

COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA 3 (F) -Primer cuatrimestre de 2003

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2 \cdot x_1 - 7 \cdot x_3, 0, 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3)$
- ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2 \cdot x_2, 1 + x_1)$
- iii) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial.)
- iv) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- v) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- vi) $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geoméricamente las siguientes aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

- i) $f(x, y) = (x, 0)$
- ii) $f(x, y) = (0, y)$
- iii) $f(x, y) = (x, -y)$
- iv) $f(x, y) = \left(\frac{1}{2} \cdot (x + y), \frac{1}{2} \cdot (x + y)\right)$
- v) $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \sin t, x \cdot \sin t + y \cdot \cos t)$

Ejercicio 3. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

- i) $\text{tr}: K^{n \times n} \rightarrow K$
- ii) $t: K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$, $t(A) = A^t$
- iii) $f: K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$, $f(A) = B \cdot A$ donde $B \in K^{r \times n}$
- iv) $\delta: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$
- v) $\Phi: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$
- vi) $c_\alpha: K[X] \rightarrow K$, $c_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 4.

- i) Probar que existe una única transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$
- ii) ¿Existirá una transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
- iii) Sean $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$, $g(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $g(2, 2, -1) = (3, -1, 2)$ y $g(3, 2, 1) = (0, 0, 1)$. Determinar si $f = g$.
- iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 5.

- i) Calcular el núcleo y la imagen de cada transformación lineal de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .

- ii) Clasificar las transformaciones lineales tr , t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 6. Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$.

Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

(*) **Ejercicio 7.** Sean $g: V \rightarrow V'$ y $f: V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales. Probar:

- $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$
- Si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$
- $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
- Si $\text{Im}(g) = V'$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$

Ejercicio 8.

- ¿Existirá algún epimorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$?
- Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \text{Im}(f)$?
- ¿Existe algún monomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?
- Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2 \cdot x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existirá algún isomorfismo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
- Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:
 - $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2 \cdot x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
 - $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

- $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
- $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
- $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
- $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
- $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
- $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 10. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- Hallar una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.
- Hallar ecuaciones para S (usar i))
- Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle + \langle (0, 1, 1, 2) \rangle$

Ejercicio 11. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Se define la aplicación $\alpha_B: V \rightarrow K^n$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad \alpha_B(v) = (x_1, \dots, x_n)$$

Probar que α_B es un isomorfismo.

Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B , esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

- i) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n
- ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n
- iii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), \dots, \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n

Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1, X^2 - 3 \cdot X + 5, 2 \cdot X^2 + 2 \cdot X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1), (1, -3, 5), (2, 2, -3)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , para lo que se puede usar el método de triangulación.

Ejercicio 12. Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. f se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.

- i) Probar que $f : V \rightarrow V$ es un proyector $\iff f(v) = v \quad \forall v \in \text{Im}(f)$.
- ii) En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla:
 - a) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
 - b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3 \cdot x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- iii) Sea V un K -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- iv) Sea V es un K -espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \rightarrow V$ tal que $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$.

Ejercicio 13. Dada $f : V \rightarrow V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3, 5 \cdot x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3)$
 - a) $B = B'$ la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - b) $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.
- ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2 \cdot x_1 - i \cdot x_2, x_1 + x_2)$
 - a) $B = B'$ la base canónica de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial.
 - b) $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- iii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$
 - a) $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
 - b) $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.
- iv) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Ejercicio 14. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar $f(3 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?
- ii) Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3 \cdot w_3 - w_4)$.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifique:

- i) $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$
- ii) $A \neq 0$; $A \neq I_3$ y $A^2 = A$

Ejercicio 16. Mostrar, en cada uno de los siguientes casos, una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $A \cdot x = b$ cumpla:

- i) No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b .
- ii) Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b .
- iii) No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b .
- iv) Tiene solución única, independientemente del valor de b .

Ejercicio 17. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: Recordar que, si f es un proyector, $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$.)

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3, 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3)$$

- i) Determinar bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$C \cdot A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21.

i) Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $S = \{x \in K^n / A \cdot x = 0\}$. Probar que $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$.

(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean $A \in K^{m \times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $A \cdot x = b$ y sea $(A|b)$ su matriz ampliada. Probar que $A \cdot x = b$ tiene solución $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$.

(*) **Ejercicio 22.** Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times r}$. Probar que

$$\text{rg}(A \cdot B) \leq \text{rg}(A) \quad \text{y} \quad \text{rg}(A \cdot B) \leq \text{rg}(B).$$