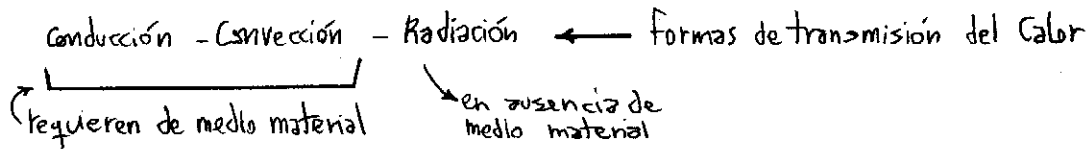


● Radiación del cuerpo Negro



Radiación Térmica: es radiación EM

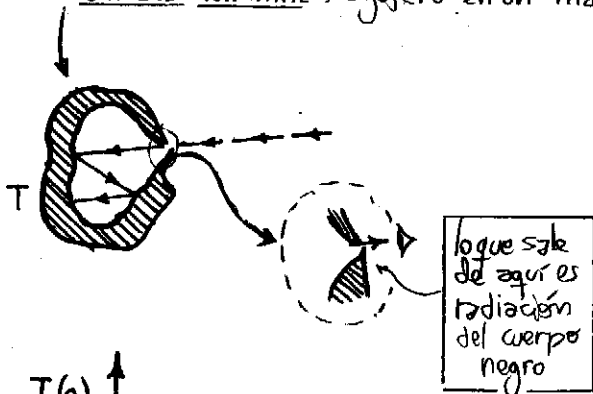
Todos los cuerpos ^[con T > 0] emiten y absorben radiación térmica continuamente. En general casi el 90% de dicha radiación se halla en el IR. La explicación de la radiación con la TD fallaba.

Cuando un cuerpo emite, aunque se observe preferentemente un color en realidad abarca todo el espectro de frecuencias (con predominancia de ese color)

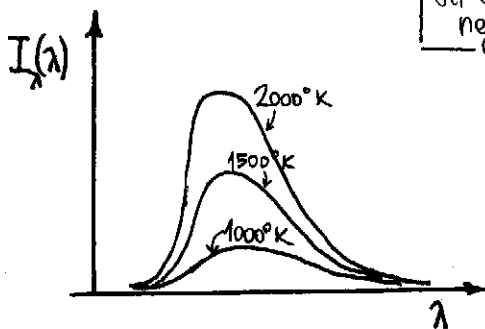
CAVIDAD RADIANTE: agujero en un material ^{hueco} en equilibrio a temperatura T.

CUERPO NEGRO: objeto en equilibrio a temperatura T que absorbe todo lo que recibe y no refleja.

La cavidad radiante es un modelo de cuerpo negro, porque prácticamente de todo lo que entra no sale nada.



Se suele estudiar la radiación con:



$I_\lambda(\lambda)$ → radiancia espectral, definida de modo que:

$I_\lambda(\lambda) d\lambda$ → es la Energía emitida por unidad de área por unidad de tiempo en el intervalo de $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

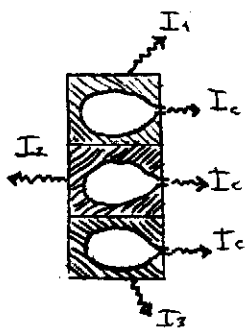
$$I_T = \int_0^\infty I_\lambda(\lambda) d\lambda$$

$$I_\lambda(\lambda) = \frac{J}{cm^2 \cdot seg}$$

Radiancia (potencia por unidad de área total) ~ densidad de potencia

Cada cuerpo tiene una familia de curvas similar para cada T. En general depende de las características del cuerpo [composición]

Pero existe un cuerpo ideal con radiancia máxima, independientemente de su composición: es una cavidad radiante:



La radiación de cavidad I_c es igual para toda sustancia componente del cuerpo y es mayor que las I_e y I_i sup. externa

* Para cualquier sustancia I de la cavidad es idéntica a T fijo

* La I de la cavidad es mayor que la exterior para toda sustancia, forma y volumen de la cavidad.

constante de Stefan-Boltzmann

Ley de Stefan-Boltzmann

$$I_{cav} = \sigma \cdot T^4$$

← Para una cavidad radiante o cuerpo negro

$$I = \sigma \cdot e \cdot T^4$$

← Para cualquier cuerpo que emite

emisividad $e = \frac{E_{emitida}}{E_{incidente}}$
(depende de la sustancia y la temperatura)

Entonces por ley de Kirchoff (el mejor emisor = el mejor absorbente) la cavidad radiante es un buen ejemplo de cuerpo negro [e=1]

La I_λ debe ser la misma en todos los puntos de la cavidad

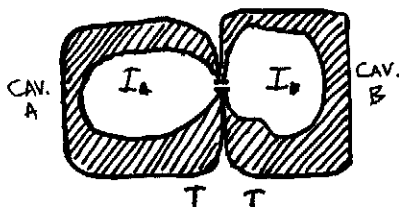
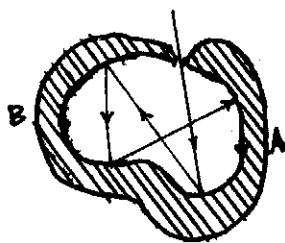
Sea que $I_A \neq I_B \rightarrow$



Produce W sin cambio en el entorno \Rightarrow NO KELVIN

si $I_A \neq I_B \Rightarrow$ un bloque comenzaría a calentarse y otro a enfriarse sin cambio en los alrededores lo cual viola la 2^a Ley. $\Rightarrow I_A = I_B$

Vale para toda λ y para el total.



• Densidad de energía espectral

Se estudia la radiación de cuerpos negro estudiando la radiación de cavidades radiantes en términos de densidades de energía

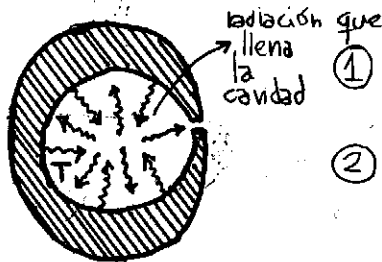
$$u_\nu = \frac{U}{V}$$

con $u_\nu(\nu) \cdot d\nu$ ó $u_\lambda(\lambda) \cdot d\lambda$ Energía por unidad de volumen por unidad de tiempo en el rango $(\nu, \nu+d\nu)$

$$u = \int_0^\infty u(\nu) \cdot d\nu, \text{ con } u = u(T)$$

$u_\lambda \cdot d\lambda \rightarrow$ densidad de energía espectral

$$u_\nu(\nu) \propto I_\nu(\nu)$$



- ① Buscamos derivación teórica de $u = u(T)$
- ② Buscamos derivación teórica de $u_\nu = u(\nu)$ [densidad espectral]

① Querremos construir a partir de la TD \oplus EM una forma para $u(T)$

Desde el EM \rightarrow Presión de Radiación $\rightarrow p = \frac{1}{3} u$

Ahora usando termodinámica clásica se tiene:

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV$$

$$u = \frac{U}{V} \rightarrow du = \frac{dU}{V} - \frac{U \cdot dV}{V^2} \rightarrow V \cdot du + \frac{U}{V} \cdot dV = dU \rightarrow V \cdot du + u \cdot dV = T \cdot dS - p \cdot dV$$

$$\frac{V \cdot du}{T} + \frac{(u+p) \cdot dV}{T} = dS$$

$$SP \rightarrow \frac{V}{T} \cdot du + \frac{4/3 u}{T} \cdot dV = dS$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)_V = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_u$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \right)_u = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{4/3 u}{T} \right)_V \rightarrow \frac{1}{T} + \frac{-1V \cdot \partial T}{T^2 \cdot \partial V} = \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{T} - u \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial u} \right]$$

Las radiaciones absorbidas por un cuerpo se convierten en su interior en calor

Notas & Definiciones

absortividad $a = \frac{U_{abs.}}{U_{inc.}}$

reflectividad $r = \frac{U_{refl.}}{U_{inc.}}$

$a + r = 1$

Para cuerpo negro $e = a = 1$
 $r = 0$

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$u(\omega) \rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot d\lambda$

$d\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \cdot d\lambda$

$$\frac{1}{T} - \frac{V}{T^2} \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u = \frac{4}{3} \frac{1}{T} - \frac{4}{3} \frac{u}{T^2} \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u$$

$$\frac{1}{T^2} \left(\frac{4}{3} u \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u - V \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{T}$$

pero $u = u(T) \rightarrow$
si T de. \rightarrow
 u de

$$\left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_V \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial V} = 0$$

$$\frac{4}{3} \frac{u}{T^2} \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u = \frac{1}{3} \frac{1}{T}$$

$$\frac{4}{T^2} \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_u = \frac{\partial u}{\partial V} \Big|_u$$

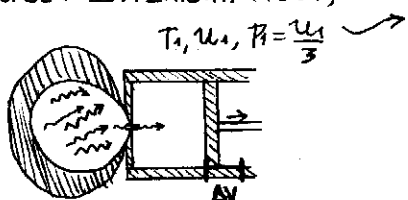
$$\ln(T^4) = \ln(u)$$

Ley de Stefan-Boltzmann
[da $u = u(T)$]

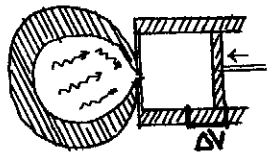
$$u = A \cdot T^4$$

\leftarrow A constante (la TD no nos permite conocerla)

Se puede llegar a lo mismo a través de un ciclo de Carnot con radiación de cavidad como fluido. Boltzmann (1884).



La isoterma es una isobara pues
 $T_1 \Rightarrow u_1 \Rightarrow P_1$
 $T_2 \Rightarrow u_2 \Rightarrow P_2$



expansión isotérmica

$$(i) \quad dQ = T \cdot dS = V \cdot du + \frac{4}{3} T^4 A \cdot dV$$

$$dQ = A \cdot T^3 \cdot dT + \frac{4}{3} A T^4 \cdot dV$$

$$dQ_{iso} = \frac{4}{3} A T^4 \cdot dV$$

$$u = A \cdot T^4$$

$$du = 4 \cdot A \cdot T^3 \cdot dT$$

$$\Delta u = \frac{4}{3} \frac{u \cdot \Delta T}{T}$$

$$Q_{iso} = \frac{4}{3} A T^4 \cdot \Delta V = \frac{4}{3} u_1 \cdot \Delta V ; W_{iso} = -P_1 \cdot \Delta V$$

(ii) adiabáticas

$$W_{Ad} = \Delta U_{Ad}$$

$$(iv) \quad W_{Ad} = -\Delta U_{Ad}$$

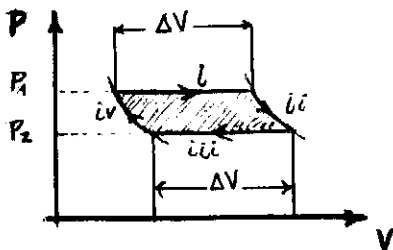
(iii) compresión isotérmica

$$Q_{iso} = \frac{4}{3} u_2 \cdot \Delta V$$

$$\text{con } \Delta u_{iii} = -\Delta u_i$$

$$\Delta W = W_{iso} = \frac{4}{3} (u_1 - u_2) \cdot \Delta V$$

$$\eta = \frac{(4/3)(u_1 - u_2) \cdot \Delta V}{(4/3)u_1 \cdot \Delta V} = \frac{\Delta u \cdot \Delta V}{u_1 \cdot \Delta V} = \frac{4u \cdot \Delta T}{u_1 T}$$



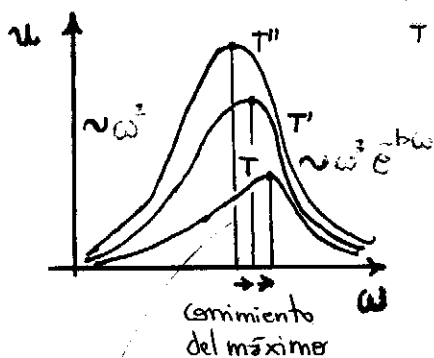
Las partes adiabáticas no aportan. Entonces (ii) y (iv) casi ni me preocupan

$$\Delta u = 4u \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{\Delta u}{u} = 4 \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

$$\frac{du}{u} = 4 \cdot \frac{dT}{T} \Rightarrow u = A \cdot T^4$$

(2) Acá en la densidad de energía espectral es donde empieza a ser necesaria una nueva física. Experimentalmente se podía ver que:



$$* \quad u(\omega) \sim \omega^2$$

Ley de Rayleigh-Jeans [Bajas ω]

$$* \quad u(\omega) \sim \omega^3 \cdot e^{-b\omega}$$

Ley de Wien [1893] [Altos ω]

$$* \quad \omega_m \sim T$$

Ley de desplazamiento de Wien

$$\lambda_m \sim \frac{1}{T}$$

vmd dibujador



Pasamos de una descripción en términos de

$$I_{\lambda}(\lambda) \longrightarrow u_{\lambda}(\lambda)$$

$$I_{\omega}(\omega) \longrightarrow u_{\omega}(\omega)$$

radiancia = flujo de energía espectral

densidad de energía espectral

$$\frac{U}{A \cdot t}$$

↓ área

$$\frac{U}{V \cdot t}$$

↓ Volumen

● Ley de Wien [1893]

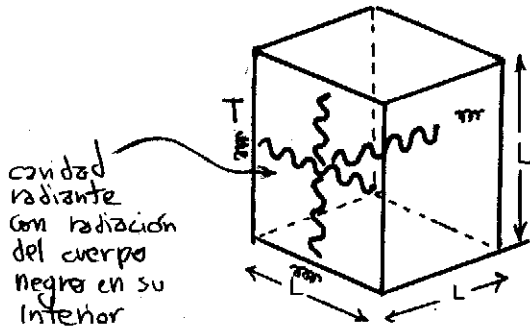
$$u_{\lambda}(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$

alguna función de λT

funciona en las altas ω [bajas λ]

● Rayleigh & Jeans

Las cargas en las paredes a T del CN son la fuente de la radiación. C/u de ellas oscila y radia a la frecuencia de oscilación. Podemos pensar en un átomo como un oscilador armónico.



$$V = L^3$$

Consideramos una caja metálica en equilibrio a T. La radiación serán ondas estacionarias con nodos en las paredes.

$$u_{\lambda} d\lambda = \frac{\# \text{ ondas en } (\lambda, \lambda+d\lambda) \cdot E \text{ promedio de una onda}}{V}$$

* Onda estacionaria:

$$E(x,t) = A \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \cdot \text{cos}(\omega t)$$

nodos en las paredes

$$k_x \cdot L = n\pi$$

$$\frac{\omega}{c} L = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = n\pi$$

$$L \frac{2\pi \nu}{c} = n\pi$$

$$n_x = \frac{2L}{\lambda_x}$$

$$n_x = \frac{2L \cdot \nu}{c}$$

$$n_x = \frac{L}{\pi \cdot c} \cdot \omega$$

La frecuencia es la misma para todas las ondas

Luego, una ν permitida será cualquier punto en el volumen n_x, n_y, n_z con la condición [1].

$$\# \text{ de frec. en } (\nu, \nu+d\nu) = \frac{8\pi \cdot V \cdot \nu^2 \cdot d\nu}{c^3} = n(\nu) \cdot d\nu$$

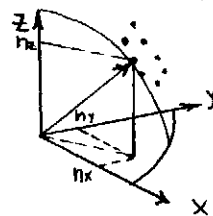
$$\# \text{ de frec. en } (\omega, \omega+d\omega) = \frac{V \cdot \omega^2 \cdot d\omega}{\pi^2 \cdot c^3} = n(\omega) \cdot d\omega$$

$$2\pi\nu = \omega$$

$$[1] \quad n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

$$n^2 = \left(\frac{2L}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2L}{\lambda_y}\right)^2 + \left(\frac{2L}{\lambda_z}\right)^2$$

$$n^2 = 3 \left(\frac{2L \cdot \nu}{c}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4L^2 \cdot \nu^2}{c^2}$$



Con el vínculo [1] es una esfera en $n_x, n_y, n_z \Rightarrow$ densidad de puntos

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi n^2 \cdot dn}{\dots}$$

↓ Volumen de diferencia

$$n = \left(\frac{2L}{c}\right) \nu$$

$$n^2 = \frac{8L^2}{c^2} \nu^2$$

$$\int n^2 dn = \int \frac{8L^2}{c^2} \nu^2 d\nu \Rightarrow \# = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8 \cdot V \cdot \nu^2 \cdot d\nu}{c^3}$$

multiplicas $\otimes 2$ debido a la polarización

$$\frac{\pi n^2 dn}{2}$$

tengo solo un octante

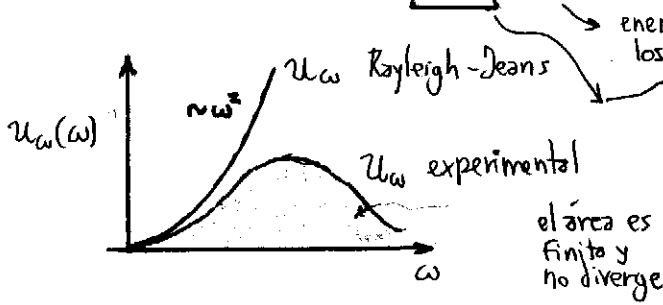
Usando FMB se llega a que:

$\langle E \rangle$ de cada onda estacionaria de frecuencia ν es

$$\langle E \rangle = k.T \quad \leftarrow \text{equipartición de la energía}$$

Es la energía promedio de un oscilador en un baño térmico T

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} u_\nu(\nu) \cdot d\nu &= \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) (kT) d\nu \\ u_\omega(\omega) \cdot d\omega &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (kT) d\omega \end{aligned} \right. \Rightarrow u_r(T) = \int_0^\infty \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \rightarrow \text{diverge cuando debería ser finita}$$



energía promedio de los osciladores con ν ondas en las frec $\omega, \omega+d\omega$

funciona para bajas ω

CATÁSTROFE UV

El espectro de R&J es consecuencia directa de las ideas de la física clásica.

Falla $\langle E \rangle = k.T$ para toda frecuencia ω

Postulado de Planck

En 1901 Planck postula que:

Cualquier entidad que efectúa oscilaciones armónicas simples SOLO puede tener una energía

$$E = nh\nu$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

donde $h \equiv$ constante de Planck.

Luego, usamos otra vez FMB \Rightarrow

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot f_{MB} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} nh\nu \cdot A \cdot e^{-\frac{nh\nu}{kT}} \quad \oplus \quad \text{con } E = nh\nu$$

algunas constantes \oplus esto es una serie geométrica y se sumarla

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\omega}{2\pi \cdot [e^{\frac{h\omega}{2\pi kT}} - 1]} = \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} = \langle E \rangle \quad \leftarrow \langle E \rangle = \langle E \rangle(\omega) \text{ es función de la frecuencia}$$

$$\Rightarrow u_r(T) = \int_0^\infty \frac{\omega^3 h \cdot d\omega}{\pi^2 c^3 \cdot (e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1)}$$

converge y se pega a la curva experimental el integrando.

Remark

<p>$E=0$</p>	<p>$E = 4h\nu$ $E = 3h\nu$ $E = 2h\nu$ $E = h\nu$ $E = 0$</p>
<p>idea clásica</p> <p>un oscilador armónico puede tener cualquier energía</p>	<p>idea Planck</p> <p>un oscilador armónico solo puede tener una energía que salta en valores discretos</p>

\oplus clásicamente

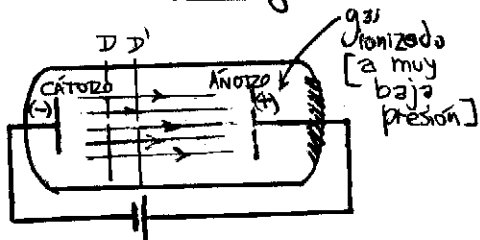
$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \iint d^3r \cdot d^3p \cdot f_{MB}(\vec{r}, \vec{p})$$

$$\langle E \rangle = kT$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

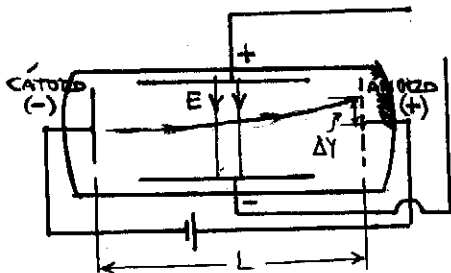
$$f_{MB} = A \cdot e^{-\beta \cdot E} \quad \leftarrow \begin{matrix} \frac{p^2}{2m} & \text{clásico} \\ nh\nu & \text{cuántico} \end{matrix}$$

● Descarga en Gases



El gas ionizado conduce una corriente entre cátodo y ánodo; pero además se observa mancha luminosa que se produce por partículas que abandonan el cátodo. Si se colocan diafragmas D, D' se ve que son corpúsculos los que forman la mancha.

● Experimento de Thomson



Al colocar un campo se ve que las partículas se tuercen en su recorrido \Rightarrow son partículas con carga negativa. Se las llamó rayos catódicos.

Thomson evaluó el cociente q/m

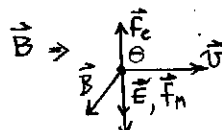
$$\Delta Y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} \right) \left(\frac{L}{v} \right)^2$$

aceleración tiempo de tránsito

datos: E, L

* Para (v)

Coloca un campo $\vec{B} \Rightarrow$
En un momento el haz no se desvía



$f_e = f_m \Rightarrow$

$$q \cdot E = \frac{v \cdot B}{c} \cdot q \rightarrow \boxed{v = \frac{cE}{B}}$$

Los rayos catódicos son emitidos por el bombardeo del cátodo debido a los iones + del gas contenido en el tubo.

$$\boxed{\frac{q}{m} = 1,76 \cdot 10^8 \frac{C}{g}}$$

Para toda material del cátodo \Rightarrow

Son partículas básicas de la materia

● Experimento de Millikan

Si ponemos un campo en un medio viscoso con gotas se puede suspender gotas de aceite; porque estas atrapan carga eléctrica \Rightarrow

$$\boxed{qE = M \cdot g} \leftarrow \text{implica suspensión en el medio}$$

Peso equilibrado con la fuerza viscosa

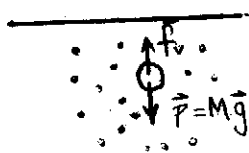
Para calcular M (terminal) de la

sacamos el campo y medimos v (velocidad caída) contra el medio viscoso.

$$\boxed{M \cdot g = 6\pi \eta a v} = g \frac{4}{3} \pi a^3 \rho = 6\pi \eta a v$$

$$a = \left(\frac{9 \cdot \eta \cdot v}{2 \rho \cdot g} \right)^{1/2}$$

esto implica caída con velocidad constante

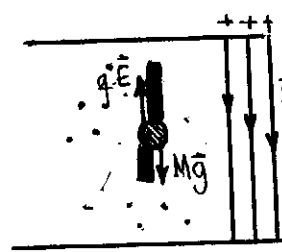


La gota cae con v

fuerza viscosa [Ley de Stokes]

viscosidad del medio

La v se mide con microscopio \Rightarrow



La gota está suspendida (si carga es -)

Ahora metemos campo \vec{E}

gotita cae con v' si (carga es +)

$$qE - M \cdot g = 6\pi \eta a v'$$

$$6\pi \eta a v = 6\pi \eta a v'$$

$$q = \frac{6\pi \eta a (v' + v)}{E}$$

nueva velocidad de arrastre

Los resultados para diferentes gotas dan múltiplos enteros de una

unidad fundamental e de modo que:

$$\boxed{q = n \cdot e}$$

con $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$; $n \in \mathbb{N}$

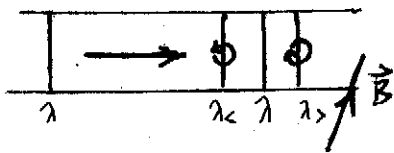
\Rightarrow e debe ser la carga elemental

Usando el resultado de Thomson para q/m se tenía:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

● Efecto Zeeman

Observando líneas espectrales en algunos átomos Zeeman nota que si el emisor se ubica en un campo \vec{B} la línea se desdobra.



EL agente emisor de la radiación es sensible al campo \vec{B} .

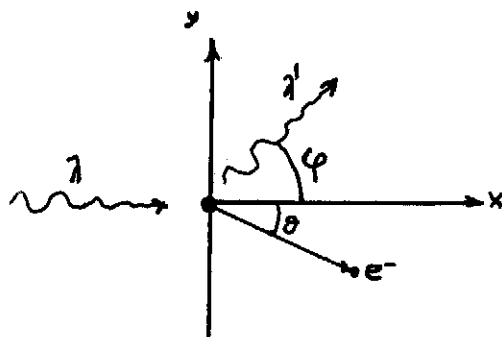
Lorentz postula que la radiación se origina por dipolos oscilantes.

Por ejemplo un e^- oscilante en torno a su posición de equilibrio. Lorentz usará el modelo atómico de Thomson.

● Efecto Compton [1923]

Dispersando rayos X Compton notó que cambiaba la λ de los mismos. La λ' dispersada variaba con el ángulo, pero era la misma para diferentes láminas metálicas.

Se necesitan V altos para lograr apreciar el efecto



$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

$$\begin{cases} E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

↑ para el e^-

$$\begin{cases} E = c \cdot p \\ \frac{h\nu}{c} = p \end{cases}$$

↑ Para los fotones

Utilizando conservación de la energía y el momento se llega a:

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \cos \varphi)$$

$\frac{h}{m_e \cdot c} \equiv$ long. de onda Compton

$$E_i: \quad c \cdot p_0 + m_0 c^2 = E_f: \quad c \cdot p' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lo que se hace es una analogía con choques mecánicos, y se infiere que ^{si} para el fotón $v=c$ y $E < \infty \Rightarrow m_0 = 0 \rightarrow$

$$p = \frac{E}{c}$$

Como la V de la radiación dispersada es indepte. del material, en la dispersión solo deben participar los e^- individuales, inicialmente en reposo.

• Espacio de fases & la acción

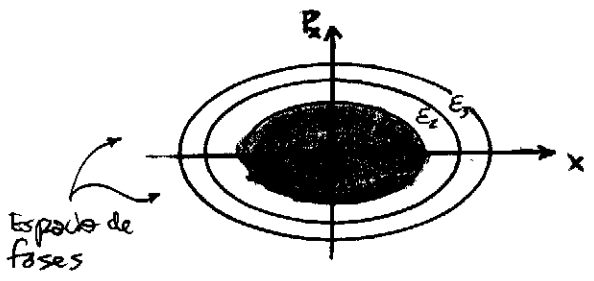
Energía de un oscilador en 1D $\rightarrow E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{x^2}{\frac{2}{m\omega^2}} \Rightarrow$

$(\frac{h}{m})^{1/2} \equiv \omega$

$1 = \frac{p_x^2}{[2mE]} + \frac{x^2}{[\frac{2E}{m\omega^2}]} = \frac{p_x^2}{p_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = 1$

con $\begin{cases} p_0 = \sqrt{2mE} \\ x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \end{cases}$

▲ elipse en el espacio de fases



* La acción

$S = \oint p_x dx = \text{area}$

$S = \oint \vec{p} \cdot d\vec{l}$ en 3D

$S = \pi x_0 p_0 = \pi \sqrt{2mE \cdot \frac{2E}{m\omega^2}} = \pi \frac{2E}{\omega}$

$dS = \frac{2\pi}{\omega} dE$

$\Delta S = S_{n+1} - S_n = \frac{2\pi}{\omega} \Delta E = \frac{1}{\omega} h \omega \Delta n \xrightarrow{\text{1 por ser n natural}}$

$S_{n+1} - S_n = h$

Entre órbitas consecutivas la diferencia en la acción vale $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

CLÁSICO	NUEVAS IDEAS
cualquier elipse está permitida	Las elipses posibles son las de ciertos E

Paso clásico a idea Planck

$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty dE \cdot E \cdot f_{MB}(E)$
 $\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^\infty n h \nu \cdot f_{MB}(n h \nu)$

N osciladores con E variando continuamente de 0 a ∞

N osciladores a frecuencia ν con E discreta

* LÍMITES

$u_\omega(\omega) = \frac{h \omega^3}{[e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1] \pi^2 c^3} \approx \frac{h \omega^3}{\pi^2 c^3 (\frac{h\omega}{kT} + (\frac{h\omega}{kT})^2 \frac{1}{2} + \dots)}$

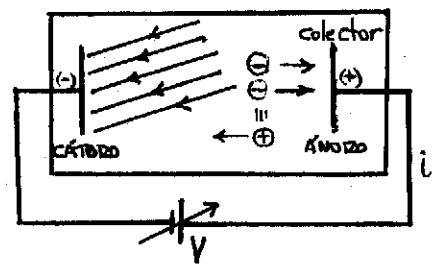
(A) $\frac{h\omega}{kT} \ll 1$ con ω baja $u_\omega(\omega) \approx \frac{h \omega^2}{\pi^2 c^3 \frac{h}{kT}} \sim \omega^2 \Rightarrow \boxed{u \sim \omega^2}$ Rayleigh-Jeans

(B) $\frac{h\omega}{kT} \gg 1$ con ω alta $u_\omega(\omega) \approx \frac{h}{\pi^2 c^3} \omega^3 e^{-\frac{h\omega}{kT}} \Rightarrow \boxed{u \sim \omega^3 e^{-b\omega}}$ Wien

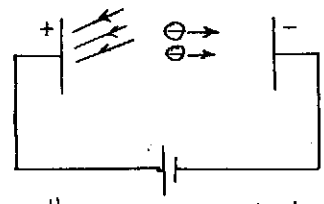
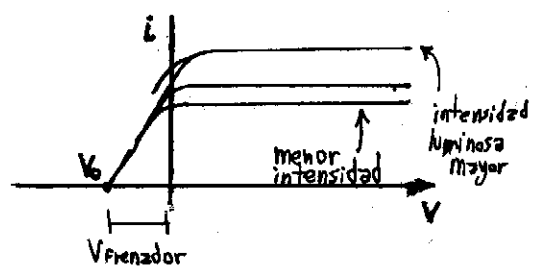
(C) $\frac{du}{d\omega} = 0 = \frac{(3\omega^2 e^{-\frac{h\omega}{kT}} - \omega^3 e^{-\frac{h\omega}{kT}} \frac{h}{kT})}{[e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1]^2} \rightarrow 3\omega^2 e^{-\frac{h\omega}{kT}} = \omega^3 e^{-\frac{h\omega}{kT}} \frac{h}{kT} \Rightarrow \frac{3kT}{h} = \omega_m \Rightarrow \boxed{\omega_m \sim T}$

Desplazamiento de Wien

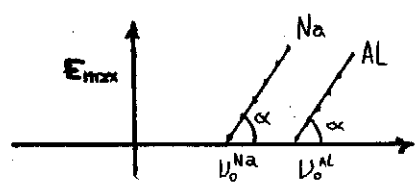
● Efecto fotoeléctrico



Al incidir luz sobre el cátodo se emiten electrones que generan una corriente i .
 Si $V > 0$ ($V_{\text{anodo}} > V_{\text{cátodo}}$) la i es independiente del potencial V
 Si $V < 0$ el ánodo repele a los electrones, pero aún hay corriente i . Es un V frenador o retardador.



Cada vez llegan menos electrones al colector. Hay un V_0 límite en el cual no llegan al colector ninguno de los electrones. Ese es el límite que define: y por ende $i=0$



$$E_{\text{MAX}}^{\text{CINÉTICA electrones}} = e \cdot V_0 = E_{\text{MAX}}$$

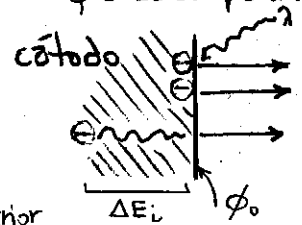
Estos serán los electrones más rápidos. Había cosas que no podían explicarse clásicamente:

- 1 La E_{MAX} no depende de la intensidad de la luz, sino del V_0 de corte
- 2 Existe V_0 umbral independiente de la intensidad de la luz. Debería haber emisión a cualquier V si la intensidad de la luz era suficiente
- 3 Debería haber retraso entre la absorción de la energía suficiente de la onda hacia el electrón como para emitirse. No se observa retraso en la emisión
- 4 La E_{MAX} tiene una dependencia lineal con V de pendiente igual a material del cátodo.

Einstein propone que la energía viaja en paquetes que son los cuantos de Planck. Al pasar de un estado energético al otro una fuente de luz emite cuantos (fotones) que portan energía $h\nu$. Los electrones del cátodo absorben un fotón y son emitidos. Entonces la máxima energía de un electrón del cátodo será:

$$E_{\text{MAX}} = h\nu - \phi_0$$

que se da para los superficiales; que no pierden E por colisiones en el interior. ϕ_0 es la función trabajo del material [≡ cuánta energía hay que darle al electrón para liberarlo de la superficie]



$$V_0 = \frac{h \cdot \nu - \phi_0}{e}$$

Esto acuerda con el experimento y soluciona 1. La "absorción" del fotón tipo choque provoca emisión inmediata y resuelve 3. Cuando $E_{\text{MAX}} = 0$ es el

uno interior cuesta arrancarlo ($\Delta E_i + \phi_0$)

NB

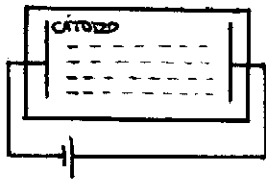
La intensidad de la luz I será \propto # de fotones \Rightarrow
 $I \propto i$ [con $V > 0$]
 Pues # fotones \propto electrones emitidos \propto corriente i

umbral \downarrow y es: $U_0 = \frac{\phi_0}{h}$ solución 2. La cuestión 1 se resuelve al usar que $E_{max} = E_{max}(V)$
 $h\nu_0 =$ Energía justa para liberar el electrón pero con $v=0$

efecto fotoeléctrico \Rightarrow *introducimos cuantización en la radiación
 * La luz es corpuscular en naturaleza (dual) además de ondulatoria

● Emisión Termoiónica

Al aumentar la temperatura del cátodo este puede emitir electrones espontáneamente, cuando la agitación térmica es ν del orden de ϕ_0 .



$$E \gg e\phi_0 = h\nu_0$$

$$E = T - e\phi_0$$

$$E_{min} = e\phi_0 = h\nu_0$$

umbral \rightarrow partir del cual empieza la emisión

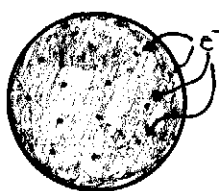
$$i_m = A \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{e\phi_0}{kT}} \leftarrow \text{Ley de Richardson}$$

Radiación de Cuerpo Negro \Rightarrow * La materia \uparrow irradia en forma discreta (osciladores)

Efecto fotoeléctrico + emisión termoiónica \Rightarrow * la luz se comporta corpuscularmente y su energía está cuantizada.
 El aspecto corpuscular explica sin problemas efecto fotoeléctrico y efecto Compton.
 La dualidad ha sido aceptada hoy en día.

● Modelos atómicos

La emisión de electrones (rayos catódicos y fotoeléctricos) lleva a pensar que son componentes de todos los átomos. Surge la imagen de la estructura del átomo. Como en el estado normal los átomos son neutros, deben tener una carga \oplus de igual magnitud que la de los e^- que contiene.

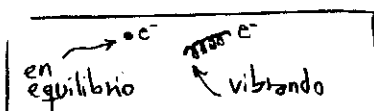


es como un budín en forma de bola

* Modelo de Thomson [budín con pasas de uva]

Los e^- están ubicados dentro de una distribución de carga \oplus ocupando una esfera que abarca todo el átomo.

Cuando el átomo está en equilibrio (energía mínima), los e^- están fijos; pero al excitarse oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio.

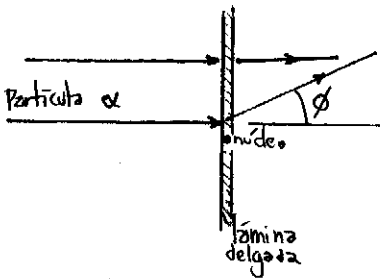
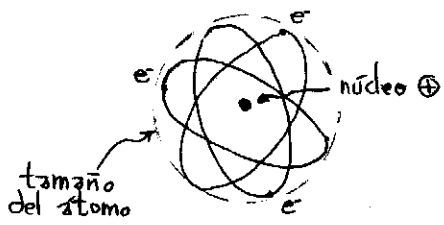


Este modelo es contrastada contra los experimentos de dispersión. Para ello se realiza un cálculo del ϕ_{max} de desvío para partículas α incidiendo sobre láminas metálicas delgadas.

El modelo predecía un # v. 0. de partículas dispersadas con un $\theta > 1^\circ$. El experimento mostraba una discrepancia alta. Era inexplicable con este modelo.

* Modelo de Rutherford [1911]

Rutherford, quien realizaba experiencias de dispersión, propone que toda la carga \oplus y por ende, casi toda la masa, se concentran en un núcleo pequeño. Con este esquema realiza el cálculo del σ_{max} y la distribución teórica aproximó bien a la experimental. Dicho cálculo usa física no relativista e interacción coulombiana entre dos partículas puntuales. Permitieron estimar asimismo el radio del núcleo.



* Inestabilidad del átomo

El modelo de Rutherford propone e orbitando un núcleo cual un sistema solar (lo que sería estable)

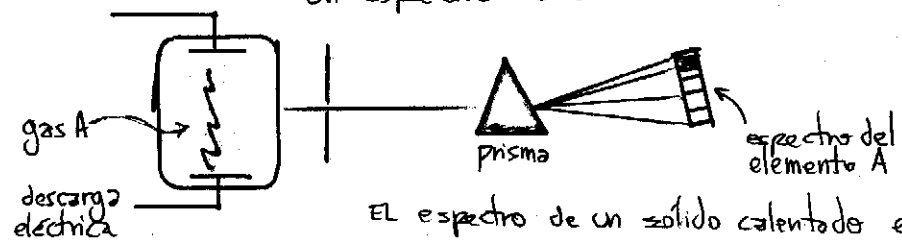
[un e- en reposo cae al núcleo => colapsa el átomo]. Tiene dificultades:

- ① Debido a EM se sabía que un e- acelerado emite energía => en órbita circular emitirían constantemente a costa de su energía mecánica y => colapsaría
- ② Si emiten constantemente deben presentar un espectro continuo; NO discreto como se obtenía experimentalmente.



● Espectros atómicos

Un espectro de emisión se obtiene así:



El espectro de un sólido calentado es continuo.

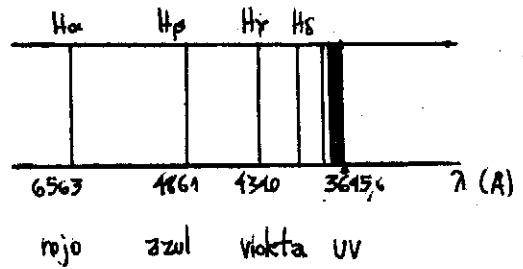
El espectro de la radiación EM emitida por un átomo libre consiste solo en ciertas longitudes de onda (que se ven como líneas en las placas). Cada elemento tiene su espectro característico.

En 1885 Balmer halló una fórmula empírica:

$$\lambda_n = 3646 \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad n=3,4,5...$$

Predice las primeras 9 líneas*. Con $n \rightarrow \infty \quad \lambda_{\infty} = 3646$

$$\frac{1}{\lambda_n} = \left(\frac{n^2 - 4}{n^2} \right) \frac{1}{\lambda_{\infty}} = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \frac{4}{\lambda_{\infty}} = R_H \cdot \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$



▲ Espectro del Hidrógeno
 $R = 1.10^{-7} \text{ cm}$

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \cdot \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$

$R_H \equiv$ constante de Rydberg para el hidrógeno
(R para otros elementos es $\sim R_H$)

Se hallaron otras series para el H:

- 1 Lyman, 2 Balmer, 3 Paschen, 4 Brackett, 5 Pfund
 $n=2,3,\dots$ $n=3,4,\dots$ $n=4,5,\dots$ $n=5,6,\dots$ $n=6,7,\dots$

con fórmulas:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \cdot \left[\frac{1}{0^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$

caracteriza la serie y al emisor

Rayleigh-Ritz: Ley de combinación de las series espectrales.

EL Modelo de Bohr

En 1913 propone otro modelo que explicará las características espectroscópicas.

* Postulados Bohr

- 1 Las e^- se mueven en órbitas circulares
- 2 las e^- se mueven en órbitas permitidas para las cuales:

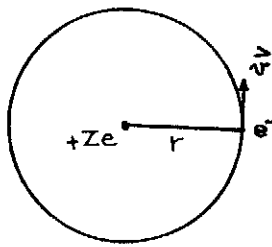
$$L = n \frac{h}{2\pi} \leftarrow \text{cuantización}$$

- 3 El e^- se mueve en su órbita permitida sin radiar energía. Su E es constante
- 4 Al cambiar de órbita el e^- emite radiación de frecuencia:

$$\frac{E_L - E_P}{h} = \nu$$

Estos postulados mezclan física clásica con no-clásica

* Átomo de un electrón



$$\triangle F_{\text{eléctrica}} = F_{\text{centrífuga}}$$

$$\frac{e^2 Z}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{e^2 Z}{r} = m v^2$$

$$L = r p = m r v$$

$$m r v = n \hbar$$

$$m v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m r^2}$$

$$\frac{e^2 Z}{r} = \frac{n^2 \hbar^2}{m r^2} \Rightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{e^2 Z m}$$

$$E = T + V$$

$$E = \frac{m v^2}{2} - \frac{e^2 Z}{r}$$

$$r_n \sim n^2$$

radios permitidos

$$E_n = - \frac{m v^2}{2} = - \frac{e^2 Z}{2r} = - \frac{(e^2 Z)^2 m}{2 n^2 \hbar^2} = - \frac{n^2 \hbar^2}{2 m r_n^2}$$

$$\Rightarrow E_n = - \frac{(e^2 Z)^2 m}{2 n^2 \hbar^2}$$

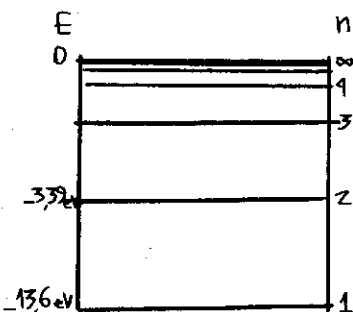
$$E_n \sim \frac{1}{n^2}$$

$$E_n \sim \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{e^2 Z}{n \hbar}$$

$n \neq 0$

$$v_n \sim \frac{1}{n}$$

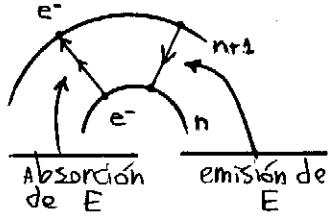


▲ niveles de energía del H

Justificación de los espectros

La cuantización del L lleva a la cuantización de E . Como $v_n^{max} \ll c$ se puede usar mecánica NR, pero para átomos pesados es inaplicable. Usemos 4 para calcular la frecuencia de la radiación emitida al caer de órbita

$$\frac{E_{n_i} - E_{n_f}}{h} = \nu = -\frac{(e^2 Z)^2 m}{4\pi\hbar^3} \left[\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right] = +\frac{m \cdot e^4 \cdot Z^2}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$



$$\frac{1}{\lambda} = +\frac{m \cdot e^4 \cdot Z^2}{4\pi c \cdot \hbar^3} \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$$

en Balmer es $n_f=2$

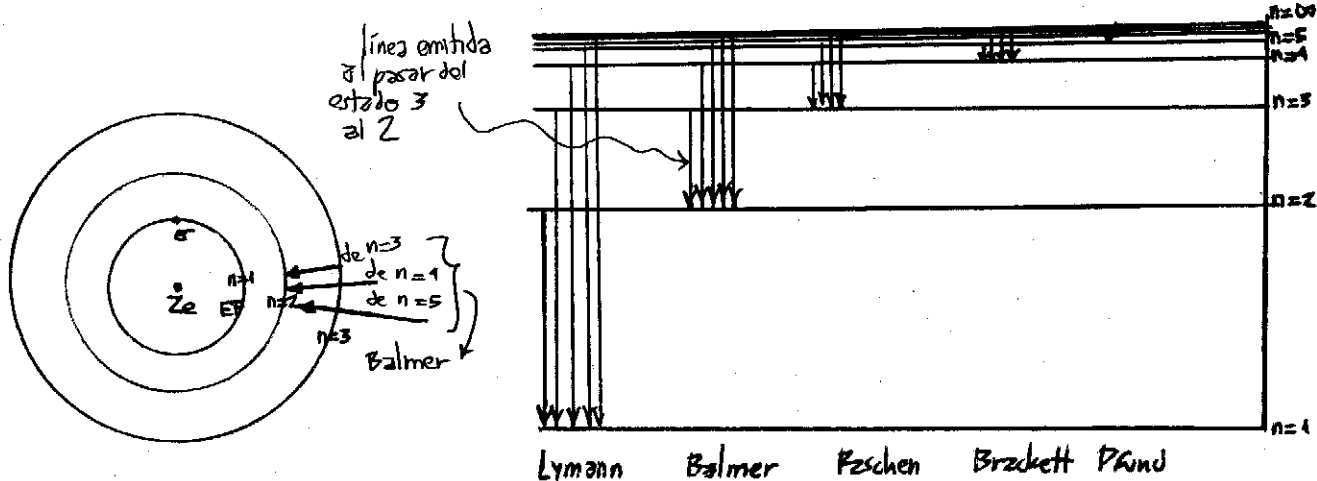
Se vio que concordaba casi perfectamente con el valor R_H experimental.

Esto explicó las series del H; de ellas surge de un subconjunto de transiciones en las que el electrón llega a un estado final n_f . En Lyman $n_f=1$ (fundamental); etc.

La teoría de Bohr predijo las series de Lyman, Brackett, Pfund exitosamente, descubiertas luego.

- * $n=1$ estado fundamental [energía mínima] es negativa. $E_1 \equiv$ "el fundamental"
 - * El átomo se excita y absorbe E con lo cual pasa el e^- a un estado superior $n > 1$ (energía mayor - aunque número más pequeño en valor absoluto -).
- Luego cae al fundamental [el equilibrio al que tiende es al estado de mínima energía] emitiendo la energía.
- En la emisión $n_i > n_f$.
- En la absorción solo se absorberán energías que valen $n h \nu$ (múltiplos de $h \nu$) de la radiación incidente.

+ su energía es menos negativa

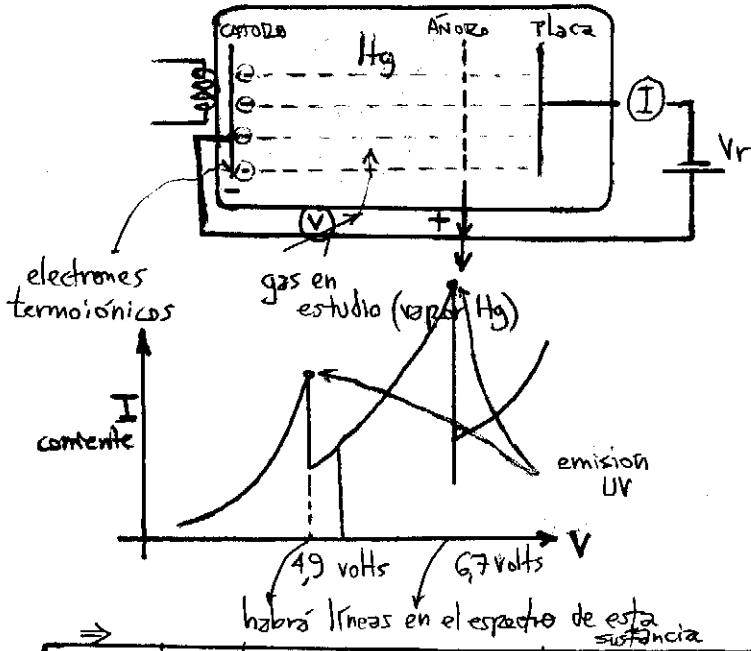


La energía de un e^- atómico está cuantizada.

● Experimento de Frank & Hertz [1914]

Al calentar el cátodo hay emisión termiónica de e⁻.

Hay un potencial V que los acelera entre cátodo y ánodo; y un V_r que los frena entre ánodo y placa.



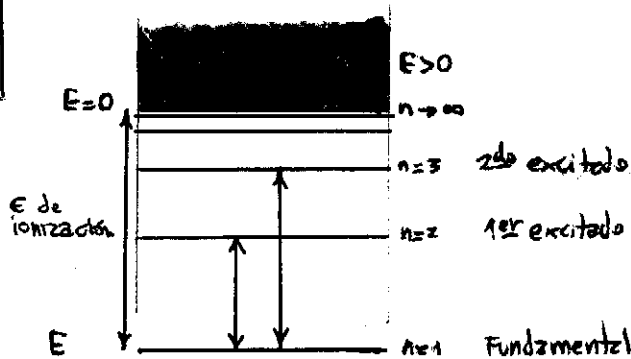
En 4,9 Volts crece la corriente porque los electrones tienen la energía justa para excitar al átomo de Hg y hacerle emitir. Los e⁻ le pegan a los e⁻ del Hg, y estos pasan de órbita. Con V < 4,9 Volts los e⁻ no alcanzan a excitar los átomos y no hay espectro de emisión. Con V > 6 Volts hay espectro con una línea. Los e⁻ del Hg pasan del fundamental al 1er estado excitado.

⇒ Todos los átomos tienen sus estados de energía cuantizados

-ta emitiendo fotones [la grilla se iluminaba]

energía de ionización = energía necesaria para liberar un e⁻ del átomo
 es $E_{n=1} - E_{n=\infty} = E_{\text{fundamental}}$
 $= 0$

Luego de E=0; tenemos estados no ligados. El e⁻ es libre y tiene E > 0; aquí no hay cuantización.



● Cuantización de Wilson-Sommerfeld

En 1916 Wilson & Sommerfeld enuncian una regla de cuantización general, que tiene como casos especiales a la de Planck y Bohr

Toda coordenada de un sistema físico que varía periódicamente en el t cumple:

$$\oint p_q \cdot dq = n h$$

← Cuantización Wilson-Sommerfeld

↑ momento de la coord. periódica ↑ coordenada periódica

$$\int_0^{2\pi} m \cdot v_n \cdot r_n \cdot d\theta$$

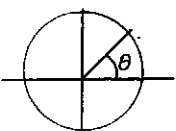
$$* \int_0^{2\pi} p_\theta \cdot r \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} m \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot r \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} m r^2 \dot{\theta} \cdot d\theta = L \cdot 2\pi = n h$$

L = n h

Bohr

* teoría relativista de Sommerfeld

Se descubrió una estructura fina en el espectro del H. Una línea espectral se dobla en varias.



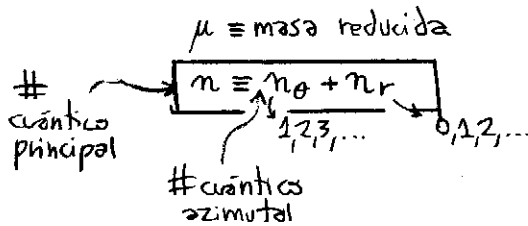
Sommerfeld propone:

$$\oint L \cdot d\theta = n_\theta \cdot h$$

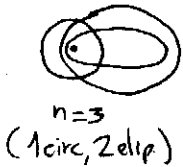
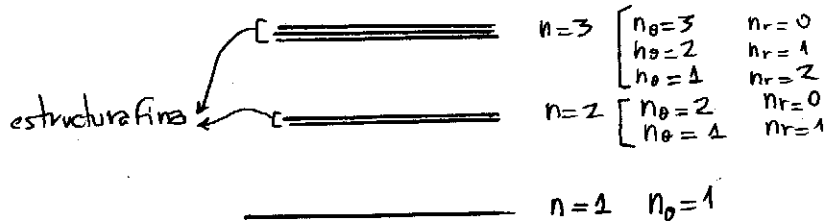
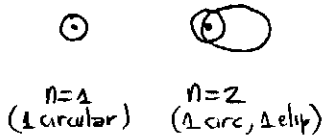
$$\oint p_r \cdot dr = n_r \cdot h$$

Suponiendo que el e^- se mueve en órbitas elípticas (en una órbita circular $p_r = 0$)
Sommerfeld llega a:

$$a = \frac{n_\theta^2 \hbar^2}{\mu Z e^2}, \quad b = \frac{a \cdot n_\theta}{n}, \quad E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2 n^2 \hbar^2}$$



$\Leftarrow n_\theta = n \Rightarrow a = b \Rightarrow$
órbita circular



Hay órbitas degeneradas en cada # cuántico principal.
 $E = E(n) \Rightarrow$ para los 3 órbitas en $n=3$ la E es la misma (E_3)

● Principio de Correspondencia

Para valores grandes de los números cuánticos: teoría cuántica \rightarrow física clásica
La variación entre el salto clásico-cuántico es gradual y continua, porque depende del n que va en los N .

con $h \rightarrow 0 \therefore$
se debería tener cuántico \rightarrow clásico

● Vieja Teoría Cuántica

La constituyen: el modelo atómico de Bohr
la cuantización de la energía de Planck $\rightarrow \epsilon = nh\nu$

pese a su éxito, tiene agujeros:

1. Solo se tratan sistemas periódicos
2. No se habla de la rapidez de los saltos de los estados en el átomo
3. Funciona en átomos de 1 electrón [con $(Z \cdot e) > 0$ en el núcleo = hidrogenoides]

● Hipótesis de De Broglie [1924]

Él propone que al movimiento de una partícula se le pueden asociar ciertas "ondas piloto". Así la materia podría tener una naturaleza dual, como la radiación. Para toda partícula de momento p hay una onda de λ :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

con $E = h \cdot \nu$

Nota
 el momento de la partícula se rige por la propagación ondulatoria de sus ondas piloto.
 La energía relativista es $E = h\nu$

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4$$

$$\lambda = \frac{v_f}{\nu} \Rightarrow$$

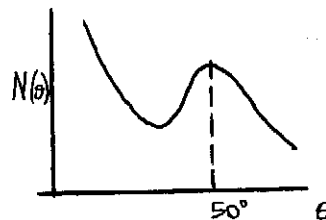
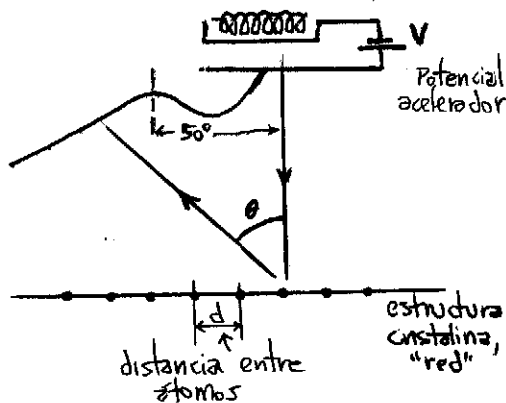
$$v_f = \lambda \cdot \nu = \frac{E}{p}$$

$$v_f > c$$

● Experimento de Davisson-Germer [1927]

Al igual que en la difracción de luz el comportamiento ondulatorio de una partícula se manifestará cuando $\lambda \sim$ dimensiones sistema empleado para investigarla.

La estructura cristalina de un metal hace las veces de red de difracción. En 1927 se obtuvo difracción de e^- por una "red" de níquel.



▲ electrones dispersados por el cristal de níquel ($V_{fijo} = 54V$)

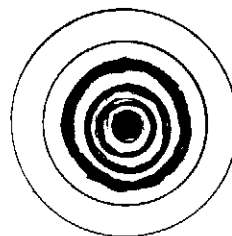
La mayor parte rebotan $\theta \approx 0$. Pero hay un pico en 50° que se explica solamente como interferencia constructiva de la red.

Usando la ecuación de una red: $n \cdot \lambda = d \cdot \sin \theta$

converda con los datos experimentales y $50^\circ = \theta_{(n=1)}$

Necesito $\lambda < d$

En 1928 G.P. Thomson observó difracción de electrones a través de láminas cristalinas obteniendo patrones similares a los de difracción de luz y con los ángulos experimentales coincidentes a los calculados usando la hipótesis de De Broglie.



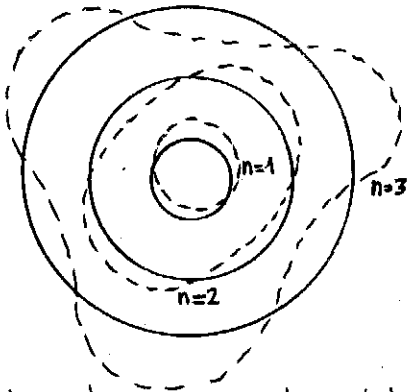
$\lambda = \frac{h}{p}$
 Tendré que utilizar partículas con d y p

● Ondas Estacionarias

En la física de las ondas sabemos que una onda confinada producen ondas estacionarias. De la misma forma una partícula ligada (e⁻ en el átomo) debería tener ondas piloto estacionarias. Bohr cuantiza las órbitas ⇒

hipótesis de De Broglie ⇒ sí $\lambda = \frac{h}{p}$ ⇒ $L = m \cdot r \cdot v = p \cdot r = \frac{n h}{2\pi}$ ← cuantización Bohr

$2\pi r = n \cdot \lambda$ $n = 1, 2, 3, \dots$



Hay un # entero de longitudes de onda de De Broglie en cada circunferencia permitida.



← ondas estacionarias con nodos fijos.

▲ ondas estacionarias en las órbitas de Bohr

Equivalencia
ondas piloto de una partícula en movimiento periódico son standing waves ≡ Cuantización de Wilson-Sommerfeld

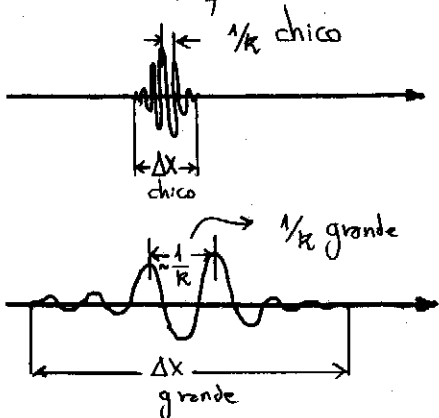
$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{q} = n h \Rightarrow \oint L \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} p \cdot r \cdot d\theta = 2\pi r \cdot \frac{h}{\lambda} = n h$$

$$\Rightarrow 2\pi r = n \lambda$$

W-S lleva a ondas estacionarias

● Principio de Incertidumbre

La descripción ondulatoria tiene aparejada inherentemente una "relación de incerteza". Sean dos paquetes de onda (Σ o ∞ ondas de diferentes k).



Partícula más localizada (se halla dentro de Δx)

Partícula menos localizada

Δk es el intervalo cubierto por los números de onda.

Nota

Σ finitas ondas ; Σ ∞ ondas da un pack



surge de la mecánica de las ondas

$$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$$

usando de Broglie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p \cdot 2\pi}{h} \Rightarrow$$

$$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \Rightarrow$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar$$

incertidumbre en la posición a un t.

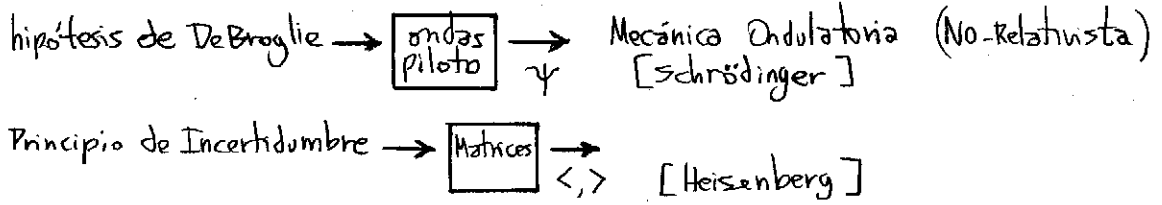
incertidumbre en el momento a un t.

Esta es una de las formas del principio de incertidumbre enunciado en 1927 por Heisenberg.

La medición de Δx y Δp es simultánea

● Teorías de la Mecánica cuántica

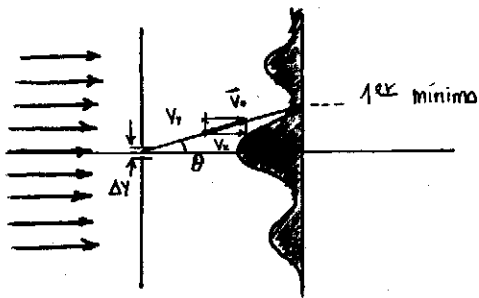
EL Postulado de De Broglie vincula partículas a ondas y es el 1er paso de la mecánica cuántica. Hay dos desarrollos independientes pero equivalentes



Sobre Medir (requiere tener posibilidad)

- Si ∞ mediciones dan un mismo autovvalor \Rightarrow el sistema se halla en el autoestado que le corres- [puede]
- Si un sistema está en un autoestado \Rightarrow siempre mide el autovvalor que corresponde
- Si al medir obtengo diferentes autovvalores \Rightarrow como mucho tengo una probabilidad mayor y menor de que el sistema se halla en alguno de esos autoestados

● Difracción de Electrones



$$n \cdot \lambda = \Delta y \cdot \sin \theta \quad ; \quad \sin \theta_m = \frac{\lambda}{\Delta y} \approx \theta_m = \frac{\Delta v_y}{v_o}$$

1er mínimo

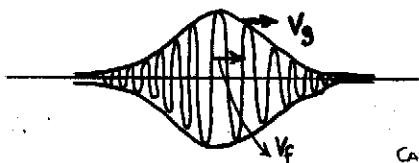
$$\Delta v_y \cdot \Delta y \approx \lambda v_o$$

$$m \cdot \Delta v_y \cdot \Delta y \approx m \cdot \lambda \cdot v_o$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \approx \frac{h}{\lambda} \cdot m \cdot \lambda$$

incertidumbre \rightarrow $\Delta p_y \cdot \Delta y \approx h$

● Velocidad de Grupo vs. de Fase



velocidad de grupo \rightarrow $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

velocidad de fase \rightarrow $V_f = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot v$

Caso partícula libre

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar \cdot 2k}{2m} = \frac{\hbar k}{m}$$

$V_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \Rightarrow$ Corresponde a la velocidad de la partícula

$V_f = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} \Rightarrow$ No es la v de la partícula (es 50% en este caso)

Puede $V_f > c$

● Postulados de la Mecánica Cuántica

I. Para todo sistema físico con N g.l. \exists función de onda Ψ, ϕ con

$$\Psi(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{C} : |\Psi|^2 = \Psi^* \cdot \Psi \equiv W_{qi}$$

$$\phi(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{C} : |\phi|^2 = \phi^* \cdot \phi \equiv W_{pi}$$

NOTA
Intensidad de Ψ \propto probabilidad

W densidad de probabilidad con \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} W \cdot dq = dP_{ib} \\ W \cdot dp = dP_{ob} \end{array} \right.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} W(q) \cdot d^N q = 1$ normalización

Probabilidad de que el sistema se halle entre $(q, q+dq)$
 $(p, p+dp)$

II. $\Psi(x,t)$ y $\phi(p,t)$ son transformadas de Fourier

Se definen así para expresar la incertidumbre \hat{p}, \hat{x}

$$\phi(\vec{p}, t) = \frac{1}{h^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N x \cdot e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar} \cdot \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{h^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N p \cdot e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar} \cdot \phi(\vec{p}, t)$$

Se hace Fourier en el espacio o en el momento (no en el tiempo)

OBS.

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\hbar} = \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$p = \hbar k = \frac{h \cdot 2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot k$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi^* p \phi) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cdot \phi^* p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{h^{N/2}} e^{-i p x / \hbar} \Psi$$

$$= \int dp \cdot \phi^* p \int \frac{dx}{h^{N/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\hbar}{i p} e^{-i p x / \hbar} \right) \cdot \Psi \dots$$

$$= \int dp \cdot \phi^* \frac{p}{h^{N/2}} \left(\underbrace{-\frac{\hbar}{i p} e^{-i p x / \hbar}}_{\rightarrow 0} \right) \left[-\frac{\hbar}{i p} e^{-i p x / \hbar} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx \right]$$

$$\langle p \rangle = \int dp \cdot \phi^* p \frac{(-i) \hbar}{h^{N/2} p} \int e^{-i p x / \hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \cdot \phi^* \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i \hbar}{h^{N/2}} e^{-i p x / \hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi^* e^{-i p x / \hbar} \frac{-i \hbar}{h^{N/2}} \frac{\partial \Psi}{\partial x}) dx \cdot dp$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \cdot dx$$

\Rightarrow por analogía se verá entonces:

	operador		
espacio		\hat{x}	\hat{p}
	\hat{x}	$x \cdot$	$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$
	\hat{p}	$i \hbar \frac{\partial}{\partial p}$	p

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \Psi \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^* \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi \cdot dp$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx ; \langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(p) \hat{A} \phi(p) dp$$

Valores medios de un operador A en los espacios de posición y momento.

III. Para toda función dinámica existen operadores. Lo que uno observa son los valores medios de estos operadores. Para representar cantidades físicas; Los operadores serán lineales y hermiticos.

$$\hat{A} = \hat{A}(q) \quad \text{ó} \quad \hat{A} = \hat{A}(p) \quad \text{funciones de la posición o el momento}$$

VALOR MEDIO

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) [\hat{A} \psi(x)] dx$$

multiplica opera

$\psi \in \mathbb{C}$ son vectores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} .
 Operador $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
 $\hat{A} \psi = \chi$

- $\hat{A}(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2) = \alpha \hat{A} \psi_1 + \beta \hat{A} \psi_2$ (LINEALIDAD)

- $\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^*$ (HERMITICIDAD)

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger = (\hat{A}^t)^*$$

PRODUCTO INTERNO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \phi(x) dx \equiv \langle \psi | \phi \rangle$$

$$\langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \hat{A} \phi(x) dx \equiv \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle$$

→ para invertirlo hay que conjugarlo

Pedimos que los operadores de observables sean reales porque la que se mide en la experiencia son $\langle \hat{A} \rangle$ y estos serán reales si el \hat{A} es hermitico.

$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ es un escalar; es el valor medio, y si A es hermitico (A representa un observable) es el resultado que se mide en el LABO.

● Relación de Incerteza General

Sean $\gamma = \hat{A}^* + \lambda \hat{B}$ \Rightarrow $(\hat{A}^* + \lambda \hat{B})(\hat{A} + \lambda^* \hat{B}^*) \geq 0 \Rightarrow \langle \gamma | \gamma \rangle \geq 0$
 la norma al cuadrado $\Rightarrow \langle \hat{A} + \lambda \hat{B} | \hat{A} + \lambda \hat{B} \rangle \geq 0$ El producto interno es ≥ 0

$$|\hat{A}|^2 + \lambda \hat{B} \hat{A} + \lambda^* \hat{A}^* \hat{B}^* + |\lambda|^2 |\hat{B}|^2$$

como valor medio: $\langle |\hat{A}|^2 \rangle + \lambda \langle \hat{B} \hat{A} \rangle + \lambda^* \langle \hat{A}^* \hat{B}^* \rangle + |\lambda|^2 \langle |\hat{B}|^2 \rangle \geq 0$

como $\lambda = \frac{\langle \hat{A} \hat{B} \rangle}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle} \Rightarrow \langle |\hat{A}|^2 \rangle - \frac{\langle \hat{A}^* \hat{B}^* \rangle \langle \hat{B} \hat{A} \rangle}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle} - \frac{\langle \hat{A} \hat{B} \rangle \langle \hat{A}^* \hat{B}^* \rangle}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle} + \frac{\langle \hat{A} \hat{B} \rangle}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle} \geq 0$

$$|\lambda|^2 = \frac{|\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle^2} \quad \frac{\langle |\hat{A}|^2 \rangle \langle |\hat{B}|^2 \rangle - 2|\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle^2} + \frac{|\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2}{\langle |\hat{B}|^2 \rangle^2} \geq 0$$

incerteza general \Rightarrow $\langle |\hat{A}|^2 \rangle \langle |\hat{B}|^2 \rangle \geq |\langle \hat{A} \hat{B} \rangle|^2$ (Schwarz)

Esta relación se cumple para toda par de operadores. Es una forma de la desigualdad de Schwarz.

$$\Delta \hat{A} \equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \mathbb{I} \quad \leftarrow \text{Operador desplazamiento}$$

$$\sigma_A^2 \equiv \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \equiv \text{dispersión} \quad \left(\begin{array}{l} \text{desviación} \\ \text{cuadrática} \\ \text{media} \end{array} \right)$$

$$|\Delta \hat{A}|^2 = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^* = |\hat{A}|^2 - \langle \hat{A} \rangle \hat{A}^* - \langle \hat{A} \rangle \hat{A} + |\langle \hat{A} \rangle|^2 \Rightarrow$$

$$\langle |\Delta \hat{A}|^2 \rangle = \langle |\hat{A}|^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A}^* \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A} \rangle + |\langle \hat{A} \rangle|^2$$

como A es hermitico $\Rightarrow \sigma_A^2 = \langle |\Delta \hat{A}|^2 \rangle = \langle |\hat{A}|^2 \rangle - |\langle \hat{A} \rangle|^2$

$$\langle |\Delta \hat{A}|^2 \rangle = \langle |\hat{A}|^2 \rangle - |\langle \hat{A} \rangle|^2$$

Metiendo operadores de desplazamiento en Schwarz

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq |\langle \Delta A \cdot \Delta B \rangle|^2 \quad \leftarrow \text{RELACION DE INCERTEZA GENERAL}$$

NB
Hay cota inferior para la precisión en medidas simultáneas de observables A, B

Commutador & Anticonmutador

Commutador $\rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
 anticonmutador $\rightarrow \{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{[\hat{A}, \hat{B}] + \{\hat{A}, \hat{B}\}}{2}$$

* Ejemplo

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] \psi = x \cdot i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) = -x i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi + i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} = +i\hbar \psi \Rightarrow$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = +i\hbar \quad \therefore \hat{x}, \hat{p}_x \text{ no conmutan}$$

Como Corolario relación incerteza general:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

NB
si \hat{A}, \hat{B} conmutan \Rightarrow se pueden medir sin incerteza simultáneamente

La no-conmutatividad de los operadores expresa la incompatibilidad de su medición simultánea.

Estados Cuantificados

$$\hat{A} \psi_i = a_i \psi_i \quad \leftarrow \text{problema espectral} \quad \{\psi_i\} \equiv \text{espectro de } \hat{A}$$

$$\int dx \psi^* \hat{A} \psi = a \int dx \psi^* \psi = a \langle \psi | \psi \rangle = a \quad \text{si están normalizadas } \psi:$$

Caso 1. Onda Plana

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \hat{p}_x \psi_0 \Rightarrow \psi_0 = e^{i\frac{p_x x}{\hbar}} \quad \text{onda plana es autestado del momento}$$

$$(\hat{p} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi = 0$$

$$\psi = A e^{\lambda x} \quad p A e^{\lambda x} + i\hbar A \lambda e^{\lambda x} = 0$$

$$\psi = A \lambda e^{\lambda x} \quad p + i\hbar \lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{p}{i\hbar} = \frac{i p}{\hbar}$$

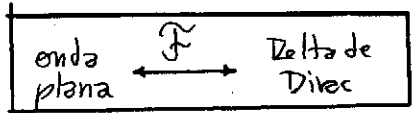
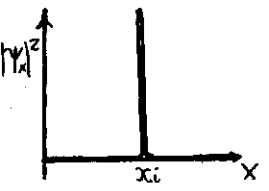
En una onda plana p está perfectamente definido, tenemos posición totalmente indefinida.

■ CASO Z : Delta de Dirac

$$\hat{x}\psi_i = x_i\psi_i$$

$$|\psi_i|^2 = \delta(x-x_i)$$

$$\psi_i = \{\delta(x-x_i)\}^{1/2}$$



$$\begin{aligned} \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-i\frac{p-x}{h}} \cdot A e^{i\frac{p_i-x}{h}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot A \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-i\frac{x}{h}(p-p_i)} \end{aligned}$$

$$\phi(p) = \frac{A}{\sqrt{h}} \frac{e^{-i\frac{(p-p_i)x}{h}}}{-i\frac{(p-p_i)}{h}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq p_i \\ p & \text{si } p = p_i \end{cases}$$

• Momento Angular

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

es el mismo problema espectral que el de \hat{p}

$$\psi_n = L_n \cdot e^{i\frac{L_n \phi}{\hbar}} = L_n \cdot e^{i\frac{L_n}{\hbar}(\phi + 2\pi)} = L_n \cdot e^{i\frac{L_n \phi}{\hbar}} \cdot e^{i\frac{L_n 2\pi}{\hbar}}$$

Bohr $L_n = n\hbar \Rightarrow$

$$= L_n \cdot e^{in\phi} \cdot e^{in2\pi}$$

• Energía Cinética

$$\hat{T}\psi_n = \epsilon_n \psi_n$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{(-i\hbar)^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\hat{p}(e^{i\frac{p_n x}{\hbar}}) = p_n \cdot e^{i\frac{p_n x}{\hbar}}$$

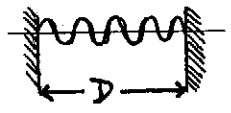
$$\hat{p}^2(e^{i\frac{p_n x}{\hbar}}) = p_n^2 \cdot e^{i\frac{p_n x}{\hbar}}$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}(\quad) = \frac{p_n^2}{2m} \cdot (e^{i\frac{p_n x}{\hbar}})$$

$$\hat{T}(e^{i\frac{p_n x}{\hbar}}) = \frac{\hbar^2}{2mD^2} (e^{i\frac{p_n x}{\hbar}})$$

onda plana en una caja

$$\begin{aligned} e^{i\frac{p_n x}{\hbar}} &= e^{i\frac{p_n x + D}{\hbar}} \\ e^{i2\pi n} &= 1 = e^{i\frac{p_n D}{\hbar}} \end{aligned}$$



$$n \cdot 2\pi = \frac{p_n D}{\hbar}$$

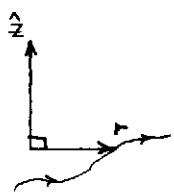
$$n \cdot 2\pi = \frac{p_n}{\hbar} D \rightarrow p_n = \frac{n\hbar}{D}$$

↑ autovalores del momento

Los autoestados de \hat{p} y \hat{T} son múltiplos el uno del otro

• Energía Cinética Rotacional

$$\hat{E}_{rot} = \frac{1}{2mr^2} \hat{L}_z$$



BASE

Sean $\{\psi_i\}$ autoestados de algún operador \Rightarrow

$$\xi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x)$$

un estado cualquier se puede expresar como CL de autoestados, que en general No es autoestado.

IV. Evolución Temporal

ONDAS CLÁSICAS
EM

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\lambda \cdot \nu = c$$

$$2\pi \frac{\lambda \nu}{2\pi} = c$$

$$\frac{\omega}{k} = c$$

$$\omega = k \cdot c$$

1 cuanto: $\omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}$

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

dispersiones diferentes

Las ecuaciones de ondas clásicas y cuántica difieren porque es diferente la relación de dispersión.

En una onda plana

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \omega t\right)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \omega t\right)} \cdot \frac{ip}{\hbar}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \omega t\right)} \cdot \left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right) = -\psi \frac{p^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \omega t\right)} \cdot (-\omega) = -i\omega \psi$$

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} (\psi) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -\frac{i\hbar k^2}{2m} \psi$$

inspección

Armado de Ecuación de Schrödinger

aquí $\hat{T} = \hat{H}$

$$\hat{H} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(x)$$

El hamiltoniano es el responsable de la evolución temporal de la función de onda.

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

Autofunciones

El conjunto de autofunciones $\psi_i: \hat{F}\psi_i = f_i\psi_i$ son un espacio completo y podemos escribir una función

$$\xi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x) \quad \{\psi_i\} \text{ autoestados de } \hat{F}$$

$$\langle \psi_j | \xi(x) \rangle = \sum_i c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^* \psi_i dx$$

$$\langle \psi_j | \xi(x) \rangle = c_j \text{ los coeficientes}$$

$$\hat{F} \xi(x) = \sum_i c_i \hat{F} \psi_i = \sum_i c_i f_i \psi_i = \sum_i \langle \psi_i | \xi(x) \rangle \cdot \hat{F} \psi_i$$

$$\hat{F} \xi(x) = \sum_i c_i f_i \psi_i \rightarrow \text{en general no es autoestado de } \hat{F}$$

$$\langle \xi | \hat{F} | \xi \rangle = \langle \hat{F} \rangle = \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} c_i^* \psi_i^* \hat{F} c_i \psi_i dx$$

$$\langle \hat{F} \rangle = \sum_i |c_i|^2 f_i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_i|^2 dx}_1 = \sum_i |c_i|^2 f_i$$

La medición exhibe al sistema con probabilidad $|c_i|^2$ de hallarse en el estado f_i

$$\psi(x,t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

distribución espectral
relación de dispersión

Se puede pasar a $\psi(x,t)$ como $\mathcal{F}[\phi(p)](x,t)$
con $dk = \frac{1}{\hbar} dp$

$$\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$$

si $A(k)$ y $\psi(x)$ son transformadas inversas de Fourier \Rightarrow

$$\Delta k \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \quad \Delta p \cdot \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

Mínima incertidumbre

● El Paquete Gaussiano

$$\Psi(x) = A \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{2\sigma}\right)^2} \cdot e^{i \frac{p_0 \cdot x}{\hbar}} ; \text{normalización}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{2\sigma}\right)^2} \cdot dx = 1$$

$$A^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma = 1$$

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$$

$$A = \left(\frac{1}{2\pi \sigma^2}\right)^{1/4}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi \sigma^2)^{1/4}} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{2\sigma}\right)^2} \cdot e^{i \frac{p_0 \cdot x}{\hbar}}$$

El paquete gaussiano es el de mínima incerteza.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 \cdot \alpha} \cdot du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

- $\sigma_A^2 = 0$ si $\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n$ (el sistema se halla en un autoestado)
- si \hat{A}, \hat{B} tienen una base de autofunciones en común \Rightarrow conmutan entre sí $[\hat{A}, \hat{B}]$
- si \hat{A}, \hat{B} no conmutan $\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|}{2} \rightarrow \{|\psi_i\rangle\}$

■ $\left. \begin{matrix} \psi(x, t) \\ \psi(x, -t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ misma $|\psi|^2 \Rightarrow$ son igualmente posibles la evolución hacia adelante y hacia atrás.

■ sea \hat{B} no hermítica $\Rightarrow \hat{C} = \frac{\hat{B} + \hat{B}^\dagger}{2}$ es hermítica (el operador cuadrado)

Teorema de Ehrenfest

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Queremos ver la $\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt}$

$$\langle \hat{F} \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \rightarrow \frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{F} \Psi + \Psi^* \hat{F} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$= \langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} | \hat{F} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{F} | \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle$$

$$= \langle \Psi | \frac{\hat{H} \hat{F}}{i\hbar} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{F} \frac{\hat{H}}{i\hbar} | \Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | \frac{\hat{H} \hat{F}}{i\hbar} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{F} \frac{\hat{H}}{i\hbar} | \Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | \frac{1}{i\hbar} [\hat{H} \hat{F} - \hat{F} \hat{H}] | \Psi \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{F}] \rangle \quad \text{general}$$

con \hat{F} no dependiendo explícitamente del tiempo

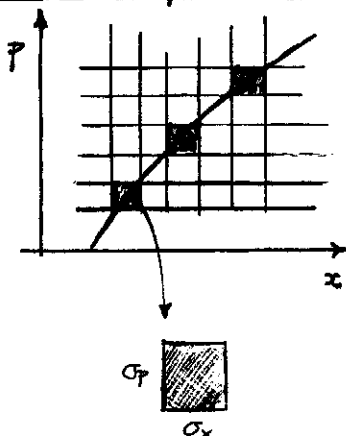
$$\hat{F} = \hat{x} \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \quad [\hat{H}, \hat{x}] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \hat{x} \right] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{x} \right] \neq 0$$

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [-i\hbar \hat{p}] \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} = \langle -\frac{\partial V}{\partial x} \rangle \quad \text{Ehrenfest}$$

NOTA
 $\frac{d\langle \hat{F} \rangle}{dt} = 0 \Rightarrow$
 F es constante de movimiento del sistema

Principio de Correspondencia

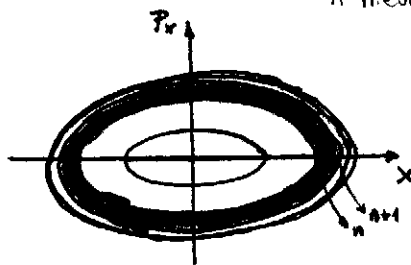


En valor medio recuperamos las ecuaciones dinámicas clásicas. Se puede trazar en el espacio de fases una trayectoria media.

A medida que n crece:

$$S_{n+1} - S_n = h \quad (\text{constante})$$

La diferencia de áreas es constante, pero como las elipses son cada vez mayores las órbitas están más pegadas y se ven continuas. Se recupera la "continuidad" en el espacio de fases



$$\text{Mecánica clásica} = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Mecánica cuántica} \quad \text{Principio de correspondencia}$$

Cuando $S = \oint \vec{p} \cdot d\vec{x} \gg h$ ($h \rightarrow 0$ comparativamente) recuperamos la continuidad. Esto es el principio de correspondencia entre MC y QM

Estados Estacionarios

Sea $\Psi(x,t) \rightarrow$

$$\Psi = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi(x) \cdot (-i\omega) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x) \right] e^{-i\omega t} = [i\hbar (-i\omega) \psi(x)] e^{-i\omega t}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = [\omega \hbar] \psi(x)$$

$$\hat{H} \psi(x) = E \psi(x) \rightarrow \text{constante}$$

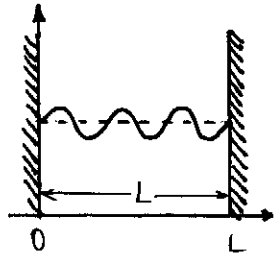
Si la dependencia temporal es armónica tengo una Schrödinger independiente del tiempo.

Tengo soluciones estacionarias. Los valores medios con estas $\Psi(x)$ son independientes del tiempo.

$E = \hbar\omega = \hbar\nu \Rightarrow \Psi(x,t) = \sum_{E=1}^N a_E \Psi_E(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

Sumamos en las energías

$\Psi^* \cdot \Psi = |\Psi|^2 \neq |\Psi|^2(t) \Rightarrow$ la probabilidad no varía en el tiempo

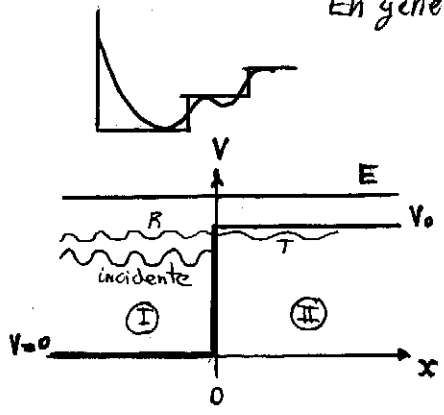


$\Psi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx}$
 $\Psi(0) = A + B = 0 \rightarrow \Psi(x) = A \cdot \text{sen}(kx)$
 $\Psi(L) = A \cdot \text{sen}(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi$

$k_n = \frac{n\pi}{L}$ ← Cuantificación ondas estacionarias

● Schrödinger en 1D

En general se pueden aproximar los problemas con pozos y barreras.

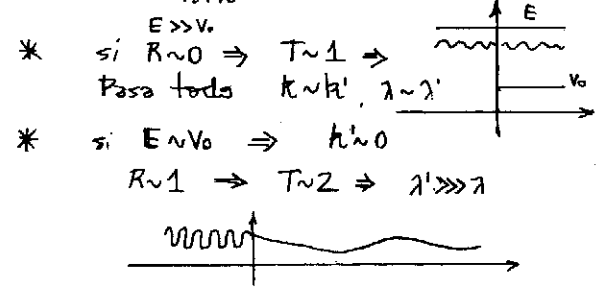
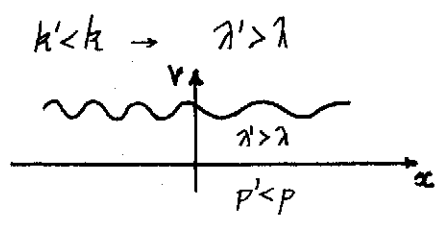


I
 $\Psi_I = e^{ikx} + R \cdot e^{-ikx}$
 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$
 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

II
 $\Psi_{II} = T \cdot e^{ik'x}$
 $E = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V_0$
 $k'^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \rightarrow 1 + R = T$
 $\frac{\partial \Psi_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(0) \rightarrow ik(1 - R) = k'T$

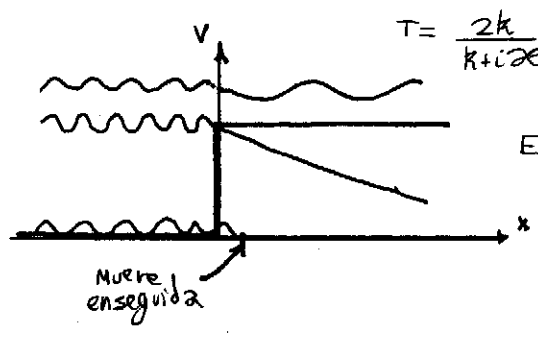
$T = \frac{2k}{k+k'}$
 $R = \frac{k-k'}{k+k'}$



Nota
se quiere!


$k'^2 = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \Rightarrow k' = i\alpha$
 $R = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha} \Rightarrow |R| \sim 1$
 $T = \frac{2k}{k + i\alpha}$

* si $E \sim 0 \Rightarrow T \rightarrow 0, R \rightarrow 1$
 $k \sim 0, \alpha \neq 0$
 No puede surcar la barrera



$E \rightarrow V_0$ Tenemos una exponencial real (decaimiento) efecto túnel [Penetración de Barrera]


BOUNDARY S



* Pozo finito

$\Psi(x)$ continua

$\frac{d\Psi(x)}{dx}$ continua



* Pozo infinito

$\Psi(x)$ continua

$\frac{d\Psi(x)}{dx}$ no será continua

Recordar

$V = V(x)$
 $E = \text{constante}$
 \Rightarrow Schrödinger separable

Saber

$E \neq \text{constante} \Rightarrow$
 $\Psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \Psi(x)$
 Se parte en secciones de E_n constantes

(well behaved en ∞)
 $\Psi(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow \pm \infty$
 $\Psi^*(x) \cdot \Psi(x)$ continua
 $\Psi(x)$ continua
 $\Psi'(x)$ continua [con $V \rightarrow \infty$]

$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$
 $E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega$

• Mediciones & Autovalores

AL medir un sistema UNA VEZ respecto a un operador que presenta un observable \hat{A} medimos un autovalor a_i de \hat{A} .
 CADA MEDICIÓN da a_i diferentes (i diferentes) \Rightarrow el promedio de una serie de mediciones es:

$\langle \hat{A} \rangle = \int \phi^* \hat{A} \phi$, donde ϕ no es autofunción de \hat{A} necesariamente
 \downarrow mezcla de autoestados

si el sistema se halla en un autoestado \Rightarrow obtenemos el autovalor correspondiente

$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi_i^* \hat{A} \Psi_i = a_i$
 $\langle \hat{A} \rangle = \sum_j |c_j|^2 a_j = \sum_j \langle \Psi_j | \phi(x) \rangle \cdot a_j \Rightarrow$

si $\phi(x)$ es un autoestado $\Psi_k \Rightarrow$ sobrevive $\langle \Psi_k | \Psi_k \rangle \cdot a_k \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = a_k$

que no es otra que la probabilidad de medir a_j el autovalor asociado. Es el # del reloj en el laboratorio

Probabilidad de que el sistema se halle en un autoestado Ψ_j

$\langle \hat{A} \rangle = \int \sum_j c_j^* \Psi_j^* \hat{A} \sum_i c_i \Psi_i = \sum_i \sum_j c_j^* \Psi_j^* a_i c_i \Psi_i = \sum_j |c_j|^2 a_j$

$\frac{d \langle \hat{F} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{F}] \rangle + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}$

Ehrenfest completo

Medir es llevar al sistema entre autoestados; Sea un sistema y tengo 2 observables \hat{P}, \hat{Q} a medir \Rightarrow

mido $\hat{P} \rightarrow$ hallo p_1 asociado a Ψ_1
 mido $\hat{Q} \rightarrow$ hallo q_2 asociado a Ψ_2

si $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0 \Rightarrow$ p_1 es autovalor de \hat{Q}
 q es " " " \hat{P}

No lo saca de autoestado al medir otra cosa.
 Si conmutan los estoy pasando entre autoestados

● Simetría de Reflexión e Paridad

Sea $V(x) = V(-x) \rightarrow H(x) = H(-x)$

$H(x)\psi(x) = E\psi(x) \rightarrow H(-x)\psi(-x) = E\psi(-x) \rightarrow H(x)\psi(-x) = E\psi(-x)$

$\psi(x), \psi(-x)$ son autofunciones de H con autovalor E

$\psi(x) \pm \psi(-x)$ es autofunción de H

Defínese \hat{P}
operador paridad

$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$

El operador paridad refleja (No es observable)

Si no hay degeneración

$\psi(-x) = c \cdot \psi(x)$

c constante, porque como pertenecen a un mismo autovalor E

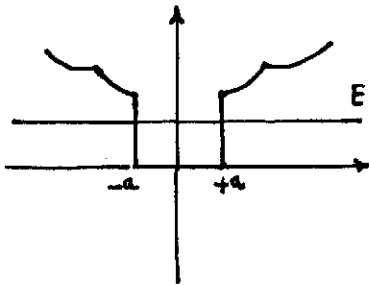
\Rightarrow evaluando en $-x$ es:

$\psi(-[-x]) = c\psi(-x)$

$\psi(x) = c \cdot (c\psi(x)) = c^2\psi(x)$

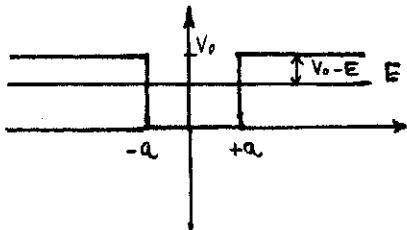
$c = +1$ simétrica (par)

$c = -1$ antisimétrica (impar)



$V > E \rightarrow$ estado ligado

$V(x) = V(-x) \rightarrow |\psi(x)|^2 = |\psi(-x)|^2 \Rightarrow$ basta resolver para $x > 0$



* Pozo Cuadrado

$|x| < a$ $\psi(x) = A \cdot \cos kx$
 $B \cdot \sin kx$

$k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$

$x > a$ $\psi(x) = C \cdot e^{-\alpha x}$

$\alpha = \left[\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\right]^{1/2}$

clásicamente tenemos una partícula confinada en el pozo

$E < V_0$ y con cualquier

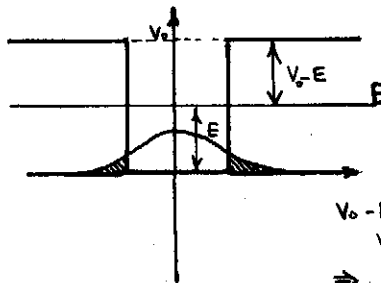
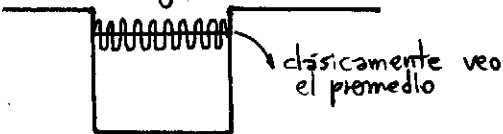
energía:

$E = 0$ reposo

$E > 0$ rebota entre $(-a, +a)$

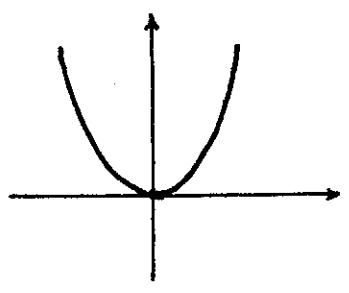
inconsistente con PI

con n muy grande entran muchos $\lambda \Rightarrow$



En realidad no hay partícula con $T < 0$ sino que la incertidumbre de medida \rightarrow fuera es del orden de $V_0 - E$

● EL Oscilador Armónico



$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \rightarrow$ potencial par hay que usar la condición de normalización
 $\psi_n(x) = \pm \psi(-x)$ $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n'' + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi_n = E_n \psi_n$$

es útil adimensionalizar \Rightarrow

$$-\frac{\hbar^2}{2m\hbar\omega} \psi_n'' + \frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar\omega} \psi_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} \psi_n$$

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{\hat{P}^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar\omega} = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\bar{x}^2}{2}$$

$$\bar{E} = \frac{E_n}{\hbar\omega} \quad \bar{P} = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}} = \frac{P}{P_0} \quad \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} = \frac{x}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$P_0^2 = m\hbar\omega$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \alpha \bar{x} = x$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m\hbar\omega} \frac{1}{\alpha^2} \psi_n''(\bar{x}) + \frac{m\omega^2 \bar{x}^2 \alpha^2}{2\hbar\omega} \psi_n(\bar{x}) = \frac{E_n}{\hbar\omega} \psi_n(\bar{x})$$

$$-\frac{1}{2} \psi_n''(\bar{x}) + \frac{1}{2} \bar{x}^2 \psi_n(\bar{x}) - \bar{E} \psi_n(\bar{x}) = 0$$

Ecuación adimensional del oscilador armónico (Hermite)

$$\psi_n''(\bar{x}) + [2\bar{E} - \bar{x}^2] \psi_n(\bar{x}) = 0 \quad [1]$$

* condiciones de borde

si $\bar{x} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \psi_n'' = \bar{x}^2 \psi_n \Rightarrow \psi(\bar{x} \rightarrow \infty) = e^{-\frac{\bar{x}^2}{2}}$ es solución pues converge ($e^{+\frac{\bar{x}^2}{2}}$ diverge)

Se propone:

$$\psi_n(\bar{x}) = e^{-\frac{\bar{x}^2}{2}} \cdot H_n(\bar{x}) \quad \text{y metiéndola en [1] es:}$$

para todo \bar{x}

$$[2] \quad H_n''(\bar{x}) - 2\bar{x} H_n'(\bar{x}) + [2\bar{E} - 1] H_n(\bar{x}) = 0 \quad \text{Ecuación de Hermite}$$

Quiero que $H_n(\bar{x})$ sea una f. analítica \Rightarrow se puede expresar como:

$$H_n(\bar{x}) = \sum_r a_r \bar{x}^r \quad [3]$$

Introduciendo [3] en [2] es:

$$\sum_r a_r (r(r-1) \bar{x}^{r-2} - 2\bar{x} r \bar{x}^{r-1} + [2\bar{E} - 1] \bar{x}^r) = 0$$

Diferenciando r veces se llega a:

$$a_{r+2} = \frac{a_r (2r - 2\bar{E} + 1)}{(r+1)(r+2)}$$

◀ fórmula de recurrencia

Conecta términos que difieren en 2. Depende de si elegimos par o impar \Rightarrow tenemos series con coeficientes pares (con impares nulos) y viceversa.

$$\frac{a_{r+2}}{a_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{r} \rightarrow 0$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{k! z^k}{(k+1)! z^{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{z(k+1)}$$

si $\Psi(x) = H_n(\bar{x}) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\sum_r a_r \bar{x}^r \right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$ podemos comparar a_r con a_k

$\frac{a_r}{a_k} = C$ (constante) \Rightarrow La expansión debe terminar en algún $r=n$ pues sino \sum_r diverge

ido $2r - 2\bar{E} + 1 = 0 \rightarrow \bar{E} = \frac{1+2n}{2} \Rightarrow \bar{E}_n = n + \frac{1}{2}$

$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$

← niveles de energía
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) = H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \cdot A_n$$

↑ constante normalización

$n=0$
fundamental

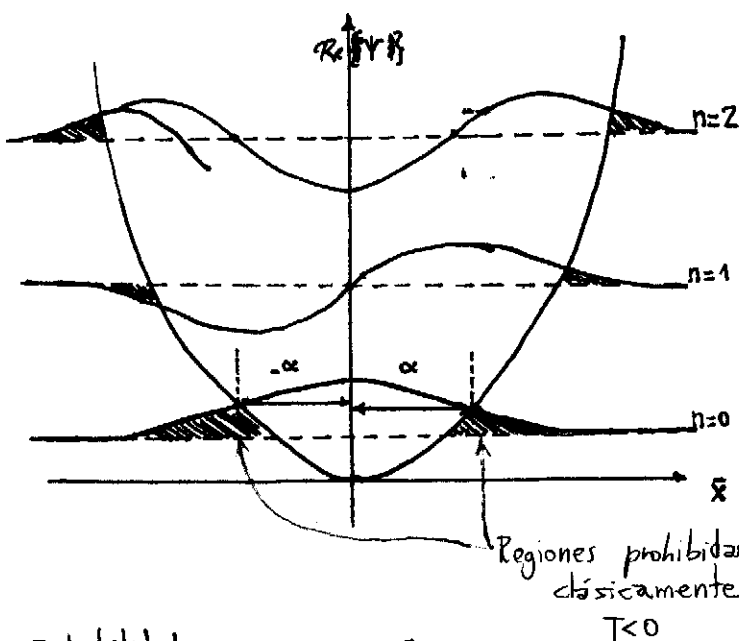
$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega ; \Psi_0(x) = \frac{1}{(\pi^{1/2} \alpha)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$$

Polinomios de Hermite

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^{1/2}} \frac{1}{(\pi^{1/2} 2^n n!)^{1/2}} H_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$$

$$\Psi_n(\bar{x}) = \frac{1}{(\pi^{1/2} 2^n n!)^{1/2}} H_n(\bar{x}) \cdot e^{-\frac{\bar{x}^2}{2}}$$



$n=1 \quad E_1 = \frac{3}{2} \hbar\omega$

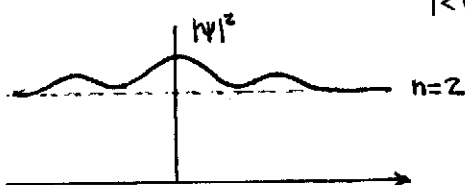
$$\Psi_1(x) = \frac{1}{(\pi^{1/2} 2 \alpha)^{1/2}} e^{-x^2/2\alpha^2} \cdot \frac{2x}{\alpha}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$x_{ret} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2} \hbar\omega}{m\omega^2}} = \pm \alpha$$

$\alpha \equiv$ longitud del oscilador
Es el punto de retorno clásico.
Cuánticamente hay prob. de que se halle en $|x| > \alpha$

Probabilidad



● Espectro de Planck

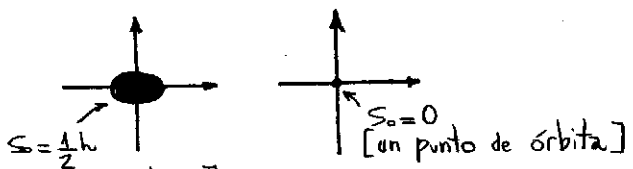
Planck $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_n = n\hbar\omega = nh\nu \end{array} \right.$

$S_n = \oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = nh$
 $S_{n+1} - S_n = h$

La órbita de mínima incerteza no puede ser $S_0 = 0$

corrección

$S_n = \oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot h$



[la órbita más baja]

$\psi_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$
 $\epsilon_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{p_{max}^2}{2m} \rightarrow \frac{p_{max} - p_{min}}{2} = 0$
 $m\hbar\omega = (\Delta p)^2$
 $\frac{m\omega \cdot \hbar}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} (\Delta p)^2$
 $\frac{\sqrt{m\omega}}{\hbar} \sqrt{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} (\Delta p \cdot 2)$
 $\frac{\hbar}{2\alpha} = \Delta p$

$\Delta x|_0 = \alpha$
 $\Delta p|_0 = \frac{\hbar}{2\alpha}$ } $\Delta x|_0 \cdot \Delta p|_0 = \frac{\hbar}{2}$ $n=0$
 mínimo incerteza
 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ $n \geq 1$

$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot N_n \cdot e^{-x^2/2\alpha^2} \cdot H_n(x)$ con $C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_n^* \psi_n$
 $\langle \hat{H} \rangle = \sum |C_n|^2 \epsilon_n$

Medir energía es proyectar en la base de autoestados de energía.

● Problemas en 3D

En general lo que se puede resolver son potenciales $V(\vec{r})$ separables

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

● Partícula libre

$$V(\vec{r}) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \Rightarrow \left(\nabla^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r}) = 0$$

con $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

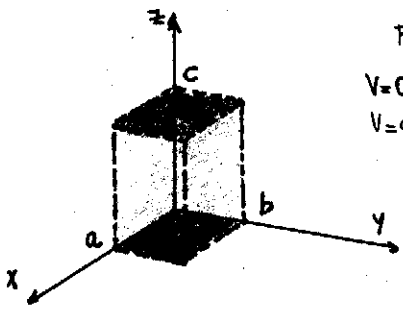
$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0$$

Ecuación de Helmholtz

Separamos con $\psi(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \Rightarrow$

$$\frac{e^{ik_x x}}{a^{1/2}} \frac{e^{ik_y y}}{b^{1/2}} \frac{e^{ik_z z}}{c^{1/2}} = \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}}{(abc)^{1/2}}$$

onda plana en 3D



pozo infinito en 3D

$V=0$ $|x| < a$; $|y| < b$; $|z| < c$
 $V=\infty$ $|x| > a$; $|y| > b$; $|z| > c$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{\pi n_x}{2a} \right]^2 + \left[\frac{\pi n_y}{2b} \right]^2 + \left[\frac{\pi n_z}{2c} \right]^2 \right)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

$$E = \frac{h^2}{32m} \left(\left[\frac{n_x}{a} \right]^2 + \left[\frac{n_y}{b} \right]^2 + \left[\frac{n_z}{c} \right]^2 \right)$$

Sea $a=b=c$ caja cúbica

$$E = \frac{h^2}{32ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Hay degeneración, que va creciendo. Es decir, para obtener un valor dado de E tengo varias combinaciones de n_x, n_y, n_z .

E [$\frac{h^2}{32ma^2}$]	n_x	n_y	n_z	degeneración
1	1	0	0	3
	0	1	0	
	0	0	1	
2	1	1	0	3
	0	1	1	
	1	0	1	
3	1	1	1	1
4	2	2	0	3
	0	2	2	
	2	0	2	
5	2	1	0	4
	1	2	0	
	0	1	2	
	0	2	1	

● Oscilador Armónico (isótropo)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \Rightarrow$$

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - [V_x + V_y + V_z]) \right\} \psi(\vec{r}) = 0$$

Helmholtz generalizada

$$k^2 = k^2(\vec{r})$$

$$(\nabla^2 + k^2(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = 0$$

Resultan 3 osciladores independientes en su de las coordenadas, pues no hay términos cruzados.

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_x}\right)^{1/4}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_y}\right)^{1/4}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_z}\right)^{1/4}} \cdot \frac{1}{\left(\pi^{1/2} z^{(n_x+n_y+n_z)} \cdot (n_x! n_y! n_z!)\right)^{1/2}} \cdot H_{n_x} \left[\frac{x}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_x}\right)^{1/2}} \right] \cdot H_{n_y} \left[\frac{y}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_y}\right)^{1/2}} \right] \cdot H_{n_z} \left[\frac{z}{\left(\frac{\hbar}{m\omega_z}\right)^{1/2}} \right] \cdot e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{\hbar}{m\omega_x}\right)}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\left(\frac{\hbar}{m\omega_y}\right)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\left(\frac{\hbar}{m\omega_z}\right)}}$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right)$$

Si es isotropo el oscilador $\Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega_z \Rightarrow$

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right)$$

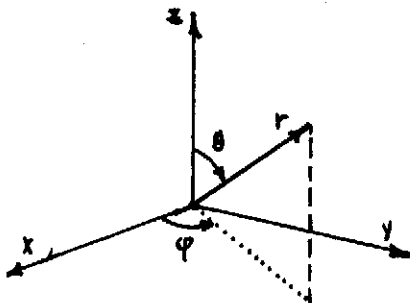
n	E	n_x	n_y	n_z	degeneración
n=0	$E = \hbar\omega_0 \frac{3}{2}$	0	0	0	1
n=1	$E = \hbar\omega_0 \frac{5}{2}$	1	0	0	3
		0	1	0	
		0	0	1	
n=2	$E = \hbar\omega_0 \frac{7}{2}$	2	0	0	6
		0	2	0	
		0	0	2	
		1	1	0	
		0	1	1	
		1	0	1	

$$\text{degeneración} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega_0$$

● Potenciales Centrales

$$V = V(r)$$

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; es el \vec{r} de esféricas



$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{x}) + V(r) \cdot \Psi(\vec{x}) = E \cdot \Psi(\vec{x}) \quad (1)$$

Se busca solución de la forma

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \Rightarrow$$

Metiendo $\Psi(r, \theta, \varphi)$ en (1) y multiplicando por $\frac{r^2 \cdot \sin^2 \theta}{R \cdot \Theta \cdot \Phi}$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{2mr^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} (E - V(r)) = 0$$

$= -U^2$

$$\Phi(\varphi) = e^{+iU\varphi} + e^{-iU\varphi}$$

pero por simetría azimutal $U = m \in \mathbb{Z}$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \rightarrow$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta \cdot \Theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = 0$$

* en r) $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = \frac{l(l+1)}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mR}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)R}{r^2} = 0$

* en θ) $\frac{1}{\sin \theta \cdot \Theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\frac{l(l+1)}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin \theta} \cdot \Theta + l(l+1) \cdot \Theta = 0$

Para la ecuación en θ se define una nueva variable $x = \cos \theta$; $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[\beta^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0$$

donde $P(x) \equiv$ polinomio asociado de Legendre
 Esta ecuación tiene soluciones $\beta^2 = l(l+1)$, $[-l \leq m \leq l]$, $l \in \mathbb{N}$ importante

$|m| \leq l$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Polinomios asociados de Legendre

si $m=0$ (hay simetría azimutal) se tiene:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$$

Polinomios de Legendre

$|m| \leq l$

$$\Theta_l^m(\theta) \cdot \Phi_m(\varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{e^{im\varphi}}{(2\pi)^{1/2}}$$

$\Theta_l^m(\theta)$ $\Phi_m(\varphi)$

La parte angular entonces son los armónicos esféricos
 La parte radial la reescribimos como:

$$\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d^2R}{dr^2} + \left[k(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \text{ con } k(r) = \frac{2m(E-V(r))}{\hbar^2}$$

si defino $R = \frac{u}{r} \Rightarrow$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0$$

si $l=0 \rightarrow$ es un problema 1D en la coordenada r

● Momento Angular

Clásicamente se sabe que con fuerzas centrales \vec{L} es constante. Entonces como Y_l^m son la parte radial de una $\Psi(r, \theta, \varphi)$ para una fuerza central \Rightarrow debe suceder que Y_l^m sean autoestados de los operadores \hat{L}

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$(\vec{L})_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$$

$$L_x = Y p_z - Z p_y$$

$$L_y = Z p_x - X p_z$$

$$L_z = X p_y - Y p_x$$

clásico

$$\hat{L} = -i\hbar(\hat{r} \times \hat{\nabla})$$

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

cuántico

Con $V=V(r)$, L es constante de mov. \Rightarrow al medir L debo estar en un autoestado Ψ de \hat{L} y debo encontrarme midiendo sus autovalores.

... $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, luego:

$$-i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -i\hbar(im) e^{im\varphi} \quad (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = (-i\hbar)^2 (im)^2 e^{im\varphi}$$

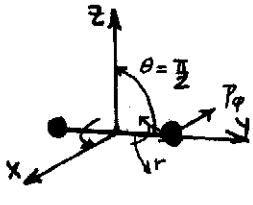
$$\hat{L}_z^2 \Phi(\varphi) = m^2 \hbar^2 \Phi(\varphi)$$

\Rightarrow $\Phi_m(\varphi)$ es autoestado de L_z^2 con autovalores $(m\hbar)^2$

m da una "medida" del momento angular en unidades de \hbar

Ejemplo

molécula diatómica que gira en $\theta = \pi/2$ libre. L_z es constante \Rightarrow se halla en estado $\Phi_m(\varphi)$



$$L_z = r \cdot p_\varphi \rightarrow p_\varphi^2 = \frac{L_z^2}{r^2}$$

$$E = \frac{p_\varphi^2}{2\mu} = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} = \frac{m^2 \hbar^2}{2\mu r^2}$$

masa reducida

Asimismo, como:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{L}_z \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{L}_z] \rangle + \frac{\partial \langle \hat{L}_z \rangle}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \Rightarrow \Phi_m(\varphi)$ autofunción de \hat{L}_z , lo es de $\hat{H} \Rightarrow$ se halla en autoestado de la energía.

Se puede

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = (\pm 1) i \hbar \hat{L}_k$$

+1 cíclica
-1 anticíclica

$$\begin{cases} [\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \\ [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \\ [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow Es posible tener autofunciones simultáneas de $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$

$$\hat{H}(R Y_l^m) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 R + V(r) \cdot R + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} R \right) Y_l^m$$

$$L_+ = L_x + i L_y$$

$$L_- = L_x - i L_y$$

\Rightarrow

$$L_+ Y_l^m = \hbar [(l-m)(l+m+1)]^{1/2} Y_l^{m+1}$$

$$L_- Y_l^m = \hbar [(l+m)(l-m+1)]^{1/2} Y_l^{m-1}$$

operador de subida

operador de bajada

● Partícula Libre en Potencial Central

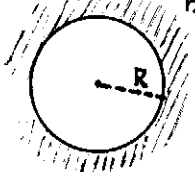
Para partícula libre $V(r)=0 \rightarrow$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U = 0$$

$$U(r) = J_l(kr)$$

← Funciones de Bessel

Pozo esférico de radio R



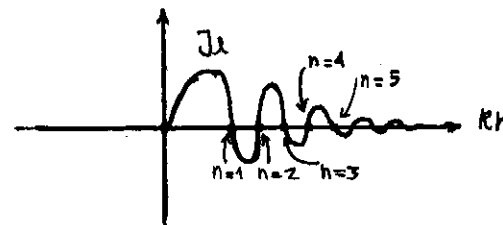
$$J_l(kR) = 0$$

$$\Rightarrow kR = \xi_{ln} \Rightarrow k = \frac{\xi_{ln}}{R}$$

$$E_{ln} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\xi_{ln}^2}{R^2}$$

niveles de energía

cero de orden n para J_l



Se puede ver que

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

cumple que

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} + \nabla_r^2 = \nabla^2$$

El laplaciano puede descomponerse en una parte radial y una parte angular.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{2r^2 m}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V_{eff}(r)$$

$$V_{eff} = V(r) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2}$$

Cuando hay momento angular no nulo aparece el potencial centrífugo

$$\hat{L}^2 \Theta_l^m \Phi_m = \hbar^2 [l(l+1)] \cdot \Theta_l^m \Phi_m$$

$l(l+1)$ es una medida del cuadrado de L en unidades de \hbar^2

$$\begin{cases} \hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m \\ \hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m \end{cases}$$

● Oscilador Armónico en 3D [esféricas]

$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ Lleva a:

$$R_n^l(r) = N_{nl} \cdot e^{-r^2/2\alpha^2} \cdot \left(\frac{r}{\alpha}\right)^l \cdot L_n^{l+1/2} \left[r^2/\alpha^2\right]$$

$\alpha^2 = \frac{\hbar}{m \cdot \omega}$

Polinomios de Laguerre

$\Rightarrow \Psi(r, \theta, \varphi) = R_n^l(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$

$E_{nl} = \hbar \omega \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2}\right)$

$N = 2n + l$

n	l	E	deg(l)	N	deg(E)
0	0	$\hbar \omega \frac{3}{2}$	1	0	1
0	1	$\hbar \omega \frac{5}{2}$	3	1	3
1	0	$\hbar \omega \frac{7}{2}$	1	2	6
0	2	$\hbar \omega \frac{7}{2}$	5		
1	1	$\hbar \omega \frac{9}{2}$	3	3	10
0	3	$\hbar \omega \frac{9}{2}$	7		

$\text{deg}(l) = 2l + 1$

degeneración orbital \rightarrow hay $2l+1$ valores asociados con cada valor de m

$\text{deg}(E) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

● Átomo de 1 electrón

$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$

Hasta ahora, salvo pánrafo anterior, se han tratado problemas centrales (rotación de sistemas) sin movimiento radial.

Para estos casos hay que resolver la parte radial

$R(r) = \frac{U(r)}{r}$

Radio de Bohr

$a_0 = \frac{\hbar}{m e^2 Z}$

$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U = 0$

$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[\frac{2M}{\hbar^2} E + \frac{2MZe^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$

$E > 0$ estados no ligados

$E < 0$ estados ligados

con el cambio

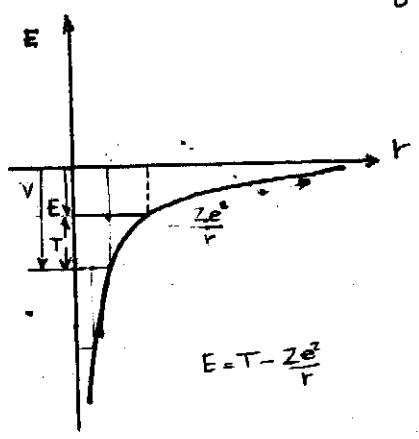
$\rho = \frac{r}{a_0}$

$$U_{Nl}(\rho) = N_{Nl} \cdot e^{-\rho/2} \cdot \rho^l \cdot L_{N-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

▲ Polinomios de Laguerre

La serie debe contarse \Rightarrow

$N = n + l + 1$



$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2N^2 \hbar^2}$

$N = 1, 2, 3, \dots$
 $l < N$

$N \equiv$ # cuántico principal

$n \equiv$ # cuántico radial. Etiqueta los $L_{N-l-1}^{2l+1} \equiv L_n$

$\rho =$

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \cdot e^{-\frac{Z \cdot r}{N \cdot a_0}} \cdot r^l \cdot L_{N-l-1}^{2l+1} \left(\frac{Z \cdot r}{N \cdot a_0} \right)$$

con $a_0 = \frac{\hbar^2}{m \cdot e^2} \equiv$ radio clásico de Bohr

n	l	N	deg(l)	deg(E)
0	0	1	1	1
0	1	2	3	4
1	0	1	1	1
1	1	3	3	9
2	0	1	1	1
0	2	5	5	5

$$N = n + l + 1$$

$$l < N$$

$$\text{deg}(l) = 2l + 1 \quad (\text{degeneración del nivel})$$

$$\text{deg}(E) = N^2$$

$$n^2 + 2n(l+1) +$$

$$E_N = E_{nl} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2 \hbar^2 (n+l+1)^2}$$

$$-l \leq m \leq l$$

$$\text{si } l=0 \rightarrow m=0$$

$$\text{si } l=1 \rightarrow m=0, \pm 1$$

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

N=2

$$\Psi_{010}$$

$$\Psi_{011}$$

$$\Psi_{01-1}$$

$$\Psi_{100}$$

compatibles con la misma energía

N=3

$$\Psi_{200} \quad \Psi_{11-1} \quad \Psi_{020}$$

$$\Psi_{110} \quad \Psi_{02-2} \quad \Psi_{021}$$

$$\Psi_{111} \quad \Psi_{02-1} \quad \Psi_{022}$$

$$\Psi_{100}$$

compatibles con la misma energía

$$\hat{H} \Psi = E_{nl} \Psi$$

$$\hat{L}^2 \Psi = l(l+1) \hbar^2 \Psi$$

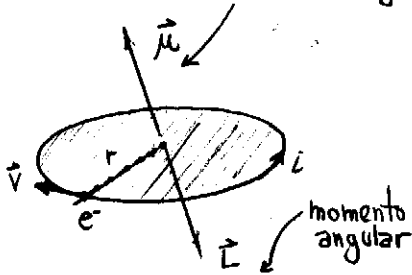
$$\hat{L}_z \Psi = m_l \hbar \Psi$$

$\hat{L}_x \hat{L}_y$ no tienen valor definido dado que no conmutan con \hat{H}

ya veremos porqué el subíndice

● Spín y Experimento Stern-Gerlach

momento magnético consecuencia del giro del electrón



$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2mC} \vec{L} = -\frac{g \mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

con $\mu_B \equiv$ magnetón de Bohr
 $g \equiv$ factor g orbital

cuánticamente es:

$$\mu_z = \frac{\mu_B}{\hbar} \sqrt{l(l+1)} \hbar = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_z = -\frac{\mu_B}{\hbar} L_z = -\frac{\mu_B}{\hbar} m_l \hbar = -\mu_B \cdot m_l$$

Un $\vec{\mu}$ en un campo \vec{H} externo precesa, tiende a alinearse con \vec{H} pero se mantiene a un θ constante uniforme

[Precesión de Larmor]

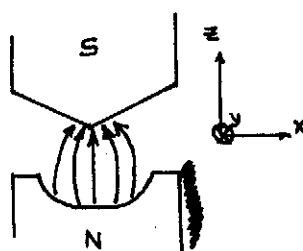
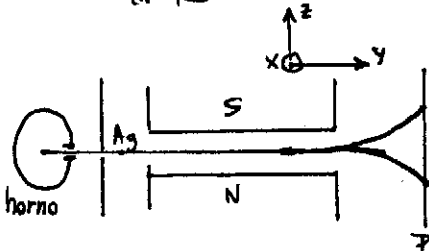


Un \vec{H} uniforme no traslada al átomo; solo orienta su $\vec{\mu}$ (y por ende su \vec{L})

Se envían átomos de Ag (100%) a través de un \vec{H} no uniforme. Como los átomos son neutros la única fuerza sobre ellos es

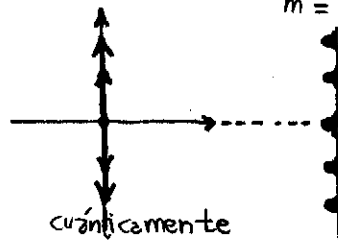
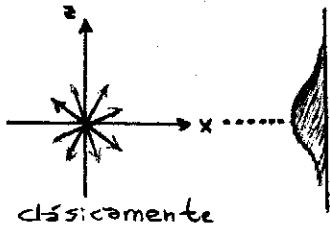
$$F_z = \frac{\partial H_z}{\partial z} \mu_z$$

Entonces clásicamente se esperaba que μ_z pudiese valer cualquier cosa entre $+\mu$ y $-\mu$.



cuánticamente

$$\mu_z = -\mu_B \cdot m \quad \text{con} \quad -l \leq m_l \leq l$$



$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$m = -2, -1, 0, 1, 2$$

Se esperaban varias componentes discretas
Pero se obtenía en general solo dos componentes discretas simétricas

En 1927 Phipps y Taylor hacen experimento con átomos de H en estado base ($N=1; n=0; l=0; m=0$) $\Rightarrow \mu_z = 0$ y el haz no debería verse afectado. Pero se vuelven a obtener 2 haces.
 \Rightarrow el átomo tiene algún μ intrínseco.

Se hipotetiza que: el e⁻ tiene un momento angular intrínseco, \vec{S} que origina un $\vec{\mu}_s$ planteado como $\equiv \text{spin}$

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

$$S_z = m_s \hbar$$

$$\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

$$\mu_z^s = -g_s \mu_B m_s$$

cuánticos s, m_s

$g_s \equiv$ factor g de spin

De la experiencia μ_z^s debe tomar dos valores de igual magnitud y signo opuesto.

$$-s \leq m_s \leq s \quad \Rightarrow \quad \text{si } s = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \leq m_s \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } S_z = +\frac{1}{2} \hbar \quad \text{o} \quad S_z = -\frac{1}{2} \hbar$$

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

Ψ_{n, l, m_l, m_s} es una buena función de onda si se ignora efecto spin-órbita.

Matrices de Pauli

Pauli desarrolla un álgebra del spin. Dos autoestados de spin:

$$\begin{aligned} \hat{S}_z |+\rangle &= \frac{\hbar}{2} |+\rangle \\ \hat{S}_z |-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |-\rangle \end{aligned}$$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vectores base \rightarrow spinores \rightarrow

$$\langle + | + \rangle = (1 \ 0)$$

$$\langle - | - \rangle = (0 \ 1)$$

$$\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$$

$$\langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y$$

operador de subida/bajada

$$\hat{\sigma}_+ |+\rangle = 0$$

$$\hat{\sigma}_+ |-\rangle = |+\rangle$$

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = \pm 2i \hat{\sigma}_k$$

+ cíclico
- anticíclico

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \pm i\hbar \hat{S}_k$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = 3 \cdot \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\hat{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}$$

• Interacción Spin-Órbita

Goudsmit y Uhlenbeck postulan el spin del e^- en 1925. Buscaban entender la estructura fina del espectro del H. Proponen:

un e^- tiene \hat{S} o $\vec{\mu}_s$ inherentes cuya componente en \hat{z} se especifica por el # cuántico m_s que puede tomar los valores $+\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$.

La separación de los niveles de energía se interpretaría debida a una Energía potencial de orientación del $\vec{\mu}_s$ con el campo \vec{B} del átomo. Esta es la interacción spin-órbita.

Es un acoplamiento entre \vec{L} y \vec{S} originado por el momento del e^-

Luego $\Delta U = \lambda \vec{L} \cdot \vec{S} \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + \lambda \hat{L} \cdot \hat{S}$

$[\hat{H}, \hat{L}_z] \neq 0$ aunque $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
 $[\hat{H}, \hat{S}_z] \neq 0$ $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$ Perdemos la conmutatividad de \hat{L}_z, \hat{S}_z
 $[\hat{H}, \hat{S}^2] = 0$

Entonces no se pueden determinar simultáneamente \hat{L}_z y \hat{S}_z , m_l y m_s no son buenos # cuánticos

Introducimos:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \leftarrow \text{Momento angular total}$$

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S}$$

$$[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0$$

$$[\hat{J}_z, \hat{H}] = 0$$

\Rightarrow

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

$$J_z = m_j \hbar$$

$$-j \leq m_j \leq j$$

$$\hat{L}^2 = l(l+1)\hbar^2$$

$$\hat{J}^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$\hat{J}_z = m_j \hbar$$

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\Psi_{nl, s=\frac{1}{2}, j, m_j} \equiv \Psi_{nl, j, m}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \hat{J}_k$$

+ cíclico
- anticomutativo

En cuántica \vec{L}, \vec{S} tienen valores constantes dados por los # l, m_l, m_s si no hay interacción spin-órbita

Con esto y los operadores \hat{J}_+, \hat{J}_- se puede probar

$$J_z = L_z + S_z$$

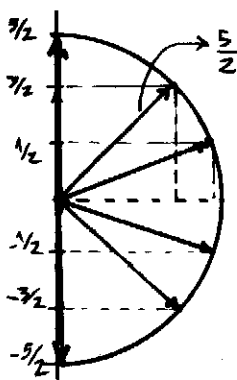
$$m_j = m_l + m_s$$

$$(m_j)_{\max} = l + \frac{1}{2}$$

$$(j)_{\max} = l + \frac{1}{2}$$

$$(j)_{\min} = l - \frac{1}{2}$$

$$l=2 \rightarrow j = \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \Rightarrow m_j = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$



$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

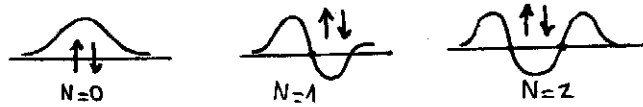
$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$$

$$l - \frac{1}{2} \leq j \leq l + \frac{1}{2}$$

$$\Psi_{nl, l \pm \frac{1}{2}, m_j}(\vec{r}, S_z)$$

cuatro # cuánticos

Debido al spin cada estado cuántico se desdobra en dos \Rightarrow explica la estructura fina de los espectros



● Partículas Idénticas

¿Cómo se diferencian 2 e⁻ en el átomo de He? Sus Ψ se superponen \Rightarrow están en el mismo estado

Operador de intercambio
(permute las # cuánticas de las partículas i, j)

$$\hat{E}_{ij} \Psi(1, 2, \dots, i, j, \dots, N) = \Psi(1, 2, \dots, j, i, \dots, N)$$

$$\hat{E}_{ij}^2 = \mathbb{1}$$

$$\hat{E}_{ij} \hat{E}_{ij} \Psi(i, j) = \Psi(i, j) = \hat{E}_{ij} \Psi(j, i)$$

$$\hat{E}_{ij} \hat{H}(i, j) \Psi(i, j) = \hat{H}(j, i) \Psi(j, i) = \hat{H}(i, j) \Psi(j, i) \Rightarrow [\hat{H}, \hat{E}_{ij}] = 0$$

tienen base de autofunciones en común \Rightarrow misma Energía

$$\begin{aligned} \hat{H}(1, 2) \Psi(1, 2) &= \hat{H}(2, 1) \Psi(1, 2) \\ \hat{E}_{12} \hat{H}(1, 2) \Psi(1, 2) &= \hat{H}(2, 1) \Psi(2, 1) = \hat{H}(1, 2) \Psi(2, 1) \\ \hat{E}_{12} \hat{H}(1, 2) \Psi(1, 2) &= \hat{H}(1, 2) \hat{E}_{12} \Psi(1, 2) \\ [\hat{E}_{ij}, \hat{H}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{12} \Psi(1, 2) &= \Psi(2, 1) = c \cdot \Psi(1, 2) \rightarrow \\ \hat{E}_{12} \Psi(2, 1) &= c \Psi(2, 1) = c^2 \Psi(1, 2) \\ \Psi(1, 2) &= c^2 \Psi(1, 2) \Rightarrow c = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Psi(1, 2)$ y $\Psi(2, 1)$ corresponden a una misma energía E

$\Psi(1, 2) = + \Psi(2, 1) \Rightarrow$	Ψ simétrica	bosón	fotón, hidrógeno
$\Psi(1, 2) = - \Psi(2, 1) \Rightarrow$	Ψ antisimétrica	fermion	e ⁻ , protón, neutrón

Las partículas se dividen en dos tipos \rightarrow

La Ψ de un sistema de partículas es simétrica o antisimétrica respecto al intercambio de sus argumentos.

La simetría no cambia con el tiempo.

Hay relación entre spin y simetría de intercambio.

bosón	obedece	estadística	Bose-Einstein
fermion		estadística	Fermi-Dirac