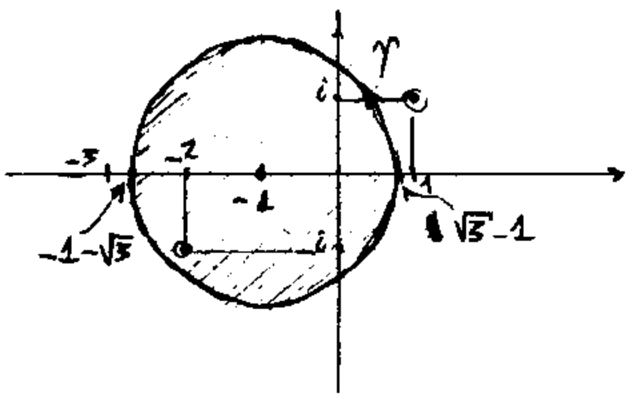
Ejercicio 3

$$\int_{|z+1|=\sqrt{3}} \frac{Ln(z+3)}{z^2+z-1-3i}\, dz$$

ln(z) rama principal del logaritmo

$$|z+1| = \sqrt{3} \rightarrow \gamma(t) = -1+\sqrt{3}\cdot e^{it} \qquad 0 < t < 2\pi$$



Si $\ln(z+3)$ fuese holomorfa en el interior de γ y sobre γ ⇒ vale la fórmula integral de Cauchy para un punto interior $z_0 \in \mathcal{C}$ [donde $\mathcal{C}$ es el círculo⊕ parametrizado por $\gamma(t)$ en el sentido de las agujas del reloj]

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

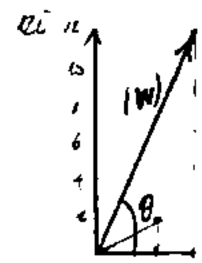
⊕ por círculo entiéndase circunferencia más el interior

$$z^2+z-(1+3i)$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1\cdot(1+3i)}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4+12i}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5+12i}}{2} = w$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$$

$$\theta = 1{,}176 \text{ rad}$$

$$|5+12i| = \sqrt{25+144} = 13$$

$z_1 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{W_A^{1/2}}{2}\right)$ $z_2 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{W_B^{1/2}}{2}\right)$ donde $W_A^{1/2}, W_B^{1/2}$ son los dos valores tales que $(W_A)^2 = W = (W_B)^2$

$$W^{1/2} = |W|^{1/2}\cdot\left[\cos \frac{1}{2}(\theta+2k\pi) + i\cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\theta+2k\pi)\right]$$

$$W^{1/2} = \sqrt{13}\cdot\left[\cos\left(\frac{1{,}176}{2}\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1{,}176}{2}\right)\right]$$

$$W^{1/2} = 3+2i$$

$$W^{1/2} = \sqrt{13}\cdot\left[\cos\left(\frac{1{,}176+2\pi}{2}\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1{,}176+2\pi}{2}\right)\right]$$

$$W^{1/2} = -3-2i$$

⇒

$$z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{3+2i}{2} = 1+i \qquad z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{-3-2i}{2} = -2-i$$

Luego:

$$z^2+z-(1+3i) = [z-(1+i)]\cdot[z+(2+i)]$$

$$\int_\gamma \frac{\ln(z+3)}{(z-(1+i))(z+(2+i))}\cdot dz$$

$$\frac{1}{[z-(1+i)]\cdot[z-(-2-i)]} = \frac{A}{[z-(1+i)]} + \frac{B}{[z-(-2-i)]}$$

$$1 = A[z-(-2-i)] + B[z-(1+i)]$$

si $z=-2-i \rightarrow$ $\quad 1 = B(-2-i-1-i) = B(-3-2i)$

$$B = -\frac{1}{3+2i}$$

si $z=1+i \rightarrow$ $\quad 1 = A(1+i+2+i)$

$$A = \frac{1}{3+2i} \longrightarrow$$

$$\int_\gamma \frac{\ln(z+3)}{z^2+z-(1+3i)}\,dz = \underbrace{\int_\gamma \frac{(1/3+2i)\cdot\ln(z+3)}{z-(1+i)}\,dz}_{[2]} + \underbrace{\int_\gamma \frac{-1/3+2i\cdot\ln(z+3)}{z-(-2-i)}\,dz}_{[3]}$$

Ahora bien, definiendo $\frac{1}{3+2i}\cdot\ln(z+3) = f(z)$

se tiene que resulta $f(z)$ holomorfa en $\mathscr{C}$ [γ y su interior] Con lo cual se puede aplicar la formula de Cauchy para la integral [3] pues $(-2-i)$ es interior a $\mathscr{C}$. $\Rightarrow$

$$2\pi i\,\frac{\ln(\overset{-2-i}{\downarrow}z+3)}{3+2i} = \int_\gamma \frac{(1/3+2i)\cdot\ln(z+3)}{z-[-2-i]}\,dz$$

Para la integral [2] tengo $g(z) = \frac{1\cdot\ln(z+3)}{(3+2i)\cdot[z-(1+i)]}$

la cual es holomorfa en γ y en su interior con lo cual tengo:

$$\int_\gamma g(z)\cdot dz = 0 \quad \text{por ser un}$$

camino cerrado la trayectoria de integración. Poniendo todo junto:

$$\int_\gamma \frac{\ln(z+3)}{z^2+z-(1+3i)}\cdot dz = \boxed{-\frac{2\pi i\cdot\ln(1-i)}{3+2i}}$$