\right)\left(\frac{1}{w}-3\right)} = \frac{1}{w^2}\cdot\frac{\frac{1}{w^3}}{\left(\frac{1-2w}{w}\right)^{20}\left(\frac{1-w}{w}\right)\left(\frac{1-3w}{w}\right)} = \frac{\frac{1}{w^3}}{\cancel{w^2}\left[\frac{(1-2w)^{20}\cdot(1-w)(1-3w)}{w^{20}\, w^{20}}\right]}$$

$$= \frac{1}{\cancel{w}}\,\frac{w^{17}}{(1-2w)^{20}\cdot(1-w)\cdot(1-3w)}$$

no tiene singularidad en 0 ⟹ f es holomorfa en infinito

vale que $$Res(f,\infty) + \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j) = 0$$

donde $j=1,\dots,n$ es el número (finito) de singularidades de f en $\mathbb{C}$. Luego

$$Res(f,\infty) + Res(f,2) + Res(f,1) + Res(f,3) = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{0} \quad + Res(f,2) + \quad = 0 - Res(f,1) - Res(f,3)$$

$z=1$, $z=3$ son ambos polos simples. Por ende;

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1} \frac{z^3}{(z-2)^{20}\cdot(z-3)} = \frac{1^3}{1.(-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$Res(f,3) = \lim_{z\to 3} \frac{z^3}{(z-2)^{20}(z-1)} = \frac{3^3}{1.2} = \frac{27}{2} \Rightarrow$$

$$Res(f,2) = +\frac{1}{2} - \frac{27}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

son los residuos de f en los puntos que se hallan englobados por Γ

$$\int_\gamma \frac{z^3}{(z-2)^{20}(z^2-4z+3)}\,dz = 2\pi i \left[Res(f,1) + Res(f,2) \right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + 13\right] = 2\pi i \cdot \cancel{\frac{-1+26}{2} = 2\pi i \cdot \frac{25}{2}}$$

$$\boxed{\int_\gamma \frac{z^3}{(z-2)^{20}(z^2-4z+3)} = \cancel{25\pi i} \sim 27\pi i}$$