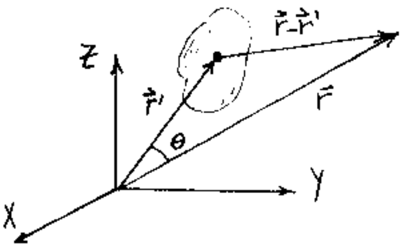
• Análisis de Distribuciones de carga desde Lejos

Podemos analizar una distribución finita de carga desde lejos pensando en dipolos.



volumen

$$V(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{k.\rho\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \frac{k.\rho(r').dV'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}$$

sea $r \ggg r'$

$1 \ggg \frac{r'}{r}$

chico, podemos usar Taylor

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k.\rho(r').dV'}{r.\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\frac{r'}{r}\cos\theta}}$$

sea $\frac{r'}{r} = \alpha \rightarrow$

$$(1+\alpha^2-2\alpha.\cos\theta)^{-1/2} \cong 1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta\Big|_{\alpha=0} + -\frac{1}{2}\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta\right)^{-3/2}.(2\alpha-2.\cos\theta)\Big|_{\alpha=0}.\alpha$$

$$+\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}.\left[\frac{2.(\qquad)^{3/2}-(2\alpha-2\cos\theta).+3/2\left(1+\alpha^2-2\alpha.\cos\theta\right)^{1/2}.(2\alpha-2\cos\theta)}{(1+\alpha^2-2\alpha.\cos\theta)^3}\right]\right)\Bigg|_{\alpha=0}\alpha^2$$

$$\cong 1+\cos\theta.\alpha+\frac{1}{2}.\left(\frac{-1}{2}\right).\frac{[2+2\cos\theta.\frac{3}{2}.1.(-2\cos\theta)]}{1}.\alpha^2$$

$$\cong 1+\cos\theta.\alpha+\frac{1}{2}(-1+3\cos^2\theta).\alpha^2$$

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k.\rho(r').dV'}{r}\left(1+\cos\theta.\frac{r'}{r}+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

$$= \int \frac{k\,\rho(r').dV'}{r} + \int\frac{k\,\rho(r').dV'.\cos\theta}{r.r}.r' + \int\frac{k\,\rho(r').dV'}{r}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left[\frac{r'}{r}\right]^2$$

$$V(\vec{r}) = \underbrace{k.\frac{1}{r}\int\rho(r').dV'}_{=Q_T} + \frac{k}{r^2}\underbrace{\int\rho(r').dV'.\cos\theta.r'}_{\text{mom. dipolar proyectado sobre } \vec{r}} + \frac{k}{r^3}\int\rho(r').dV'.\frac{(3\cos^2\theta-1)}{2}r'^2$$

Momento monopolar — Momento dipolar [vector] — Momento Cuadripolar [tensor]

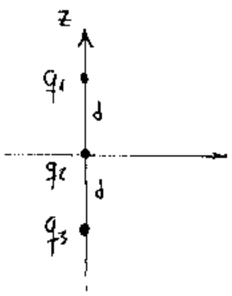
$$\frac{\vec{r}}{r^3}\underbrace{\int\vec{r}'\rho(\vec{r}').dV'}_{\vec{P}} \longleftarrow +\frac{1}{r^3}\int\vec{r}'.\vec{r}.\rho(r').dV' \qquad +\frac{1}{r^3}\int\rho(r')\frac{[3\cos^2\theta-1]}{2}(\vec{r}')^2$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = k\left(\frac{1}{r}.Q_T+\frac{\vec{r}}{r^3}.\vec{P}+\frac{1}{2}\sum_{ij}Q_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}\right)}$$

	Q_T	$\vec{p}$	Q_{ij}
Continuo	$Q_T = \int \rho(\vec{r}')\, dV'$	$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}')\, \vec{r}'\, dV'$	$Q_{ij} = \int (3 x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij})\, \rho(\vec{r}')\, dV'$
finito	$\sum_i^N q_i$	$\sum_i^N q_i \vec{r}_i'$	$\sum_\ell^N (3 x_i^\ell x_j^\ell - (\vec{r}_\ell')^2 \delta_{ij})\, q_\ell$
			$\sum_\ell^N -(\delta_{ij} r_\ell^2 - 3 x_i^\ell x_j^\ell)\, q_\ell$

$$\boxed{V(\vec{r}) = k \left(\frac{1}{r} Q_T + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} \right)}$$

◄ Potencial para una distribución de carga visto desde muy lejos



$q_1 + q_2 + q_3 = 0$

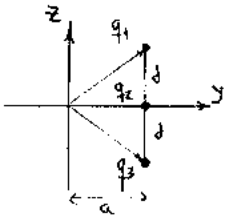
$\vec{p} = (d\, q_1 - d\, q_3)\hat{z} = d(q_1 - q_3)\hat{z}$

$q_1 = q_3 \rightarrow \vec{p} = 0$

$q_1 = 0 \rightarrow \vec{p} = -d q_3 \hat{z}$

El momento dipolar señala el desbalance de carga respecto a un punto

El cuadripolar señala el desbalance de los dipolos



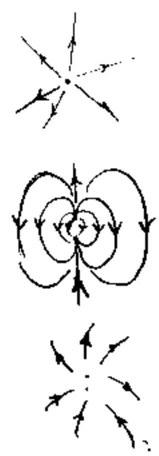
$\vec{p} = d(q_1 - q_3)\hat{z}$

$\quad = a(q_1 + q_2 + q_3)\hat{y}$

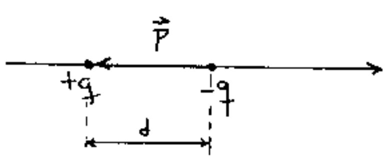
$\vec{p}$ es indepte. del sistema coordenado elegido si $Q_T = 0$

distribución de carga irregular → desde lejos

$$\begin{cases} Q_T \neq 0 \implies \text{desde lejos} \approx V = k\dfrac{Q_T}{r} \quad \text{monopolo} \\ Q_T = 0 \implies \text{desde lejos} \approx V = k\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \quad \text{dipolo ideal} \end{cases}$$



* Dipolo ideal



Algo con $\begin{cases} Q_T = 0 \\ \vec{p} = 0 \end{cases}$ tendrá comportamiento cuadripolar en principio

[siempre visto desde lejos]

NOTA

$V = kq(\vec{r}_+' - \vec{r}_-')\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

potencial de un dipolo

$$\boxed{V = k\, \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

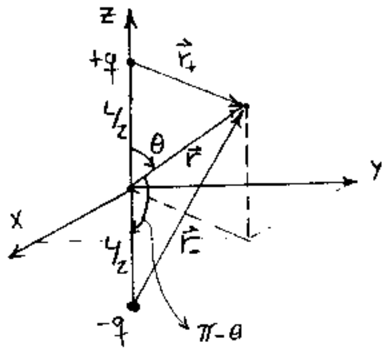
NOTA

$\vec{p}$ tiene sentido de $-q$ a $+q$

Comport. desde lejos	V decae como	E decae como
monopolo	$1/r$	$1/r^2$
dipolo	$1/r^2$	$1/r^3$
cuadripolo	$1/r^3$	$1/r^4$

Dipolo Eléctrico

$$\vec{p} = \frac{L}{2} q \hat{z} + -\frac{L}{2}(-q)\hat{z} = L q \hat{z}$$

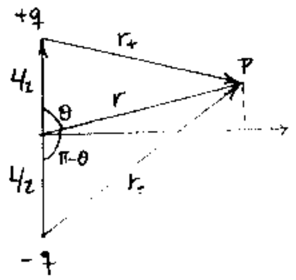


$$V(\vec{r}) = \frac{k.q}{|\vec{r}_+|} - \frac{k.q}{|\vec{r}_-|}$$

$\vec{r}_+ , \vec{r}_-$ son los $\vec{r}\,'$ (puntos fuente)

$$r_+^2 = r^2 + \frac{L^2}{4} - \cancel{2} r \frac{L}{\cancel{2}} \cos\theta$$

$$r_-^2 = r^2 + \frac{L^2}{4} + \cancel{2} r \frac{L}{\cancel{2}} \cos\theta$$



$$V(\vec{r}) = k.q. \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4} - r.L.\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4} + r.L.\cos\theta}} \right)$$

$$V(\vec{r}) = k.q \left[\frac{1}{r\left(1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{4} - \frac{L}{r}.\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{r\left(1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{L}{r}.\cos\theta\right)^{1/2}} \right]$$

$$\left(1 + \left[\frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha.\cos\theta\right]\right)^{1/2}$$

sea $r \gg L \rightarrow 1 \gg \frac{L}{r}$

$$\boxed{(1+\alpha)^{\pm 1/2} \cong 1 \pm \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2}$$

si α es chico

$$V(\vec{r}) = \frac{k.q}{r}\left(\cancel{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{L}{r}\right)^2 - \frac{L}{r}\cos\theta\right) - \cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{L}{r}\right)^2 + \frac{L}{r}.\cos\theta\right)\right)$$

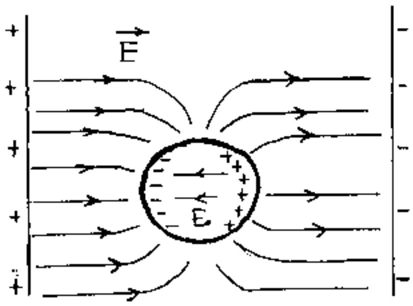
$$= \frac{k.q}{r}\left[\frac{L}{2r}.\cos\theta + \frac{L}{2r}.\cos\theta\right] = \frac{k.q}{r}.\frac{L.\cos\theta}{r} = \boxed{\frac{k.q\,L\cos\theta}{r^2} = V(r \gg L)}$$

$$= \underbrace{k.p}_{\text{momento dipolar}}.\frac{\cos\theta}{r^2}$$

Pero según la figura es $z = r.\cos\theta \Rightarrow$

$$\boxed{V_{(r \gg L)} = \frac{k.q.z}{r^3}}$$

$$V_{(r \gg L)} = \frac{k.q.z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

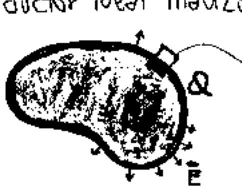


Si se mete un conductor entre las planchas, se polariza
el borde del conductor será un equipotencial
el campo en la frontera será $\perp$ a la superficie
EL conductor genera en su interior un campo $\vec{E}_0$ de sentido contrario que anule al externo

$\Rightarrow$

$\vec{E} = 0$ dentro del conductor

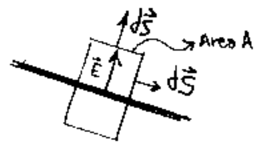
conductor ideal macizo (en equilibrio)



$\vec{E}_{int} = 0$

$Q_{int} = 0$

$\vec{E}_{sup} \perp sup$



$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int E . dS$$

$$\frac{\sigma . A}{\varepsilon_0} = E . A \rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

si hay $E_{\hat{t}}$ $\Rightarrow$ habría corriente y por ende campo
La superficie es equipotencial

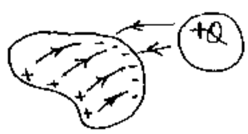
Una carga neta interior no nula solo puede existir en un aislante.

Un Conductor con exceso de carga la distribuye en su superficie con cierta σ de modo que $E_{int} = 0$

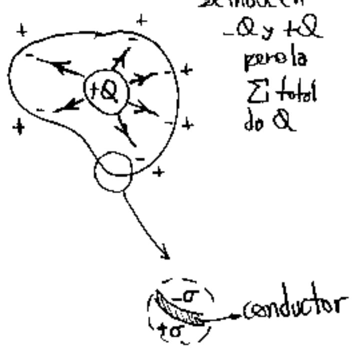
Conductor con carga +Q interna

Conductor con cavidad vacía

conductor Neutro



al acercarle un campo (se inducen cargas)



se inducen $-Q$ y $+Q$ pero la Σ total da Q

No puede haber $\vec{E}$ interior porque las cargas son libres de moverse y se cancelarían

equilibrio

Un Conductor cerrado aísla de campos estáticos hacia adentro y hacia afuera

La carga sobre un conductor aislado se distribuye en una σ superficial hasta que $\vec{E}_{int} = 0$ y todos los puntos del Conductor son equipotenciales.

$\vec{E}_{int} = 0$ porque un campo electrostático no puede generar una corriente sostenida en el conductor

$\Rightarrow$ Q_N interna $= 0$

• Ecuación de Poisson

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad \text{pero} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad -\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

laplaciano

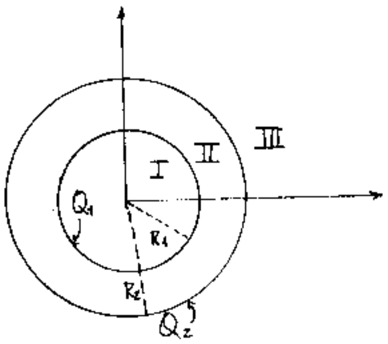
$$[1] \quad \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Ecuación de Poisson}$$

$$[2] \quad \boxed{\nabla^2 V = 0} \qquad \text{Ecuación de Laplace}$$

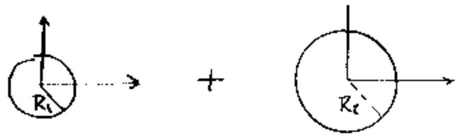
(en ausencia de carga)

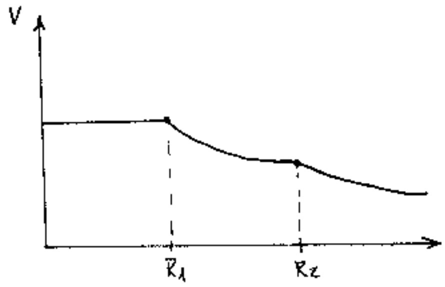
sabiendo V en $\partial\Omega$,
[1] tiene solución única

● **Esferas & Casquetes**



Vale superposición





III

$$V = \frac{k(Q_2 + Q_1)}{r} + C_{III}$$

II

$$V = \frac{k\,Q_1}{r} + C_{II}$$

I

$$V = 0 + C_I$$

$$V_I = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_{II} = kQ_1\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$V_{III} = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r}$$

$r = R_1 \rightarrow$ $\quad \dfrac{kQ_1}{R_1} + C_{II} = C_I$

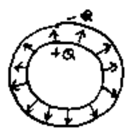
$r = R_2 \rightarrow$ $\quad \dfrac{kQ_1}{R_2} + C_{II} = \dfrac{k(Q_2+Q_1)}{R_2} + C_{III}$

$r \to \infty$ $\quad 0 = \dfrac{k(Q_1+Q_2)}{r} + C_{III} \rightarrow C_{III} = 0$

$$C_{II} = \frac{kQ_1}{R_2}, \quad C_I = k\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_1}{R_2}\right)$$

si $Q_1 = \underbrace{-Q_2}_{-Q} \Rightarrow V_{III} = 0 \rightarrow E_I = E_{III} = 0$

$E_2 \neq 0$



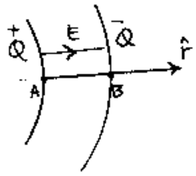
* Capacidad [Intro]

$$Q = C \cdot \Delta V$$

constante geométrica

carga que se puede acumular si se aplica una dif. de pot. ΔV

la capacidad determina, dada una ΔV, cuanta carga puede soportar un conductor.



$$\Delta V = -\int_{A \to B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr$$

$$= -\int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{r^2}\, dr = +kQ\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{k}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\right)}_{\text{capacidad}} \Delta V = Q}$$

NOTA

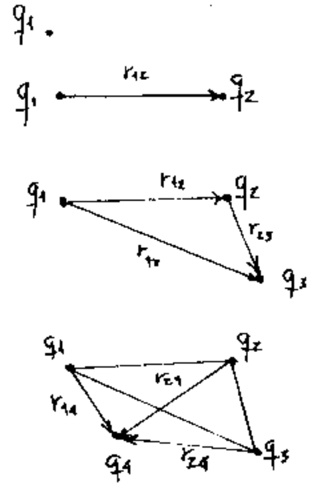
La capacidad es la proporcionalidad entre:
"carga que aguanta" y
"potencial que puede brindar" un objeto cargado

C es indepte de la carga o del potencial

• Energía Electrostática

Armando una configuración:

Se traen una a una las cargas del infinito.



$$U = q_2 . V_2 = q_2 \cdot \frac{k . q_1}{r_{12}}$$

$$U = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k q_2 q_3}{r_{23}}$$

$$U = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{k q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{k q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{k q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{k q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{k q_3 q_4}{r_{34}}$$

$$U_i = k \sum_j^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$U = \frac{k}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

porque $\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{q_j q_i}{r_{ji}}$

$$U = \frac{1}{2} k \sum_i^N \sum_j^N \frac{\Delta q_i \cdot \Delta q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} k \sum_i^N \sum_j^N \frac{\rho(r_i) dV_i \cdot \rho(r_j) dV_j}{r_{ij}}$$

variable de integración

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1}\int_{V_2} \frac{k \rho(r_1) dV_1 \cdot \rho(r_2) . dV_2}{r_{12}} = \frac{1}{2} \int \rho(r_1) . dV_1 \int \frac{k \rho(r_2) . dV_2}{r_{12}}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(r_1) . dV_1 . V(r_1) = \frac{1}{2} \int (-\nabla^2 V)\, \varepsilon_0 (V) . dV_1 = \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \left[\vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V) - (\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V) \right] dV_1$$

$$\boxed{V . \nabla^2 V = \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V) - (\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V)}$$

$$U = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V) . dV_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int (\vec{E})^2 . dV_1$$

$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{\nabla} V) =$

x Gauss

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\Sigma} V \vec{\nabla} V . d\vec{S}_1$$

Como vale $\forall$ sup. Σ puedo tomarla para alguna de radio muy grande, y $\Rightarrow$

donde $E = 0$ $\quad \int \to 0$

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int E^2 . dV_1$$

energía

Puede pensarse que la energía se almacena en el campo eléctrico; en ese caso se verifica

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ ◄ Energía por unidad de volumen en un campo eléctrico

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{Volumen}} E^2 \, dV$$ ◄ energía en un volumen V