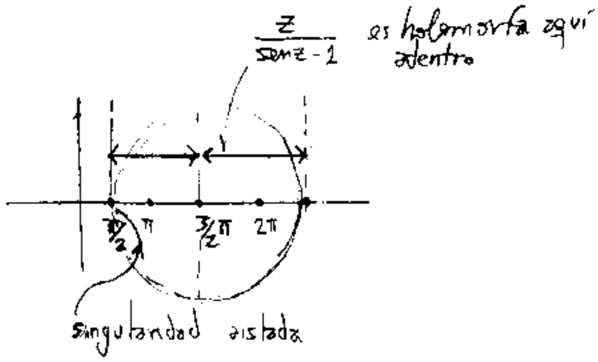
4a)

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z - 1} \qquad z_0 = \frac{3}{2}\pi$$



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{f^{n}(3\pi/2)}{n!} = \left(\frac{\cancel{n!}}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)^{n+1}}\,dz\right)\cdot\frac{1}{\cancel{n!}}$$

$$f(z) = \frac{z}{(\operatorname{sen} z) - 1}$$ tiene singularidades donde:

$$\overline{e^{iz}} = \overline{\cos z + i \operatorname{sen} z} = e$$

$$\operatorname{sen} z = 1$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \qquad 1 = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i$$

$$e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} = 2i$$

$$e^{ix-y} - e^{-ix+y} = 2i$$

$$e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{y}e^{-ix} = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$f(z) = \frac{z}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) - 1}$$

Vamos a ver que si tomo Γ cualquier curva $\Gamma = \{ z \in \mathbb{C} : |z - \frac{3}{2}\pi| = r \}$

con $0 < r < \pi$

se tiene:

$$\int_{\Gamma}\frac{z}{\operatorname{sen} z - 1}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{3}{2}\pi + re^{i\theta}\right) r e^{i\theta} i}{\operatorname{sen}\left[\frac{3}{2}\pi + r e^{i\theta}\right] - 1}\,d\theta$$

▲ esto es feo de acotar

si $x = 0$ no puede ser

$$e^{-y} - e^{y} = 2i$$

$$\Downarrow$$

$\nexists\ z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen} z = 1$

$\underline{\underline{\Gamma}}$: $z(\theta) = \frac{3}{2}\pi + re^{i\theta}$

$z'(\theta) = r \cdot e^{i\theta} \cdot i$

si $y = 0$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i = 2\cdot e^{i\pi/2}$$

$$e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x + i\left(e^{-y}\operatorname{sen} x + e^{y}\operatorname{sen} x\right) = 2i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x = 0$$

$$e^{-y}\cos x = e^{y}\cos x$$

si $\cos x \neq 0 \rightarrow x = \pi/2, 3/2\pi, 5/2\pi$

$y = 0$

si $\cos x = 0 \rightarrow x = 3/2\pi$

$$\Downarrow$$

$\operatorname{sen}(3/2\pi) = -1$

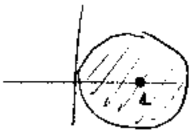
no hay singularidad

Según se ve, no hay singularidades de $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z - 1}$ en $D(3/2\pi, \pi)$

→ la serie de Taylor converge allí con radio π; pues en $\pi/2$, $5/2\pi$ ya tenemos dos singularidades aisladas

Bueno se ve que el radio de convergencia R de f es el máximo radio del círculo centrado en $z_0 = \frac{3\pi}{2}$ donde f continúa siendo analítica. R es la distancia a la singularidad más cercana, que es $z = \frac{\pi}{2}$ y $z = \frac{5}{2}\pi$

$$\Rightarrow \boxed{R = \pi}$$



4b)

$$f(z) = e^z + \frac{z^2+1}{\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}} - \frac{1}{z-2} = e^z + \frac{z^2+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-2}$$

$2 \pm \sqrt{4-4.1.1}$

e^{z-1+1}

$e.e^{(z-1)}$

$$-\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$+\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$\frac{z^2-1+2}{(z-1)^2}$$

$$\frac{z^2-1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

$0<|z-1|<1$

$$\frac{(z+1)\cancel{(z-1)}}{(z-1)^{\cancel{2}}}$$

$$e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} + \frac{z}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$\frac{z+1-1}{(z-1)}$$

$$\frac{(z-1)}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left[1+\frac{e}{n!}\right]$$

$$\boxed{f(z) = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{e}{n!}\right](z-1)^n}$$