Series de Potencias

- Series de Potencias

Son series de términos variables de la forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots}$$

Interesa ver para que valores de x la serie converge. Para cada uno de esos valores.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Suma de la serie}} = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad \forall x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}$$

Luego si $\sum a_n x^n$ converge se puede definir una Función:

$$f(x) = P_n(x) \quad : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{ converge}\}$$

Ejemplos

A. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$

Luego $P_n(x) = \frac{1}{1-x} = f(x) \quad : D(f) = (-1,1)$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^n$ alternante ; si $|x|<1 \Rightarrow |(x)^n| \to \emptyset$ $x^n > \emptyset$

$\frac{x^{n+1}}{x^n} < 1$ decreciente $\Rightarrow$ x Leibnitz converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{si } |x|<1$$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(x^2)^n$ converge a $\frac{1}{1+x^2}$ si $|x|<1$

- **Sea** $r \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ converge para $x = r$
  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < |r|$

demo:

si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . r^n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n . r^n = \emptyset \Rightarrow \{a_n r^n\}$ esta acotada

si $|x| < |r| \wedge \begin{cases} y = \frac{|x|}{|r|} < 1 \\ |x|^n = y^n . |r|^n \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |a_n x^n| = |a_n| . |x|^n = |a_n| . y^n . |r|^n = \\ \underbrace{|a_n . r^n|}_{\leq K} . y^n \leq K . y^n \end{array} \right.$

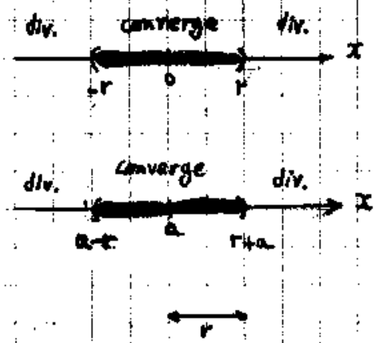
$\sum_{n=0}^{\infty} K . y^n$ Converge por serie geométrica $|y|<1$

- **Sea** $r \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ diverge para $x = r$
  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ diverge $\forall x \in \mathbb{R} : |x| > |r|$

demo: si $\sum$ converge v algun x : $|x| > r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ converge si $x = r$ por el teorema anterior; pero esto contradice la hipótesis y $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge si $|x| > |r|$

- **Dada** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ solo una de las condiciones se cumple:

  1. La serie converge solo si $x = \emptyset$
  2. La serie converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$
  3. Existe $r > 0$: la serie converge absolutamente si $|x| < r$ y la serie diverge si $|x| > r$



Si en lugar de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n .(x-a)^n$ las condiciones 1 y 3 quedan:

1. converge solo si $x-a=\emptyset \rightarrow x=a$
3. $\exists\ r>0$: Σ converge absolutamente si $|x-a|<r$ ó $x \in (-r+a, r+a)$
Σ diverge si $|x-a|>r$ ó $x>r+a \wedge x<-r+a$

<u>demo</u>: si $x=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n = a_0 + \emptyset + \emptyset + \dots$ converge

si $x \neq 0$ es el único valor para la cual Σ converge $\Rightarrow$ cumple 1.

Si Σ converge para $x = r \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ abs. conv. $\forall\ x : |x| < |r|$

Radio de Convergencia

- El radio de convergencia R de una $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ es:

$R = +\infty$	si la serie converge absolutamente $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$R = 0$	si la serie converge solo para $x=0$
$R = r$	si la serie converge absolutamente si $|x|<r$

Para determinar el intervalo de convergencia de una $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ se utilizarán D'Alembert o Cauchy para hallar R. Luego se debe verificar aparte la convergencia en los extremos del intervalo hallado.

Ejemplos:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{2^n . x^n}{n . 3^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+1} . x^{n+1}}{(n+1) . 3^{n+1}} . \frac{n . 3^n}{2^n . x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} |x| . \frac{n}{n+1} =$$

$\frac{2}{3}|x| \Rightarrow$ serie abs. conv. si $\frac{2}{3}|x| < 1$
$|x| < \frac{3}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}$ conv. absolutamente si $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

si $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{\cancel{2^n} . \cancel{3^n}}{n . \cancel{3^n} . \cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{1}{n}$

Leibnitz: $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad \frac{1}{n} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty}$ converge x Leibnitz

si $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{\cancel{2^n} . (-1)^n \cancel{3^n}}{n . \cancel{3^n} . \cancel{2^n}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . (-1) . (-1)^n . \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} . \frac{1}{n}$

$(-1)^{2n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ es -1

$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$

no es abs. conv. $\Rightarrow$ $-1 . \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

$\sum_{n=1}^{\infty}$ diverge

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \text{ converge si } x \in \left(-3/2 ; 3/2\right]}$$

- **Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . x^n$ converge absolutamente en un extremo $\Rightarrow$ es abs. conv. en cada extremo**
- **Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0 \Rightarrow R$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . x^n$ es $R = \frac{1}{L}$**
- **Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n . x^n$ converge en un extremo y diverge en el otro $\Rightarrow$ es cond. conv. en cada extremo**

- **Derivación de Series de Potencias**

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$ converge y $R>0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n . a_n . x^{n-1}$ tiene a R como radio de convergencia

$\Rightarrow \sum n(n-1) . a_n . x^{n-2}$ tiene a R como radio de convergencia.

- $\boxed{\begin{array}{l} \text{Sea } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n \text{ con } R>0 \wedge f: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n \\ \Rightarrow \exists\ f'(x) \ \forall x \in (-R,R) \ \wedge \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n . a_n . x^{n-1} \end{array}}$

Ejemplo:

A. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{x^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| . (n^2+2n+1)}{n^2+4n+4} = |x|$ $\qquad |x|<1$

conv. abs en $(-1,1)$

si $x=1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge por serie p absolutamente

si $x=-1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{(n+1)^2} \to 0$ $\quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)^2}$ decreciente

$\Rightarrow$ x leibnitz converge

$\sum_{n=0}^{\infty}$ conv. abs. en $[-1,1]$ $\qquad \Rightarrow$ conv. abs. pues $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{a_n} \right| = \sum \frac{1}{a_n}$ que converge

Luego $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ definida $\forall x \in (-1,1)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{(n+1)^2} . (n+1) . x^{(n+1)-1}$

$f'(x) = \frac{1}{n+1} . x^n$

$f'(x)$ converge en $[-1,1)$

la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia pero no necesariamente el mismo intervalo

B. Hallar representación en serie de potencias de $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 . x^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}}_{\text{serie geométrica converge}} \qquad \text{si } |x|<1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n . x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n . x^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a . x^n = a + a.x + a.x^2 + \dots + a.x^n = a . \frac{1}{1-x} \qquad \text{si } |x|<1$$

Taylor

- **Representación de Funciones mediante Series de Potencias.**
  - **Series de Taylor y Maclaurin**

Serie de Maclaurin $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(0).x^n}{n!} + \dots$

Serie de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a).(x-a)^n}{n!} + \dots$

En general:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!}.x^n \quad \text{es decir} \quad a_n = \frac{f^n(0)}{n!} \quad \wedge$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a).(x-a)^n}{n!} \quad \text{es decir} \quad a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Si una f tiene una representación en serie de potencias en $x-a$, ésta serie debe ser su serie de Taylor en a. Si f tiene representación en serie de potencias en x, esa serie es su serie de Maclaurin.

Dada $F(x)$ $\qquad$ $\text{Taylor}(F(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}.x^n$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

- Series de Potencias para Logaritmos Naturales

Sea

$$F(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n . t^n + \dots \qquad si\ |t| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} . dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n . t^n . dt \qquad si\ |t| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \qquad si\ |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} \qquad si\ |x| < 1$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \qquad si\ |x| < 1$$

Al aproximar un valor funcional $F(x_0)$ se debe tener cuidado de que $x_0 \in$ intervalo de convergencia de la serie que se va a utilizar.