COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2003

**Práctica 5** - **Autovalores y autovectores - Diagonalización**

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $A$ en cada uno de los siguientes casos:
(Analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$)

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ viii) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ ix) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 2.** Para cada una de las matrices $A$ del ejercicio anterior, sea $U$ una base de $K^n$ y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base $B$ de $K^n$ tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

**Ejercicio 3.** Sean $A, C$ y $D \in K^{n \times n}$ tales que $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = C \cdot D^n \cdot C^{-1}$

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 5.** Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con dim(Im($f$))=$s$. Probar que $f$ es diagonalizable (ver Ejercicio 17 de la práctica 3). Calcular $\mathcal{X}_f$.

**Ejercicio 6.** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times2}$. Determinar todos los $a$ , $b$ y $c \in K$ para los que $A$ es diagonalizable.

**Ejercicio 7.** Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 4\,,\ a_1 = 9 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

i) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

ii) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

iii) Encontrar una matriz inversible $P$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea diagonal.

iv) Hallar la fórmula general para el término $a_n$ , $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

**Ejercicio 9.** Encontrar una fórmula general para el término $a_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

en los siguientes casos:

i) $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$

ii) $a_0 = 0$, $a_1 = 3$

**Ejercicio 10.** Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias (es decir, encontrar una fórmula general para los términos $x_n$ e $y_n$ en función de $x_0$ e $y_0$):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

**Ejercicio 11.**

i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

ii) Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} =< e^x, e^{-x} >$.
Sugerencia: Llamar $g = f'$ y considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$

**Ejercicio 12.** Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de $\delta$ asociado al autovalor $\lambda$. (Observar que entonces $\delta$ tiene infinitos autovalores.)

**Ejercicio 13.** Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A$ y $A^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

ii) Probar que si $A$ es inversible, entonces 0 no es autovalor de $A$; y si $x$ es un autovector de $A$, entonces $x$ es un autovector de $A^{-1}$.

**Ejercicio 14.** Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , a) $P = X - 1$ , b) $P = X^2 - 1$ , c) $P = (X-1)^2$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ , $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

**Ejercicio 15.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ii) Calcular $A^{1000}$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a $A^{-1}$ como combinación lineal de $A$ y de $I_2$.

**Ejercicio 16.** Sea $V$ un $K$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $f$ es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de $f^{-1}$ como polinomio en $f$.

**Ejercicio 17.** Sea $V$ un $K$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean $S$ y $T$ subespacios de $V$ tales que $\dim(S) = s$ , $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si $S$ y $T$ son $f$-invariantes, probar que existe una base $B$ de $V$ y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}\mathcal{X}_{A_2}$.

**Ejercicio 18.**

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x,y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean $f$-invariantes.

ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo $\theta$:

$$|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ , $f_\theta$ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean $f_\theta$-invariantes.

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿Es $g_\theta$ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean $g_\theta$-invariantes.

**Ejercicio 19.** Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio $S_i$ de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea $f$-invariante.

ii) Probar que no existen subespacios propios $f$-invariantes $S$ y $T$ de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

**Ejercicio 20.** Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathcal{X}_A = (x-\alpha)(x-z)(x-\bar{z})$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = A \cdot x$.

i) Probar que existe $v_1$, autovector de $g_A$ de autovalor $\alpha$, con todas sus coordenadas reales.

ii) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de $g_A$ asociado al autovalor $z$. Probar que $\overline{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de $g_A$ de autovalor $\bar{z}$.

iii) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = A \cdot x$. Probar que $< v_2, v_3 > \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio $f_A$-invariante de dimensión 2.

iv) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que $B$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $[f_A]_B$

**Ejercicio 21.** Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la T.L. definida por $f_A(x) = A.x$. Hallar subespacios propios $S$ y $T$ de $\mathbb{R}^3$, $f_A$-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$