CALCULO DIFERENCIAL

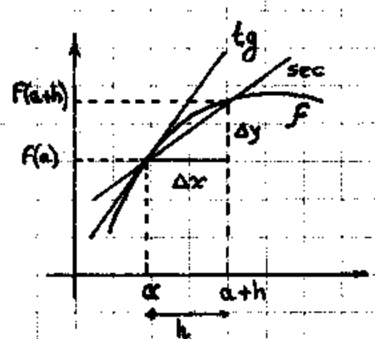
Derivada de una Función en un punto a

Sea f definida en un entorno de a. f es derivable en a si:

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$ Derivada de f en a.

Definición Alternativa $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

la F derivada es una nueva f que da el valor de la tg (pendiente de la recta tg) en cada punto de la curva de f



Función Derivada

Para f su derivada f' es la función definida en:

$$D(F') = \left\{ x \in D(F) : \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \ \exists \right\}$$

con los valores $$\boxed{F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$ Función F derivada

Se debe aclarar la diferencia entre:

$\underbrace{F'(x)}_{\text{Función derivada}}$ y $\underbrace{F'(x_0)}_{\text{valor de la Función derivada en un punto } x_0}$

Derivadas por Definición de funciones $(F'(x))$

1. $f(x) = K$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{K-K}{h} = \emptyset \Rightarrow F'(x) = \emptyset$

2. $F(x) = a.x+b$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-a.x-b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax+ah-ax}{h} = a \Rightarrow F'(x) = a$

3. $F(x) = sen(x)$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x).cos(h)+sen(h).cos(x)-sen x}{h} =$

$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x)[cos(h)-1]+sen(h).cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -sen(x) \underbrace{\frac{(1-cos(h))}{h}}_{\to 0} + \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\to 1} cos(x)$

$F'(x) = cos(x)$

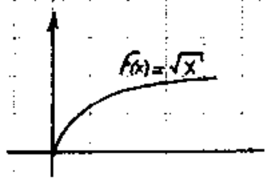
4. $F(x) = Ln(x)$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{Ln(x+h)-Ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} Ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} Ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$\lim_{h\to 0} Ln \underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}}_{\to e}{}^{\frac{1}{x}} = Ln\, e^{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{1}{x}}$

• Derivada de una Función en un punto

A. $F(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = \emptyset$

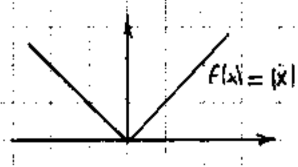
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\emptyset+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \quad \nexists\ F'(0)$$



Las Funciones que tienen picos o puntos angulosos no tienen derivada en dichos puntos.

B. $F(x) = |x|$ en $x_0 = \emptyset$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \left.\begin{matrix} 1 & \text{si } h\to 0^+ \\ -1 & \text{si } h\to 0^- \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nexists\ F'(0)$$



• Tabla de Derivadas

$F(x)$	$F'(x)$
K	0
x	1
$m.x+b$	m
x^n	$n.x^{n-1}$
$x^{\frac{m}{n}}$	$\frac{m}{n}.x^{\frac{m}{n}-1}$
e^x	e^x
$Ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sen(x)$
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$tang\, x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
a^x	$a^x . Ln\, a$
$Log\, x$	$\frac{1}{x}. Log\, e$

• $\boxed{\text{Sea } F \text{ derivable en } a \Rightarrow F \text{ es continua en } a}$

demo:

F derivable en $a \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a)$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\right).(x-a) = F'(a). \lim_{x\to a}(x-a)$$

$$\lim_{x\to a} F(x)-F(a) = F'(a).\ \emptyset = \emptyset \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a) \Rightarrow F \text{ es continua en } a$$

Si F es continua en a, no necesariamente es derivable en a.

$F'(a) \nexists$ cuando:
1. F es discontinua en a
2. F tiene tangente vertical en a ($F'(a)$ infinita)
3. F tiene pico o ángulo en a

Si F no es derivable en $a \Rightarrow a \notin D(F')$

Ejemplo:

$F(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad D(F) = \mathbb{R} \geq 1 \qquad \exists\ F(1) = \emptyset$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \qquad D(F') = \mathbb{R} > 1 \qquad \nexists\ F'(1)$ pues $1 \notin D(F')$

- **Propiedades**

Sean F y g derivables en $a \Rightarrow$

A • $(F+g)'(a) = F'(a) + g'(a)$

B • $(F.g)'(a) = F'(a).g(a) + F(a).g'(a)$

C • $\left(\dfrac{F}{g}\right)'(a) = \dfrac{F'(a).g(a) - F(a).g'(a)}{[g(a)]^2} \quad \forall\ g(a) \neq \emptyset$

D • $(k.F)'(a) = k.F'(a)$ Una constante que multiplica sale fuera

demo B)

$$(F.g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(F.g)(x+h) - (F.g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h).g(x+h) - F(x).g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h).g(x+h) - F(x+h).g(x) + F(x+h).g(x) - F(x).g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[F(x+h) - F(x)]}{h}$$

$$(F.g)'(a) = F(x).g'(x) + g(x).F'(x) = F'(x).g(x) + F(x).g'(x)$$

- **Regla de la Cadena**

NB cuando dentro del argumento se halle expresión diferente de la variable; dicha función puede considerarse compuesta. Como el caso de $F(-x) = F[g(x)]$, $F(x)$ $(-x)$; $x \xrightarrow{g} -x \xrightarrow{F} F(-x)$

• Sea g derivable en a, F derivable en $g[a] \Rightarrow F \circ g$ es derivable en a y:

$$\boxed{(F\circ g)'(a) = F'[g(a)].g'(a)}$$

demo: muy sofisticada para esta carpeta

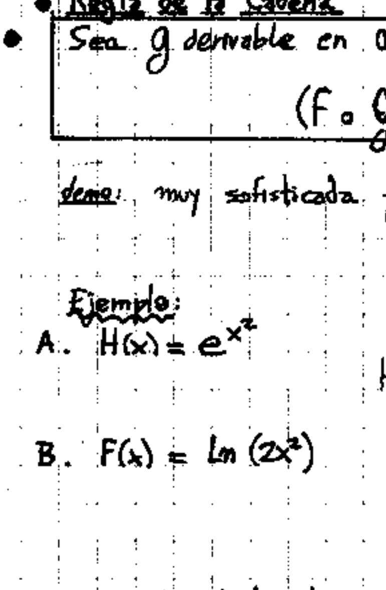
Ejemplo:

A. $H(x) = e^{x^2}$ $\quad H'(x) = \boxed{e^{(x^2)}.2x}$ $\quad H(x) = e^{(x^2)} = F\circ g(x) =$ (e^x, x^2)

B. $F(x) = \ln(2x^2)$ $\quad F'(x) = \dfrac{1}{2x^2}.4.x = \boxed{\dfrac{2}{x}}$

- **Derivadas Laterales**

Sea F definida en x_0. Entonces:



Derivada por la derecha de F en x_0 es:

$$F'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivada regresiva}$$

Derivada por la izquierda de F en x_0 es:

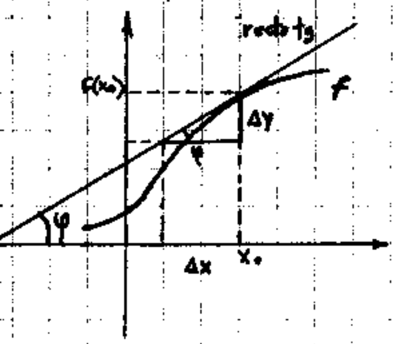
$$F'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivada progresiva}$$

• F definida en (a,b) que contiene a x_0, es diferenciable en $x_0 \Leftrightarrow$
$\exists\ F'_+(x_0) = F'_-(x_0) = L$ siendo $\Rightarrow L = F'(x_0)$ donde $L \in \mathbb{R}$ (Lar finita)

Es decir que para que exista derivada en un punto $(x_0, F(x_0))$ deben existir las derivadas laterales y ser iguales.

- **Tangente a una Gráfica**

La recta tangente al grafo de una función en un punto x_0 tendrá una pendiente m:



$$\boxed{m = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Pendiente de la tg de la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Luego podemos construir la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función en un punto $(x_0, f(x_0))$.

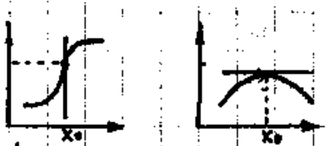
$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Forma punto-pendiente de la recta

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot \underbrace{x}_{x} - \underbrace{f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)}_{b}$$

$$y = m \cdot x + b$$



$\operatorname{tg}\varphi = \infty$ pendiente ∄ $f'(x_0) = \pm\infty$

$\operatorname{Tg}\varphi = \emptyset$ $f'(x_0) = \emptyset$

Por un punto $(x_0, f(x_0))$ pasa sólo una recta de pendiente m. Obviamente para otros puntos $(x_1, f(x_1))$ de la gráfica de f la pendiente m puede variar, aunque la regla de definición, $f'(x)$, es la misma.

—NB— no confundir $f'(x_0)$ que es un valor fijo para cada x_0 con $f'(x)$ que es una función

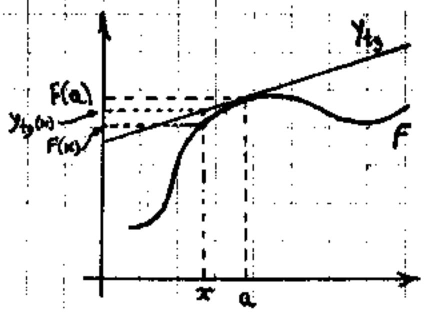
- **Pendientes**

Dos rectas $L_1 \wedge L_2$ son paralelas $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

Dos rectas $L_1 \wedge L_2$ son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

No confundir el gráfico de f' con la recta tg

• Aproximación Lineal



Dada una F diferenciable en un punto a, en un entorno de ese punto la F puede ser aproximada por el valor de la recta tangente (Y_{tg}) en dicho punto.

$$\boxed{Y_{tg} = F'(a).(x-a) + F(a)}$$

Si $x \to a$ (x cerca de a)

$$\boxed{F(x) \cong F'(a).(x-a) + F(a)} \qquad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

$$F(x) - F(a) \cong F'(a).x - F'(a).a$$

Luego, toda F derivable en un entorno de a se puede descomponer en la forma:

$$F(x) = \overbrace{Y_{tg(a)}}^{\text{Función lineal}} + \overbrace{r(x)}^{\to \text{ satisface } \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = \emptyset}$$

$$F(x) = Y_{tg(a)} + [F(x) - Y_{tg(a)}]$$

$r(x) = F(x) - Y_{tg(a)}$
$\quad = F(x) - F'(a)(x-a) + F(a)$
$r(x) = F(x) - F(a) - F'(a).(x-a)$
$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = \frac{F(x)-F(a)}{x-a} - F'(a)$

Ejemplo:

A. Calcular $\sqrt{4{,}0187}$ con la recta Tg

$f(x) = \sqrt{x}$
$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$F(4) = 2$

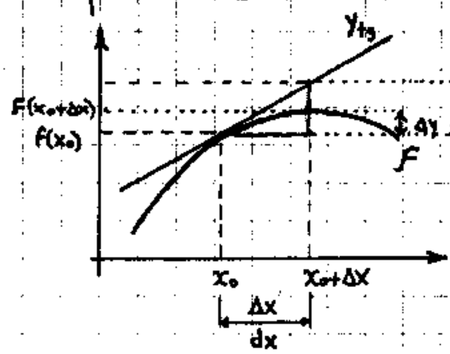
$$Y_{tg} = F'(a)(x-a) + F(a)$$

$$Y_{tg(4)} = \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

$$F(4{,}0187) \cong Y_{tg(4)} \qquad = \frac{4{,}0187}{4} + 1$$

$$2{,}0046695 \cong 2{,}004675 \qquad = \boxed{2{,}004675}$$

• Aproximación mediante Diferenciales



$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si $\exists\ F'(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - F'(x_0)\right| < \varepsilon$

Luego como:

$$\underbrace{\boxed{\Delta y = F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}}_{\text{incremento en } y \text{ de } F} \wedge \underbrace{\boxed{\Delta x = x - x_0}}_{\text{incremento en } x}$$

$\Rightarrow$ se define $dy = F'(x).\Delta x$ — diferencial de y

$dx = \Delta x$ — diferencial de x (incremento arbitrario)

Luego $\underbrace{F'(x)}_{\text{Pendiente Tg}} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\Delta x}$ y $\underbrace{m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Pendiente Sec}}$

$\Rightarrow$ Para Δx pequeños ($\Delta x \to \emptyset$) se mantiene $\Delta x \cong dy \Rightarrow$

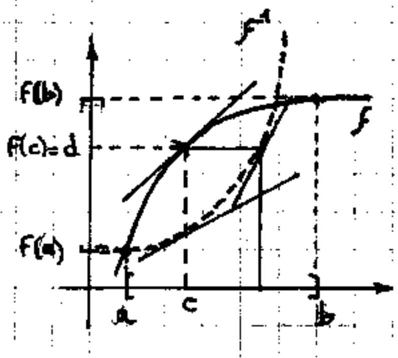
$$\Delta y \cong dy$$

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) \cong F'(x).dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x_0+\Delta x) \cong F'(x_0).\Delta x + F(x_0)}$$

Si se conoce el valor de $F(x_0)$ entonces podemos hallar el de $F(x_0+\Delta x)$ conociendo $F'(x_0)$

- **Derivada de las Funciones Inversas**

- Sea F continua y monótona en $[a,b]$ que contiene a c. Sea $F(c)=d$ y $F'(c)\neq 0 \ \forall c\in(a,b) \Rightarrow \ \exists \ (F^{-1})'(d)=\dfrac{1}{F'(c)} \qquad (F^{-1})'(F(c))=\dfrac{1}{F'(c)}$



$$(F\circ F^{-1})(x)=x=F[F^{-1}(x)]$$

$$(F\circ F^{-1})'(x)=F'[F^{-1}(x)].(F^{-1})'(x)$$

$$1=F'[F^{-1}(x)].(F^{-1})'(x)$$

$$(F^{-1})'(x)]=\frac{1}{F'[F^{-1}(x)]}$$

Las derivadas de dos funciones inversas son números recíprocos

F continua y monótona en $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \ F^{-1} \ [F(a),F(b)]\to[a,b]$

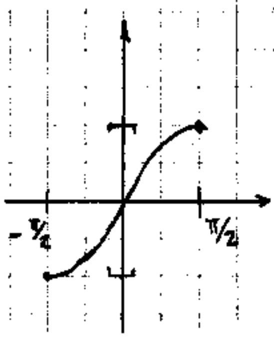
F continua y creciente en $[a,b] \Rightarrow F^{-1}$ es continua y creciente en $[F(a),F(b)]$

F continua y decreciente en $[a,b] \Rightarrow F^{-1}$ es continua y decreciente en $[F(b),F(a)]$

Ejemplo:

A. $F(x)=\operatorname{sen}(x)$

$F^{-1}(x)=\text{arco sen}(x)$



$$(F^{-1})'(x)=\frac{1}{F'[F^{-1}(x)]} \qquad \text{donde} \begin{cases} d=F(c) \\ c=F^{-1}(d)\end{cases}$$

$$(\text{ARCO sen}(x))'=\frac{1}{(\operatorname{sen}(x))'}$$

$$(\text{ARCO sen}(x))'=\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$$

$$(\text{ARCO sen}(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2[\text{ARCO sen}\,x]}}$$

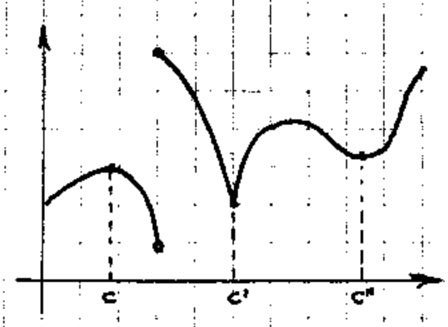
$$\boxed{(\text{ARCO sen}(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{(F^{-1})'(\underbrace{x}_{\text{Dominio de.}})=\frac{1}{F'[\underbrace{F^{-1}(x)}_{\text{función inversa de } F}]}}$$

- **Extremos Relativos de Funciones**

F tiene un Máximo relativo en c si $\exists\,(a,b)$ conteniendo a c : F está definida en (a,b) y : $F(c)>F(x) \quad \forall x\in(a,b)$

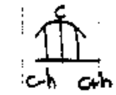
F tiene un mínimo relativo en c si $\exists\,(a,b)$ conteniendo a c : F está definida en (a,b) y : $F(c)<F(x) \quad \forall x\in(a,b)$



- $\boxed{\text{Sea } f \text{ definido en } (a,b) \text{ conteniendo a } c. \text{ Si } c \text{ es extremo relativo y si } \exists\, f'(c) \Rightarrow f'(c) = \emptyset}$

demo:

c extremo relativo $\Rightarrow f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \begin{array}{l} f(c) \geq f(c+h) \\ f(c) \geq f(c+h^-) \end{array}$

$\exists\, f'(c)$ 

$$\left.\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right\} \leq 0 = \left.\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right\} \geq 0$$

Como $\exists\, f'(c) \Rightarrow f'_+(c) = f'_-(c)$

$$0 \leq f'_-(c) = f'_+(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \emptyset$$

La inversa no vale necesariamente porque si $f'(c)$ es $\emptyset$ puede no ser extremo relativo

TEOREMA DE FERMAT

- $\boxed{\text{Sea } f \text{ derivable en } (a,b) \text{ y } c \in (a,b) \text{ es Max. o Min. local de } f \Rightarrow f'(c) = \emptyset}$

demo:

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0$$

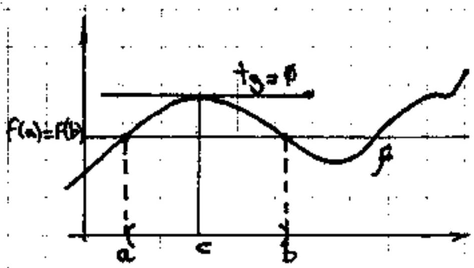
$$\left.\begin{array}{l} f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x) - f(c) \leq 0}{x - c < 0} \\ f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x) - f(c) \leq 0}{x - c > 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, f'(c) = \emptyset$$

No es válido en un $[a,b]$

TEOREMA DE ROLLE

- $\boxed{\text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \text{ y derivable en } (a,b): \; f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : f'(c) = \emptyset}$

Nótese que si $0 = f(a) = f(b)$ significa que el cero de la derivada se halla entre los ceros de la función

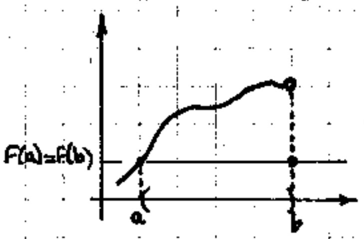


f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b): $f(a) = f(b)$

Por Bolzano-Weierstrass f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo.
Como $f(a) = f(b)$

los alcanza en los extremos $\Rightarrow f(x) = K \wedge f'(x) = \emptyset$

los alcanza en el interior $\Rightarrow$ x Fermat $f'(c) = \emptyset$.

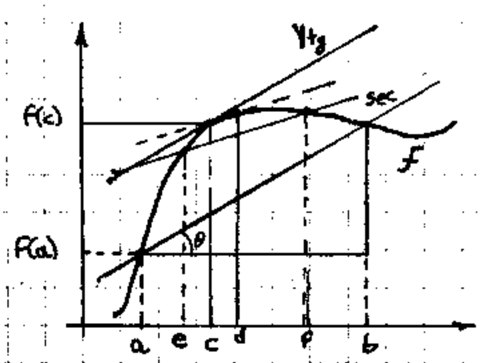


continua en $[a,b)$
derivable en (a,b)
No cumple Rolle

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE

- $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } f \text{ continua en } [a,b] \text{ y derivable en } (a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \qquad\qquad f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)\end{array}}$

No es necesario que b y a sean los extremos del intervalo (e,f) también tiene su d: $f'(d) \in (f(e), f(f))$



$$m_{sec} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$m_{sec} = \frac{f(f) - f(e)}{f - e}$$

la pendiente de la secante así determinada se convierte en m_{tg} al trasladarse y tocar a f en el punto c

(Otros valores internos a (a,b) producen otro valor d:
$$f'(d) = \frac{f(f) - f(e)}{f - e}$$

demo: sea $g(x) = F(x) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$ $g(x) \begin{cases} \text{continua en } [a,b] \\ \text{derivable en } (a,b) \end{cases}$

$g(a) = F(a) = \emptyset$ $g(b) = F(a) - \cancel{\ }$ $\Rightarrow$ $g(a) = g(b)$

Cumple Rolle $\Rightarrow \exists\ c \in (a,b) : g'(c) = \emptyset$

$$g'(c) = F'(c) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \emptyset \Rightarrow F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

COROLARIOS DEL TVM de LAGRANGE

- $\boxed{\text{Sea } F \text{ definida en } (a,b) : F'(x) = \emptyset \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow F(x) = K \ \forall x \in (a,b)}$

I ninguna un intervalo cualquiera

demo

si $F'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ derivable en (a,b)

$\Rightarrow F$ continua en $[a,b]$ $\quad 0 = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \Rightarrow F(b) = F(a)$ Rolle $\exists c : F'(c) = 0$

Como $\forall x \in (a,b)$ se cumple TVM $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)$ se cumple $0 = \frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1 - x_2}$

$\Rightarrow F(x) = K$ porque $F(x_1) = F(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in (a,b)$

- Sea $F'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow F$ es creciente en el I

Sea $F'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow F$ es decreciente en el I

demo

F derivable en $I \Rightarrow \exists c : F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ con $a < c < b \Rightarrow \underline{\emptyset < b-a}$

si $F'(c) > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > \emptyset \Rightarrow F(b) > F(a) \Rightarrow F$ creciente

si $F'(c) < 0 \Rightarrow F(b) - F(a) < 0 \Rightarrow F(b) < F(a) \Rightarrow F$ decreciente

- Sean F y g definidas en un $I \wedge F'(x) = g'(x) \ \forall x \in I \Rightarrow \exists c : F(x) = g(x) + c$

demo sea $H(x) = F(x) - g(x)$ derivable (suma de F y g derivables) y por ende continuas

$\Rightarrow H'(x) = F'(x) - g'(x) = \emptyset$ pues $F'(x) = g'(x)$

$\Rightarrow$ si $H'(x) = \emptyset \ \forall x \in I \Rightarrow H(x) = K \Rightarrow F(x) - g(x) = K$

$F(x) = g(x) + K$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO de CAUCHY

- Sean F y g continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b)

$$\Rightarrow \exists\ c \in (a,b) : [F(b) - F(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot F'(c)$$

$\wedge$ si $g'(c) \neq 0$ y $g(b) - g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}$

demo:

$H : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $H(x) = (F(b) - F(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot F(x)$

$H(a) = F(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot F(a)$

$H(b) = g(a) \cdot F(b) - F(a) \cdot g(b)$

$\Rightarrow H(a) = H(b) \Rightarrow$ x Rolle $\Rightarrow \exists c : H'(c) = \emptyset$

$H'(c) = (F(b) - F(a)) \cdot g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot F'(c)$

L'hôpital es útil en indeterminaciones $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ incluso si $x \to \infty$

• Teorema de L'hôpital

• Sean F y g derivables en un $V_{(c,\varepsilon)}$: $f(c) = g(c) = \emptyset \wedge \exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

demo. por TVM Cauchy se tiene

$$\frac{f'(a+th)}{g'(a+th)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} \qquad \forall\ 0<t<1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+th)}{g'(a+th)} = \frac{F'(a)}{g'(a)}$$

Ejemplos

A. $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{4}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{\to 0}{e^{\frac{4}{x}}}}{\underset{\to 0}{x}} \underset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{4}{x}}(-4)}{1 \cdot x^2}$

si se sigue en este proceso se complica el límite.

se pasa de $0/0$ a ∞/∞

$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{4/x}}} \underset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}{-\frac{\cancel{e^{4/x}}(-4)}{(e^{4/x})^{\cancel{2}}\cancel{x^2}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\frac{4}{e^{4/x}}}$

$= \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot e^{\frac{4}{x}} = \boxed{0}$

NB

Invertir la indeterminación (de $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ o viceversa) puede ayudar en límites por L'hôpital puesto que algunos límites no salen por $0/0$ o por ∞/∞.

B. $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \boxed{\emptyset}$

C. $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \boxed{+\infty}$

Diferenciación Implícita

Dada una ecuación puede pensarse que define a y en términos de x aunque no pueda despejarse porque pueden $\exists$ una o más funciones tales que si $y = F(x) \Rightarrow$ la ecuación se satisface.

En este caso la función esta definida implícitamente y se puede derivar implícitamente: se derivan ambos miembros respecto a x y se despeja dy/dx.

Ejemplos

A. $x^3 + y^3 = 9$

$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}9$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -3x^2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}}$$

$\frac{d}{dx}y^3$ $\quad F(x) = g(f(x))$

B. $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$

$$\frac{d}{dx}3x^4y^2 - \frac{d}{dx}7xy^3 = \frac{d}{dx}4 - \frac{d}{dx}8y$$

$$12x^3 y^2 + 3x^4 \cdot 2y\frac{dy}{dx} - 7y^3 - 7x3y^2\frac{dy}{dx} = 0 - 8 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$3x^4 2y\frac{dy}{dx} - 7x3y^2\frac{dy}{dx} + 8\frac{dy}{dx} = -12x^3y^2 + 7y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3x^4 2y - 7x3y^2 + 8\right) = -12x^3y^2 + 7y^3$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}}$$

$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{3x^4 \cdot y^2}_{\text{producto}}\right)$

C. $\operatorname{sen}(y) = y \cdot \cos(2x)$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(y) = \frac{d}{dx}(y) \cdot \cos(2x)$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \cos(2x) + y \cdot (-\operatorname{sen}(2x)) \cdot 2$$

$$\cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} - \cos(2x) \cdot \frac{dy}{dx} = -2 \cdot y \cdot \operatorname{sen}(2x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2y \cdot \operatorname{sen}(2x)}{\cos y - \cos 2x}}$$

Pendiente de Funciones Parametrizadas

Siendo una función dada por las ecuaciones paramétricas:

$x = f(t)$ $\quad y = g(t)$; f, g funciones derivables que definen una curva C

La pendiente de una tg a C es $\frac{dy}{dx}$:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

con $f'(t) \neq 0$

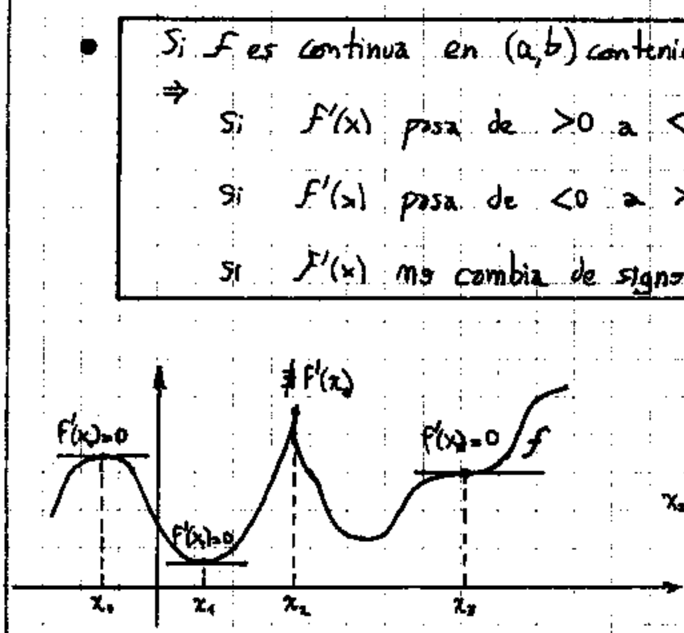
• Estudio de Funciones

1. Obtención de puntos críticos

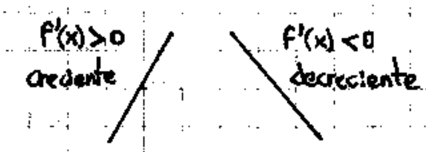
- $\boxed{\text{Si } c \in D(f) \text{, } c \text{ es punto crítico de } f \Leftrightarrow \begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ f'(c) \nexists \end{array}}$

2. Armado de Intervalos de crecimiento y de decrecimiento y búsqueda de posibles máximos y mínimos locales

- Si f es continua en (a,b) conteniendo a c ; $\wedge$ $\exists$ $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ salvo quizá c
  $\Rightarrow$
  Si $f'(x)$ pasa de >0 a <0 en un $V_{(c,\varepsilon)} \Rightarrow f$ tiene máximo en c
  Si $f'(x)$ pasa de <0 a >0 en un $V_{(c,\varepsilon)} \Rightarrow f$ tiene mínimo en c
  Si $f'(x)$ no cambia de signo en un $V_{(c,\varepsilon)} \Rightarrow f$ no tiene máx. ni mín. en c



x_3 no es extremo
x_2, x_0 máximos
x_1 mínimo



Si f es derivable en (a,b) $\wedge$ si $c \in (a,b)$ $\Rightarrow$

si $f''(c) > 0$ el grafo de f es cóncavo hacia arriba en $(c, f(c))$
si $f''(c) < 0$ el grafo de f es cóncavo hacia abajo en $(c, f(c))$

Si c es : $f''(x) < 0$ con $x<c$ $\wedge$ $f''(x) > 0$ con $x>c$ ó
$f''(x) > 0$ con $x<c$ $\wedge$ $f''(x) < 0$ con $x>c$
$\Rightarrow$ c es punto de inflexión.

En el punto de inflexión el gráfico de f cambia la concavidad

Sea $c \in D(f)$: $f'(c) = 0$ $\wedge$ $\exists$ $f''(c) \neq 0$ $\Rightarrow$

si $f''(x) > 0$ f tiene un mínimo relativo en c
si $f''(x) < 0$ f tiene un máximo relativo en c

- Polinomio de Taylor

Dada una $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se busca hallar un $P(x)$ que aproxime a F cerca de un x_0 tanto como se quiera.

$$\boxed{F(x) = P(x) + R(x)} \Rightarrow F(x) \cong P(x) \text{ si } R(x) \to \emptyset$$

Puede contener operaciones trascendentes — Contiene operaciones algebraicas

— Polinomio de Taylor de grado n de F en el número a (aproxima valores funcionales)

$$P_n(x_0) = \frac{F^{0}(a).(x_0-a)^0}{0!} + \frac{F'(a).(x_0-a)}{1!} + \frac{F''(a).(x_0-a)^2}{2!} + \frac{F'''(a).(x_0-a)^3}{3!} + \dots + \frac{F^{n}(a).(x_0-a)^n}{n!}$$

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{k}(x_0).(x-x_0)^k}{n!}$$

— Polinomio de Taylor de grado n de F (aproxima funciones)

$$P_n(x) = \frac{F^{0}(a).(x-a)^0}{0!} + \frac{F'(a).(x-a)}{1!} + \frac{F''(a).(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{F^{n}(a).(x-a)^n}{n!}$$

$F^{0}(a) = F(a)$

- Polinomio de Maclaurin

Cuando se toma $a = \emptyset$ se obtiene dicho polinomio

$$\boxed{P_n(x_0) = F^{0}(a) + \frac{F'(a).x_0}{1!} + \frac{F''(\emptyset).x_0^2}{2!} + \frac{F'''(\emptyset).x_0^3}{3!} + \dots + \frac{F^{n}(\emptyset).x_0^n}{n!}}$$

Polinomio de Maclaurin de grado n de F en x_0

$$\boxed{P_n(x) = F^{0}(\emptyset) + \frac{F'(\emptyset).x}{1!} + \frac{F''(\emptyset).x^2}{2!} + \frac{F'''(\emptyset).x^3}{3!} + \dots + \frac{F^{n}(\emptyset).x^n}{n!}}$$

Polinomio de Maclaurin de grado n de F

- Expresión del Resto de Lagrange

Si F es $(n+1)$ veces derivable en $(d,b) \Rightarrow F^{n}$ es continua en $[d,b] \Rightarrow$ si $a \in [d,b]$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{F^{n+1}(\xi).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con} \quad a < \xi < x$$

Ejemplos

A. $F(x) = \text{sen}(x)$ orden 5 Maclaurin

$F(x)$
$F'(x) = \cos x$
$F''(x) = -\text{sen}\, x$
$F'''(x) = -\cos x$
$F^{IV}(x) = \text{sen}\, x$
$F^{V}(x) = \cos x$

$$P_5(x) = 0 + 1.x + \frac{0.x^2}{2!} - \frac{1.x^3}{6} + \frac{0.x^4}{24} + \frac{1.x^5}{120}$$

$$\boxed{P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

B. $F(x) = e^x$ orden 5 Maclaurin

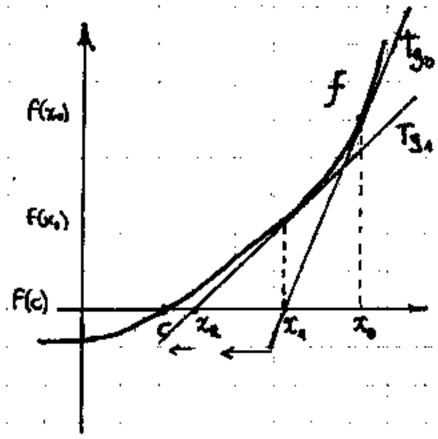
$F^{n}(x) = e^x$

$$\boxed{P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}}$$

33

• **Método de Newton-Rapshon**

Permite obtener en ciertos casos aproximaciones sucesivas a la raíz c de una ecuación a partir de un valor cercano y empleando sucesivas rectas tangentes.



Para ello se escoge arbitrariamente (luego de examinar un bosquejo del grafo de F) un x_0 próximo a c, se calcula un Tg_0 de pendiente $F'(x_0)$. Dicha Tg_0 intersecа al eje x en el punto x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \qquad \text{si } F'(x_0) \neq 0$$

Repitiendo el procedimiento se produce la recurrencia

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}} \qquad \text{si } F'(x_n) \neq 0 \ \forall n$$

donde x_n converge a una raíz de F. Este método no es aplicable cuando $F'(x_n) = 0$ para alguna aproximación.

Cuando x_n es raíz se dará $F(x_n) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n$. Luego, cuando dos aproximaciones sucesivas son iguales se tiene una aproximación del cero de F.

Si dos aproximaciones sucesivas son iguales hasta la n cifra decimal se dice que el valor del cero está dado con n cifras significativas.