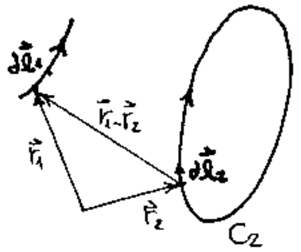
Magneto estática

Magnetoestática trata con corrientes que no dependen del tiempo.

* Fuerza entre dos circuitos



$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\vec{l}_1 \times \int_{C_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

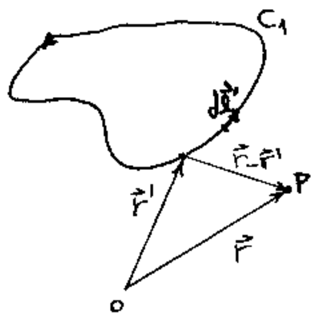
fuerza que hace el circuito 2 sobre un elemento del circuito 1

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times \underbrace{\int_{C_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}_{\equiv \vec{B}(\vec{r}_1)}$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \int_{C_1} I_1 \, d\vec{l}_1 \times \vec{B}}$$

◀ fuerza del circuito 2 sobre el circuito 1

C_1 ← conductor



$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I \, d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

◀ inducción magnética en $\vec{r}$ debido a un circuito cerrado C_1

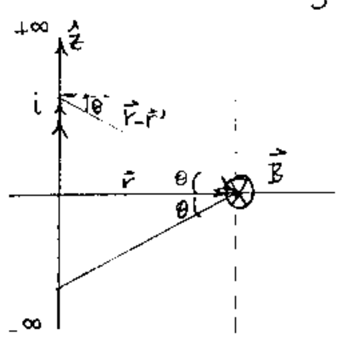
↑ BIOT-SAVART

$$\vec{B} \sim d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

⟵ Consideraciones de simetría aquí ayudarán a dilucidar hacia donde apunta $\vec{B}$

* hilo infinito

Hay simetría de traslación en $\hat{z}$, rotación en φ, reflexión en zx, zy



la parte $(0, -\infty)$ del hilo refuerza la contribución de la superior

$\vec{r} - \vec{r}' = r - z'$

$= (r, 0) - (0, z') = (r, z$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{|I d\vec{l}| \, |\vec{r} - \vec{r}'| \overbrace{\operatorname{sen}(\theta + \pi/2)}^{\cos\theta}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r}|}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I \, dz \, . \, r}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} . r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

en $\hat{\varphi}$

$$B = \frac{2 \mu_0 I}{4\pi} . r \int_0^{+\infty} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi} \cdot \left(\frac{z'}{r^2 \sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \Bigg|_0^{+\infty}$$

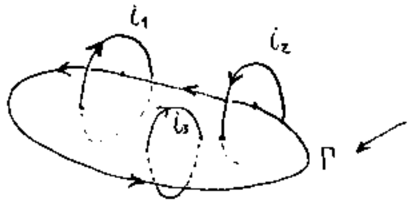
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\frac{+z'}{|z'| \sqrt{\frac{r^2}{z'^2} + 1}} \right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{2\pi r} \hat{\varphi}}$$

- **Ley de Ampere**

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot i_c}$$

donde i es corriente concatenada por Γ



$i_1 - i_2 = I$ concatenada

Γ no concatena a i_3

stokes

ley de ampere

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i = \mu_0 \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Corrientes

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{J}$ son corrientes en volumen

$$I = \int \vec{g} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{g}$ son corrientes superficiales

$$[\vec{g}] = \frac{A}{m} \quad ; \quad [\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$$

Observación

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I \, d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \Rightarrow$$

se puede pensar que para una carga en movimiento tendríamos el campo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

• Fuerza Magnética

El campo $\vec{B}$ ejerce fuerzas sobre cargas en movimiento

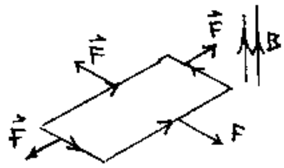
$$\boxed{\vec{F} = q_0 \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

Fuerza de Lorentz

$q_0 \equiv$ carga de prueba que no afecta ni a $\vec{E}$ ni a $\vec{B}$

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \oint_{\Gamma} I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

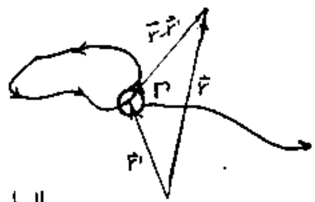
si $\vec{B}$ es uniforme y Γ es cerrada

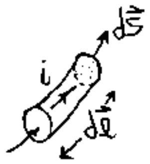


← el efecto total de las fuerzas es nulo

* Divergencia Nula

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I\, d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \int \frac{\vec{J} \cdot d\vec{S}\; d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{J} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot d\Omega$$





Para hallar B integramos distribuciones de corriente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \cdot \left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{J})}_{=0} - \vec{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \right) \right]$$

pues $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}\,')$ y $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_r$

IDENTIDAD

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \left(-\vec{J} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \right] \right)$$

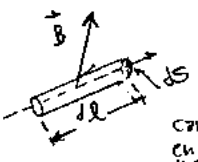
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \left(-\vec{J} \cdot \left[\underbrace{\vec{\nabla}_r \times \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right)}_{=0 \text{ por ser rotor de un grad}} \right] \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

* Fuerza sobre un conductor

← Fuerza sobre un elemento diferencial

$$d^2\vec{F} = \underbrace{n \cdot q \cdot dS \cdot dl}_{\text{cargas en el diferencial de circuito}} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot d\Omega \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot \frac{dl}{dt} \cdot dS \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = i \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int i \cdot d\vec{l} \times \vec{B}}$$

$dl = v \cdot \cos\theta \cdot \delta t$

$$\delta i = \frac{\delta q}{\delta t} = n \cdot q \cdot \frac{\delta l \cdot \delta S}{\delta t}$$

$$\delta i = \frac{\delta q}{\delta t} = n \cdot q \cdot V \cos\theta \cdot \delta S$$

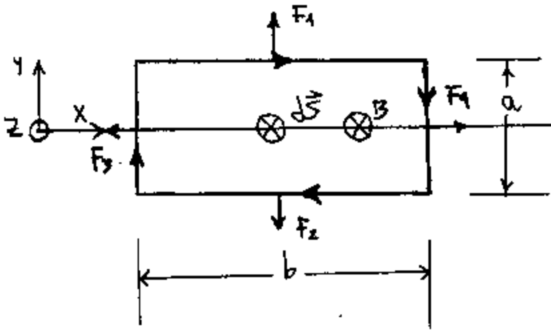
$$\delta i = n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

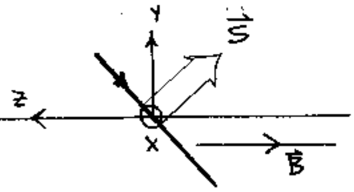
$$\delta i = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- **Torque de la F^m sobre una espira con corriente**

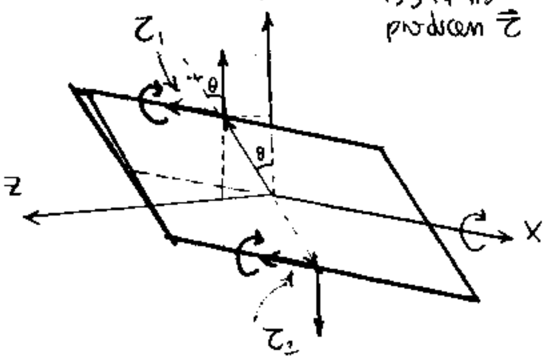
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$





Sobre la espira hay cuatro fuerzas (de resultante nula)

$$\vec{F}_1 = \int i\, d\vec{l} \times \vec{B} = i \int_{-b/2}^{b/2} (dx\, \hat{x}) \times (-B_0)\hat{z} = i\, B_0\, b\, \hat{y}$$



$\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ no producen $\vec{\tau}$

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 = \frac{a}{2}(\cos\theta\, \hat{y} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{z}) \times (i B_0 b)\hat{y}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_1 = -\frac{a}{2} \operatorname{sen}\theta\, i B_0 b\, \hat{x}$$

$$\vec{\tau}_1 = -i \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot B$$

produce un efecto de giro

$$\vec{\tau}_2 = -\frac{i\vec{S}}{2} \times \vec{B} \qquad \vec{\tau}_1 = i \cdot \frac{\vec{S}}{2} \times \vec{B}$$

El efecto del $\vec{\tau}$ es que $\vec{S}$ se acerca a $\vec{B}$

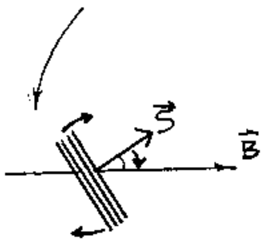
$$\boxed{\vec{\tau} = i \vec{S} \times \vec{B}}$$

donde $\vec{S}$ es la superficie orientada de la espira

Se define $\boxed{i \vec{S} \equiv \vec{m}}$ ◄ momento dipolar magnético

Para una bobina de N vueltas se tendría:

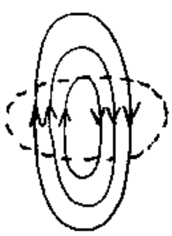
$$\boxed{\vec{\tau} = N \underbrace{i}_{\text{corriente por cada espira}} \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}}$$



◄ se tiende a orientar con el campo

- **Monopolos Magnéticos**

Experimentalmente se ve que las líneas de flujo de $\vec{B}$ son continuas; no presentan principio ni fin; entonces:



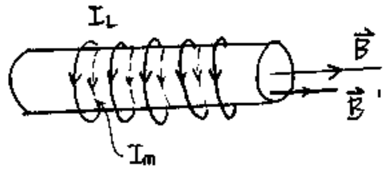
$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, d\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

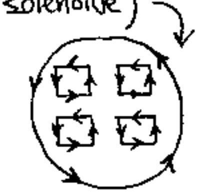
con $\Sigma = \partial\Omega$ para toda Σ

$\therefore$ no existen "cargas" magnéticas

• Medios Magnéticos



Surge campo $\vec{B}'$ debido a los dipolos $\vec{m}_i$ orientados. El campo $\vec{B}$ los orienta → las corrientes internas tienden a cancelarse y se genera una superficial (el cilindro se comporta como un solenoide)



Modelos

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{B}' = \mu_0 \vec{M} \\ \vec{M} = \chi \vec{H}\end{array}}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\oint_\Gamma (\vec{B} - \vec{B}')\, d\vec{l} = \oint_\Gamma \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_\Gamma (\vec{B} - \mu_0 \vec{M})\, d\vec{l} = \mu_0 . I_L$$

$$\oint \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\equiv \vec{H}} d\vec{l} = I_L$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \rightarrow \boxed{\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_L}$$

concatenada

Ampere para medios

$$\mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{H} + \mu_0 . \chi \vec{H} = \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \vec{B}$$

$$\boxed{\mu_0 \varkappa \vec{H} = \vec{B}}$$

$$\mu \vec{H} = \vec{B}$$

NB: $\vec{H}$ es conservativo si Γ no concatena corrientes

* Ecuaciones de Maxwell

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_L = \int_\Sigma \vec{J}_L \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \text{x stokes}$$

$$\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_\Sigma \vec{J}_L \cdot d\vec{S} \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_L}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \chi \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\varkappa \mu_0 = \mu$$

$$(1 + \chi) = \varkappa$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} . \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

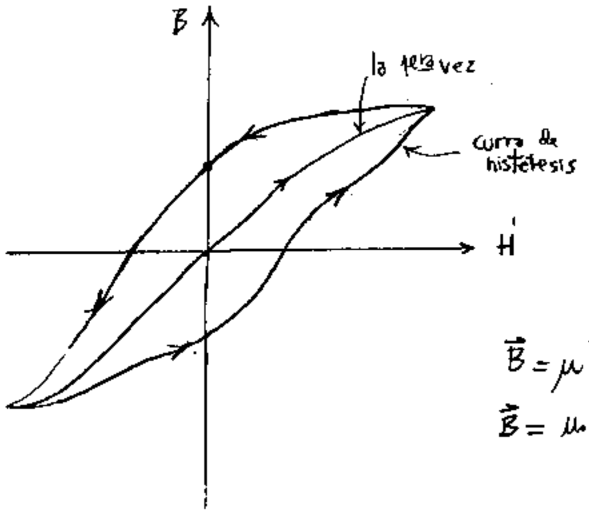
$$\vec{J}_L = \frac{1}{\mu_0} \vec{J} \mu_0 - \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

se demuestra aparte → $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_m}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \equiv \rho_m$$

podemos considerar como una densidad en volumen de "polos magnéticos" de la imanación

* Imanación



Al aumentar la intensidad de corriente $\vec{B}'$ varía

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 . \chi \vec{H}$$

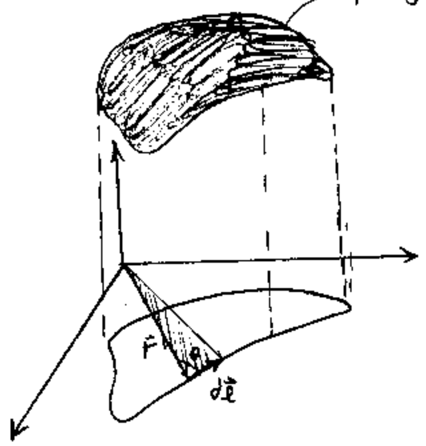
El material retiene cierto $\vec{M}$

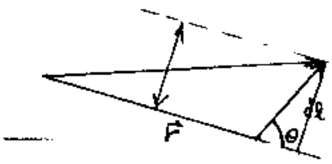
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \varkappa \vec{H}$$

vejiga en $\mathbb{R}^3$

se puede proyectar en cada plano





$|\vec{r}\times d\vec{l}\,| = r.dl.\,sen\,\theta$

$r.\,\overbrace{sen\theta . dl}^{\text{altura del triángulo}}$ → base

$Area = \frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{l}\,| \rightarrow \frac{1}{2}\vec{r}\times d\vec{l} = \vec{S}$ → área orientada

$|\vec{r}\times d\vec{l}\,| \rightarrow \quad \vec{S} = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\vec{r}\times d\vec{l}$

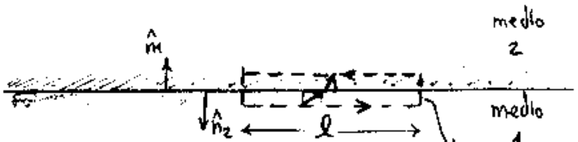
momento magnético ⟶ $\boxed{\vec{m} = I.\vec{S} = \frac{I}{2}\oint_{\Gamma}\vec{r}\times d\vec{l}}$

		Volumen	Superficie	
$\vec{B}$	rot	$\vec{J}_T = \vec{J}_L + \vec{J}_M$ $\vec{\nabla}\times\vec{H} \quad \vec{\nabla}\times\vec{M}$	$\vec{g}_T = \vec{g}_L + \vec{g}_m$ $\vec{M}\times\hat{n}$	todos las corrientes
$\vec{H}$	div	$-\vec{\nabla}.\vec{M} = \rho_m = \vec{\nabla}.\vec{H}$	$\vec{M}.\hat{n} = \sigma_m$	cargas de magnetización
	rot	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_L$	$\vec{g}_L$	corr. libres

Fuentes de rotor son corrientes (vectoriales)
" de div. son densidades (escalares)

- **<u>Contorno entre medios</u>**

$B_{\hat{n}}$ se mantiene



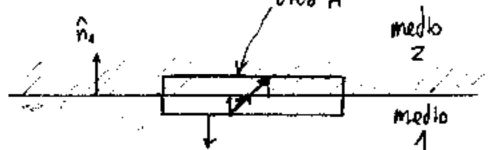
Ampere

$\oint\vec{H}.d\vec{l} = I_L$

$H_{1t}.l - H_{2t}.l = i_L$

$H_{1\hat{n}} - H_{2\hat{n}} = \sigma_m$
$H_{1\hat{t}} - H_{2\hat{t}} = 0$

$\hat{n}_1\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{g}_L$



Gauss

$\oint_{\partial\Omega}\vec{B}.d\vec{S} = 0 = \int_{\Omega}\vec{\nabla}.\vec{B}.d\Omega$

$B_{1\hat{n}}.A - B_{2\hat{n}}.A = 0$

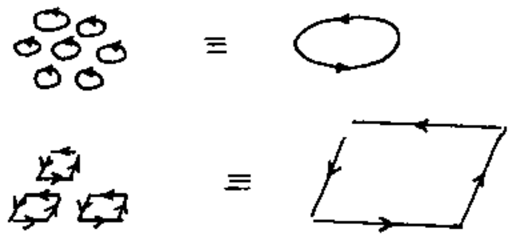
en la $\hat{n}_1$

$B_{1\hat{n}} = B_{2\hat{n}}$

• EL Rotor de $\vec{M}$

$\vec{M}$ es el momento magnético por unidad de volumen $\qquad \vec{M} = \dfrac{\sum_i^N m_i}{\text{Vol.}}$

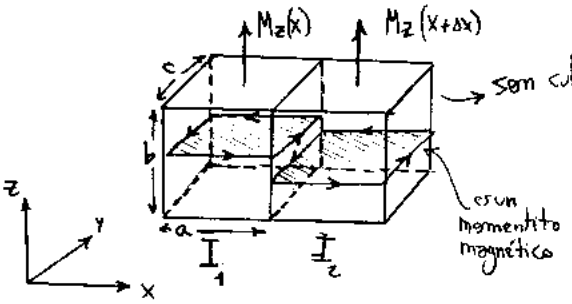
cada espira tiene la misma i



si $\vec{M}$ es constante se anulan las corrientes internas

$$\vec{\nabla}\times\vec{M} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} \rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{M}\Big|_y = \frac{\partial}{\partial z}M_x - \frac{\partial}{\partial x}M_z$$

$$M = M(x,y,z) \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}M_z = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-M_z(x,y_0,z_0) + M_z(x+\Delta x, y_0, z_0)}{\Delta x}$$



$\vec{m} = I\,\vec{S} \rightarrow$

$m_z = I.a.c$

$M_z = \dfrac{m_z}{a.b.c} \nearrow \quad m_z = M_z.a.b.c$

$I = M_z.b$

$\dfrac{I}{b} = M_z$

$(\Delta I)_y = I_1 - I_2 = M_z.b - M_z(x+\Delta x).b = -\Delta M_z.b$

donde $\quad \Delta M_z = \dfrac{\partial M_z}{\partial x}.\Delta x$

y $\Delta X = a \Rightarrow \quad \Delta I_y = -\dfrac{\partial M_z}{\partial x}.a.b$

$J = \dfrac{I}{S}$ y $\Rightarrow \quad J_1.\cancel{a}.\cancel{b} = -\dfrac{\partial M_z}{\partial x}\cancel{a}.\cancel{b}$

$J_1 = -\dfrac{\partial M_z}{\partial x}$

Análogamente $\quad J_2 = \dfrac{\partial M_x}{\partial z}$

$J_1 + J_2 = J_y = \dfrac{\partial M_x}{\partial z} - \dfrac{\partial M_z}{\partial x}$

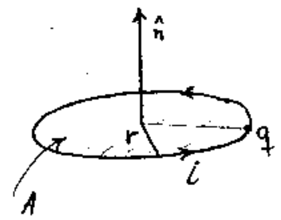
$\therefore \quad \boxed{\vec{J}_m = \vec{\nabla}\times\vec{M}}$

El yeite es que en cada cubito diferencial sólo tenemos un dipolito

$$\vec\nabla\times\vec H = \vec\nabla\times\frac{\vec B}{\mu_0} - \vec\nabla\times\vec M$$

$$\boxed{\vec J_L = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\cancel{\mu_0}\,\vec J_T - \vec J_m}$$

- **Momento Magnético & Angular**



i constante → q tiene v constante

$v = \frac{dr}{dt}$ → $2\pi r = v.\Delta t$ → $i = \frac{q}{2\pi r} v$

$i = \frac{q}{\Delta t} = \frac{v.q}{2\pi r}$

$\vec m = A.i = \pi r^2 i\,\hat n$ → $m = \frac{\cancel{\pi}.r^{\cancel{2}}.q.v}{2\cancel{\pi}\cancel{r}}$

$\vec L = \vec r\times\vec p = m.r.v\,\hat n$

$L = m.r.v$

El momento magnético es un múltiplo del momento angular → $\boxed{\vec m = \frac{\vec L}{m}\frac{q}{2}}$

- **Medios lineales, isótropos y homogéneos**

isótropo χ es un escalar → los dipolos se orientan o antiorientan

$$\vec M = \chi\vec H$$

$\chi > 0$ Paramagnético $\vec M \nearrow\nearrow \vec H$

$\chi < 0$ Diamagnético $\vec M \nearrow\swarrow \vec H$

Lineal $\chi \neq \chi(\vec H)$? o de $\chi(\vec B)$

homogéneo $\vec M \neq M(\vec r)$

$\vec\nabla\cdot\vec H = \vec\nabla\cdot\frac{\vec B}{\mu_0} - \vec\nabla\cdot\vec M$

$\vec\nabla\cdot\vec H = -\vec\nabla\cdot\vec M = \rho_m$

$\vec\nabla\cdot\vec H = 0$ (si es homogéneo el material)