5) a)

$f: D \to \mathbb{C}$ holomorfa $\quad z=a$ es cero de orden n de f $\to$ se puede escribir:

$$f(z) = (z-a)^n \cdot g(z) \quad \text{con} \quad g: g(a) \neq 0$$

$$f^{k}(z)\Big|_{z=a} = 0 \quad \text{si} \quad k \geq n$$

$$f^{k}(z)\Big|_{z=a} \neq 0 \quad k < n$$

$$f'(z) = n.(z-a)^{n-1} \cdot g(z) + (z-a)^n \cdot g'(z)$$

Luego
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(z)}{(z-a)^n \cdot g(z)} = \frac{n.(z-a)^{n-1} \cdot g(z) + (z-a)^n \cdot g'(z)}{(z-a)^n \cdot g(z)}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{(z-a)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$$

$\Rightarrow$ como $g(z=a) \neq 0 \to z=a$ es polo simple de $\frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = \lim_{z \to a} (z-a) \cdot \left[\frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right] = n$$