COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 (F) - Primer cuatrimestre de 2003

Práctica 4 - **Determinantes**

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{i)}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{v)}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{vi)}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$

ii) Calcular el determinante de $A \in K^{n\times n}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.

i) Si $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$ y $C \in K^{n\times m}$, sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ la matriz de bloques definida por $A = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$. Probar que $\det(M) = \det(A)\ \det(B)$.

ii) Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ y para cada i, $1 \leq i \leq n$ sea $A_i \in K^{r_i\times r_i}$. Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

Calcular $\det(M)$.

Ejercicio 4. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Probar que el determinante de la matriz $A \in K^{n\times n}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es igual a $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$. (Por esta razón, la matriz A se llama la matriz **compañera del polinomio** $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$.)

Ejercicio 6. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7 Dadas las matrices A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A \cdot C = C \cdot B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 8.

i) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

ii) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que $\det\,(A + B) = \det\,(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

Ejercicio 10.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Ejercicio 11. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.

Ejercicio 12. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguien-tes matrices:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Sea A una matriz inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$ ¿Qué pasa si A no es inversible?

Ejercicio 14. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

$$\text{i)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0$$

Calcular $\det A$.

Ejercicio 16. Sea $A \in K^{m\times n}$

i) Probar que son equivalentes:

a) $\operatorname{rg}(A) \geq s$

b) A admite una submatriz de $s\times s$ con determinante no nulo

ii) Deducir que

$\operatorname{rg}(A) = \max\{s \in \mathbb{N}_0 : A$ admite una submatriz de $s\times s$ con determinante no nulo$\}$

Ejercicio 17. Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11} \cdot A_{33} - A_{13} \cdot A_{31} = 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 : A.x = 0\}$.