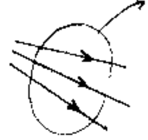
• Campos Escalares y Vectoriales

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$ donde $S=\partial V$

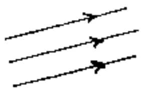


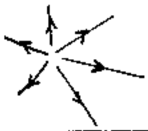
aquí $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ → líneas de $\vec{F}$ no salen ni entran

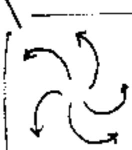
$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ → F es incompresible o solenoidal

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}>0$  aquí

$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}<0$  aquí

$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ 

 $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\neq 0$

 $\vec{\nabla}\times\vec{F}\neq 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\neq 0$

 $\vec{\nabla}\times\vec{F}\neq 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$

Rotor y Divergencia caracterizan propiedades del campo vectorial

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\psi)=0} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0}$$

Gauss (Divergencia)
$$\boxed{\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{S}}$$

Stokes (Rotor)
$$\boxed{\int_{S}\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{s}}$$

DIVERGENCIA = indica contracción o dilatación de un campo

ROTOR = indica propensión de un campo a girar en torno al punto donde se calcula

• Fuerza Eléctrica

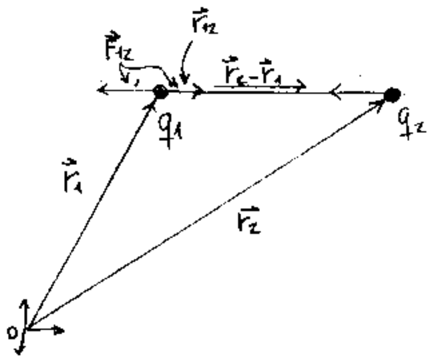
F_{AB} (A: recibe, B: emite)

F sobre A debido a B

$$\boxed{\vec{F}^{e}_{12} = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r_{12}^2}\cdot\hat{r}_{12}}$$ ◂ fuerza de Coulomb

$$\hat{r}_{12} \equiv \frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

$r_{12}=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$



Esto dice que la fuerza eléctrica tiene simetría radial
Para todo $|\vec{r}|$ constante en el espacio la fuerza es la misma (en módulo)

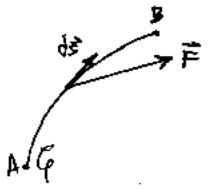
$$\frac{|\vec{F}^g|}{|\vec{F}^e|} = \frac{\dfrac{G m_p m_e}{r_0^2}}{\dfrac{k . q_p . q_e}{r_0^2}} = \frac{G m_p m_e}{k . q_p . q_e} \sim \frac{1.10^{-67}}{2.10^{-28}} \sim 5.10^{-40}$$

la $\vec{F}^G$ en el átomo de H es despreciable frente a la $\vec{F}^e$

cociente en el átomo de H

• Trabajo y Potencial

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \rightarrow$$



$$m . \frac{d\vec{v}}{dt} . d\vec{s} = \vec{F} . d\vec{s}$$

$$m \int d\vec{v} . \frac{d\vec{s}}{dt} = \int \vec{F} . d\vec{s}$$

$$m \int \vec{v} . d\vec{v} = \int_{A \to B} \vec{F} . d\vec{s} \equiv W_{A \to B}$$

$$m \frac{1}{2} v^2 \Big|_A^B = W_{A \to B}$$

$$T_B - T_A = W_{A \to B}$$

Sea $\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow$

$$\int_{A \to B} \vec{F} . d\vec{s} = \int -\vec{\nabla} U . d\vec{s}$$

$$= -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) . (dx, dy, dz)$$

$$W_{A \to B} = - U \Big|_A^B$$

$$W_{A \to B} = -(U_B - U_A)$$

$$T_B - T_A = -U_B + U_A$$

$$T_B + U_B = T_A + U_A \Rightarrow \boxed{T + U \equiv E}$$

se conserva

Electrostática

Campos generados por carga fija en el tiempo/espacio

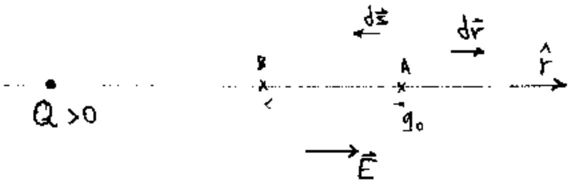
Sobre q_0

q_0 es una carga infinitesimal de prueba que no altera el campo generado por las otras (que ya están en equilibrio)

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{A \to B} = -\int_{A \to B} \vec{F} . d\vec{s} = -q_0 . \int_{A \to B} \vec{E} . d\vec{s} = -q_0 . \int_{A \to B} \frac{k . Q}{r^2} \hat{r} . (-dr) \hat{r} = -q_0 \int_{A \to B} - \frac{k Q . dr}{r^2}$$

$$q_0 k Q \int_B^A \frac{1}{r^2} . dr$$

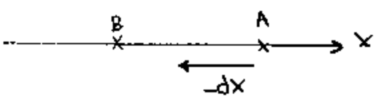
$$\Delta U = q_0 . k Q . \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$



hasta acá es indepte. del sistema de coordenadas $= -q_0 \int_{A \to B} - \frac{k . Q . dr}{r^2} = -q_0 (-k . Q) . \int_A^B - \frac{dx}{x^2}$

Acá elijo sist. coordenado

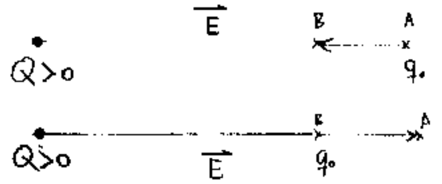
$$U_B - U_A = q_0 . k . Q . \frac{1}{x} \Big|_A^B$$



A > B

$$\Delta U = q_0 . k . Q . \left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right)$$

Se ve que:



$\Delta U_{BA} = -W_{A\to B} > 0 \rightarrow W_{A\to B} < 0$ { trabajo hecho <u>sobre</u> el sistema * aumentó su U

$\Delta U_{AB} = -W_{B\to A} < 0 \rightarrow W_{B\to A} > 0$ { trabajo hecho <u>por</u> el sistema ǂ bajó su U

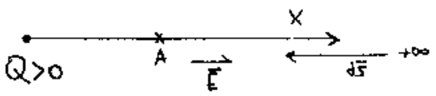
Puede verse que estos cálculos están bien parametrizando la integral de línea

* el agente exterior va contra el campo $\vec{E}$

ǂ el agente exterior va a favor del campo $\vec{E}$

$$\boxed{V_B - V_A \equiv \frac{U_B - U_A}{q_0}}$$ ◀ definición de dif. de potencial

Potencial $\equiv \Delta U_{\infty A}$ = var. de U al traer una carga q_0 desde el ∞ hasta A



$$V = \frac{\Delta U_{\infty\to A}}{q_0} = \frac{-W_{\infty\to A}}{q_0} = \frac{-1}{q_0}\int_{\infty\to A} \vec{F}.d\vec{s} = -\frac{\cancel{q_0}}{\cancel{q_0}}\int_{\infty\to A}\vec{E}.d\vec{s} = \int_{\infty\to A} E.ds = \int_{+\infty}^{A} \frac{k.Q}{x^2}.(-dx)$$

$$= -k.Q.\left.\frac{-1}{x}\right|_{\infty}^{A} = kQ.\frac{1}{x_A}$$

$$\boxed{V_A \equiv -\int_{\infty\to A}\vec{E}.d\vec{s}}$$ ◀ Potencial

Para potenciales y campos vale superposición

- <u>Sistemas de Cargas</u>

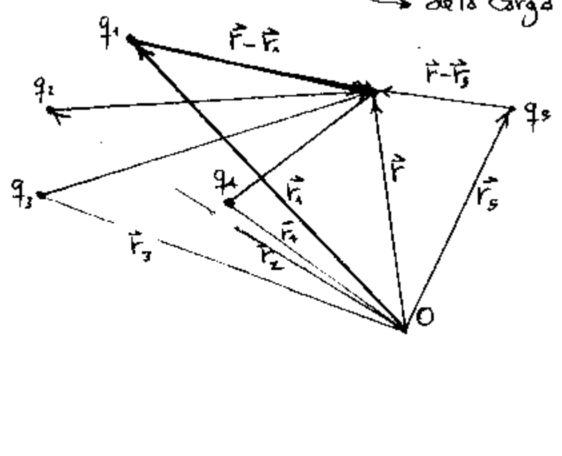
$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i}^{N} \frac{k.q_i.(\vec{r}-\vec{r}_i')}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}}}$$

campo para un sistema de cargas puntuales

$\vec{r} \equiv$ punto campo

$\vec{r}' \equiv$ punto fuente

→ de la carga al punto



El campo $\vec{E}$ es una propiedad del espacio mismo.

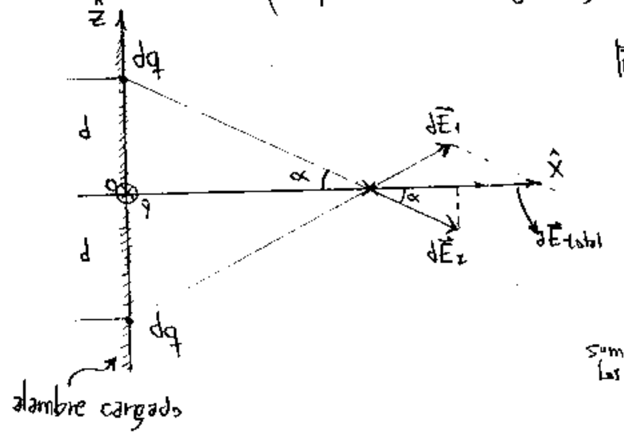
• Cálculo de Campos Sencillos

discreto $\longrightarrow$ continuo

$\sum q \longrightarrow \int dq \;\rightarrow\; \begin{cases} dq = \lambda \cdot dl \\ dq = \sigma \cdot dA \\ dq = \rho \cdot dV \end{cases}$

(eventualmente λ, σ, ρ pueden depender de $\vec{r}'$)

* *hilo infinito* (campo sobre el eje $\hat{x}$)



$|\vec{E}|$ de dq en $z=d$ es el mismo que $|\vec{E}|$ de dq en $z=-d$

aporte del campo debido a dq en $\hat{x}$

$$dE_{1x} = \frac{k \cdot dq}{(x^2+z^2)} \cdot \cos\alpha = \frac{k \cdot dq \cdot x}{(x^2+z^2)^{3/2}} \longrightarrow \text{aporte total } (|d\vec{E}_1|)$$

E total (sumamos todos los aportes de $-\infty$ a $+\infty$)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \cdot \lambda \cdot dz \cdot x}{(x^2+z^2)^{3/2}} = k \cdot \lambda \left(\frac{x}{x^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$E = k \lambda \frac{1}{x} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \right)$$

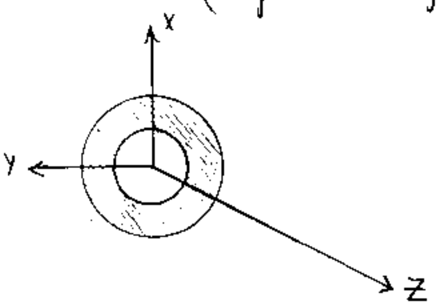
si $A \to +\infty$ $\quad \left(\frac{A}{\sqrt{x^2+A^2}} - \frac{-A}{\sqrt{x^2+A^2}} \right)$

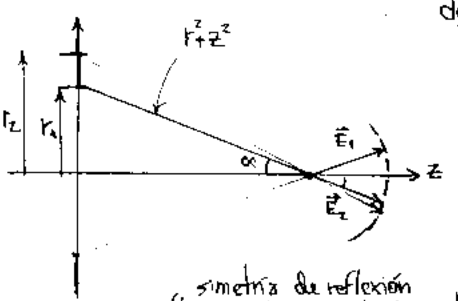
$$2 \frac{A}{|A| \cdot \sqrt{\frac{x^2}{A^2}+1}} = \frac{2}{1}$$

ojo; este campo es válido solo en el eje de simetría del alambre [pero si es ∞ todos son ejes de simetría]

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda}{x} \hat{x}} \xleftarrow{\text{x simetría}} E = \frac{k \cdot \lambda \cdot 2}{x}$$

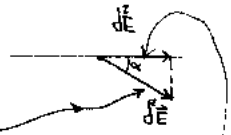
* *Corona* (campo sobre el eje $\hat{z}$)





$dq = \sigma \cdot dA$

$dq = \sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$



simetría de reflexión (lo de arriba es igual a lo de abajo)

$$d\overset{z}{E} = \left(\frac{k \cdot \sigma \cdot r \; d\varphi \cdot dr}{(r^2+z^2)} \right) \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$E = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{k \cdot \sigma \cdot r z \, d\varphi \cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = k \int_\Omega \frac{dq \, (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$r^2+z^2 = \xi$

$2r\,dr = d\xi$

$=$

$$E = \cancel{2}\pi k \sigma \frac{1}{\cancel{2}} z \int_{r_1^2+z^2}^{r_2^2+z^2} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}}$$

$$E = 2 k \pi \sigma z \frac{1}{\xi^{1/2}} \Bigg|_{r_1^2+z^2}^{r_2^2+z^2}$$

$$\vec{E} = 2 k \pi \sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{r_2^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2+z^2}} \right) \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E} = 2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2+z^2}} \right) \hat{z}}$$

* Casos extremos

$r_1 = 0$, $r_2 \to \infty$ (placa infinita)

$$\vec{E} = 2k\pi\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{r_2}\right)^2}}\right) = 2k\pi\sigma \cdot \frac{z}{|z|} \begin{cases} 2k\pi\sigma\hat{z} & z>0 \\ -2k\pi\sigma\hat{z} & z<0 \end{cases}$$

$z \gg r_2$ →
$r_1 = 0$

(carga puntual)

$$\vec{E} = 2k\pi\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r_2^2}{z^2}+1}\,|z|}\right) \simeq 2k\pi\sigma\frac{z}{|z|}\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2}{z^2}\right)\right]\right)$$

$$\simeq 2k\pi\sigma\frac{z}{|z|}\left(\frac{1}{2}\frac{r_2^2}{z^2}\right)\hat{z}$$

si $z>0$

$$\cong k\pi\sigma\cdot\frac{r_2^2}{z^2}\hat{z} = \frac{kQ}{z^2}\hat{z}$$

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi . r_2^2}$$

• Ley de Gauss

$$\boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$ ◂ Ley de Gauss

con la normal exterior

$Q \equiv$ carga encerrada en volumen V con sup $\partial V \equiv \Sigma$

Permite calcular el campo $\vec{E}$ si el problema tiene bastante simetría
La simetría requerida será la necesaria para sacar fuera de la integral al $\vec{E}$

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho . dV = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

x teorema Gauss
Como para todo V vale

$$\int \frac{\rho}{\varepsilon_0} . dV = \int \vec{E}\cdot dS \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

electrostática

x teorema Stokes

$$\boxed{0 = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

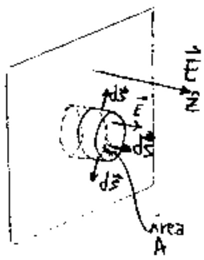
si $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ →

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V) = 0$$ rotor de un gradiente es nulo

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$$

$$dV = -E . dl \quad \to$$

$$\left.\begin{array}{l} dV = \frac{\partial V}{\partial x}.dx + \frac{\partial V}{\partial y}.dy + \frac{\partial V}{\partial z}.dz \\ -E dl = (-E_x)dx + (-E_y)dy + (-E_z).dz \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}V = \vec{E}$$



$$\vec{E} = 2k\pi\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{tapa 1}} E.dS + \int_{\text{tapa 2}} E.dS$$

$\vec{E}$ es uniforme en las tapas

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = 2E\int dS = 2E . A$$

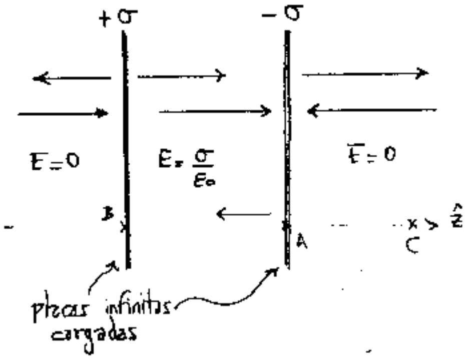
$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = E$$

$$\frac{Q}{A} = \sigma$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = E}$$

● Más de Potencial y Campos

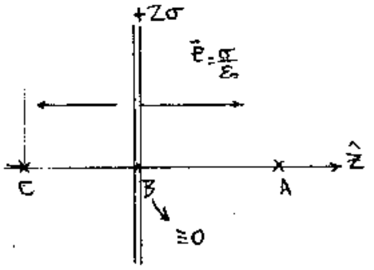
* Superposición



Una carga $q>0$ moviéndose en el campo $\vec E$ va hacia el mínimo de potencial

$$V_B - V_A = -\int_{A\to B} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\hat z)\cdot dz\,\hat z = -\int_{A\to B} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz = -\int_{z_A}^{z_B} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_B - z_A)$$

$$V_C - V_A = 0$$



$$V_B - V_A = -\int_{A\to B} \vec E\cdot d\vec l = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat z\cdot dz\,\hat z = \int_B \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz$$
$$= -\int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon}\,dz$$
$$= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_B - z_A)$$

$$V_B - V_C = -\int_{B\to C} \vec E\cdot d\vec l = -\int_{B\to C} E\,dz =$$

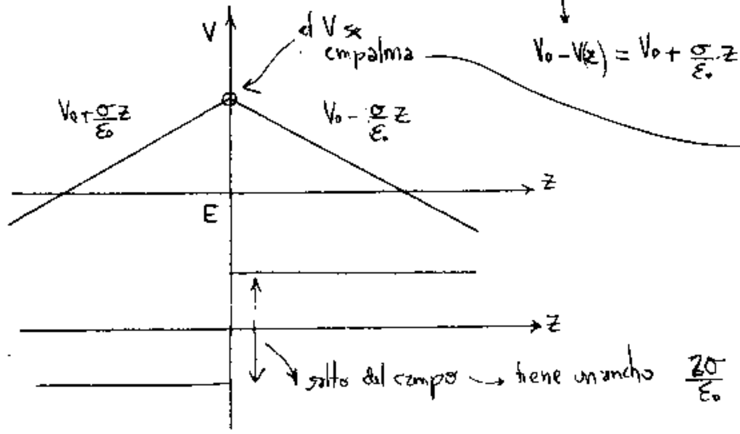
$$V_B - V_C = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_C - z_B)$$

$$V_B - V_C = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z_C$$

$$V(0) - V(z) = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \longleftarrow \text{defino } z_B \equiv 0,\ z_A \equiv z$$

$$\downarrow$$

$$V_0 - V(z) = V_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z$$



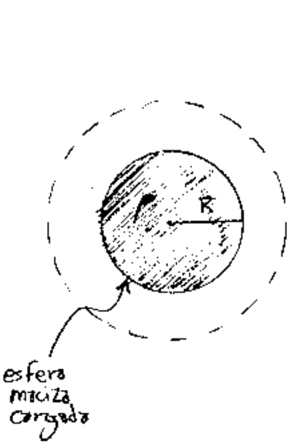
EL V se suele empalmar mediante una constante porque se requiere potencial continuo

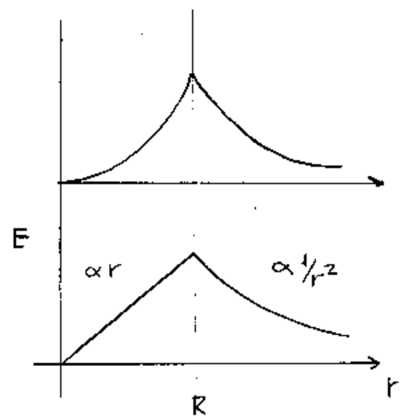
El $\vec E$ pega saltos siempre que la densidad de carga se altere de forma discontinua

$$\vec E = -\vec\nabla(V + C)$$
C: constante

se elige C para que sea $V(\infty)=0$ (con distribuciones de carga finitas) (de lo contrario no se puede tomar $V(\infty)=0$ puesto que tendríamos V y E allí)

* Esfera



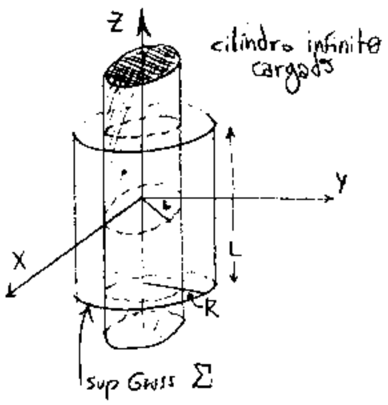


$$\boxed{V(\vec r) = -\int_\infty^{\vec r} \vec E\cdot d\vec s}$$

$$V = \frac{k\,Q}{r}\hat r = \frac{k\,\rho\,V}{r}\hat r = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cdot\rho\frac{\cancel{4\pi}R^3}{r\;3} = \frac{\rho R^3}{3r}\hat r$$

Cálculo de Campo con Simetrías

Se buscan simetrías de la distribución de cargas



$$\vec{E} = \vec{E}(r,\varphi,z) = E_r(r,\varphi,z)\,\hat{r} + E_\varphi(r,\varphi,z)\,\hat{\varphi} + E_z(r,\varphi,z)\,\hat{z}$$

rotación en torno a $\hat{z}$ (ángulo φ) $\rightarrow$ $\vec{E} \neq \vec{E}(\varphi)$

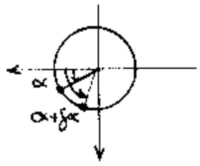
reflexión en XY ($\perp$ a $\hat{z}$) $\rightarrow$ $E_z = 0$

reflexión en XZ ($\perp$ a $\hat{y}$) $\rightarrow$ $E_y = 0$ $\}$ $E_\varphi = 0$

reflexión en YZ ($\perp$ a $\hat{x}$) $\rightarrow$ $E_x = 0$

traslación en $\hat{z}$ $\longrightarrow$ $\vec{E} \neq \vec{E}(z)$

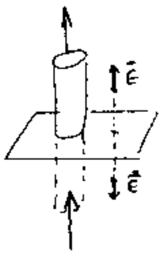
$$\therefore \quad \vec{E} = E_r(r)\,\hat{r}$$



simetría de rotación
El campo es algo en α $\Rightarrow$ si roto y no me entero no puede ser diferente en $\alpha + \delta\alpha$

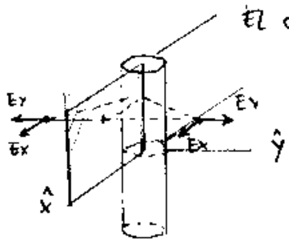
$$\frac{Q_T}{\varepsilon_0} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{lat.} E\,dS = E \cdot L \cdot 2\pi R$$

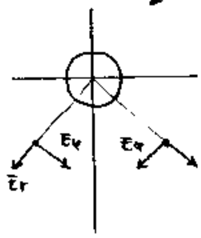
$$E = \frac{Q_T}{2\pi R L \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot b^2 \pi L}{2\pi R L \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho \cdot b^2}{2 r \varepsilon_0}\,\hat{r}}$$



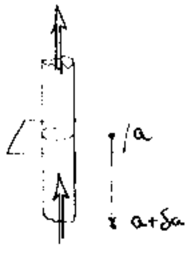
reflexión + traslación
el campo en el eje $\perp$ al plano reflejado es nulo porque si refleja como en la figura, al trasladar en $z(\infty)$ no veo cambio en la carga y debe ser el mismo vector E

reflexión + rotación
El campo en φ se refleja así



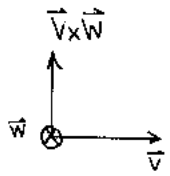


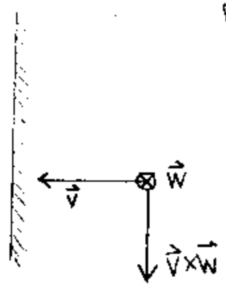
pero luego al rotar veo que debe ser $E_\varphi = 0$ $\rightarrow$ (no veo cambios en la distribución)



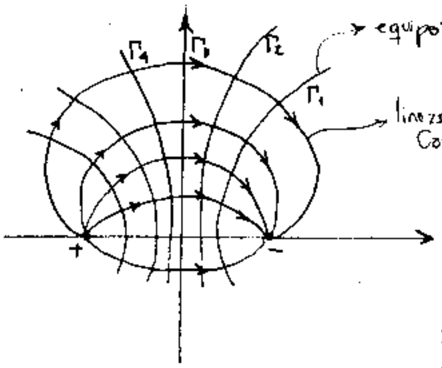
traslación
El campo es algo en a $\Rightarrow$ si me traslado en $a+\delta a$ no me entero por la infinitud $\rightarrow$ debe ser el mismo en $a+\delta a$ $\rightarrow$ tengo igual "cantidad" de carga hacia arriba y hacia abajo

---





$\vec{V}\times\vec{W}$ es un pseudovector pues refleja al revés.



equipotenciales (superficies) de nivel del campo $\vec{E}$ →

líneas de campo

las líneas de campo son ⊥ a las equipotenciales

indican el sentido de la carga de prueba q_0 en el campo

V evaluado en el equipotencial es el mismo
$V(\Gamma_1) = a$
$V(\Gamma_2) = b$
...
Esto no significa que $V(\vec{r}) =$ constante en general.

equipotencial = superficie de nivel del campo $\vec{E}$

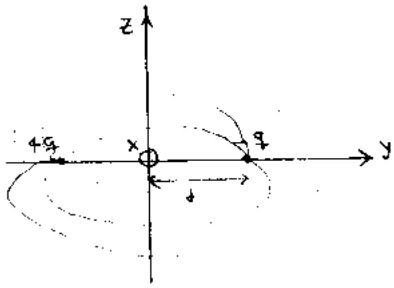
$$\boxed{\vec{E} = \int \frac{k \cdot dq \, (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}} \longrightarrow \text{3 integrales}$$

$$\boxed{V = \int \frac{k \cdot dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}} \longrightarrow \text{una integral}$$

Puede ser más fácil evaluar primero el $V(\vec{r})$ y luego derivar para obtener el $E(\vec{r})$

$$dq = \begin{cases} \rho \cdot dv \\ \sigma \cdot dA \\ \lambda \cdot dl \end{cases}$$

* Potencial de un Dipolo



$$V(x,y,z) = k \cdot \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} + k \frac{-q}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}}$$

$\vec{r} = (x,y,z)$

$\vec{r}\,' = \begin{cases} (0,d,0) \\ (0,-d,0) \end{cases}$

$V(0,0,z) = 0$ → el eje z es un equipotencial

$V(|\vec{r}| \to \infty) = 0$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = E_y = -\frac{k \cdot q}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}(y+d)}{(x^2 + (y+d)^2 + z^2)^{3/2}} + -\frac{k \cdot (-q)}{2} \cdot \frac{2(y-d)}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{3/2}}$$