Práctica 2: Física Nuclear

- Problema 1:

partícula α = núcleo de ${}^4_2He$

Es estable porque en la entrada de la tabla correspondiente se tiene:

Z	El	A	Abundancia	decaimientos
2	He	4	99.999863 %	—

→ No decae

EL cálculo analítico para decaimiento espontáneo es:

$$M({}^4_2He) - M_n.2 - M_p.2 < 0 \quad \text{lo cual es} \quad -27,24 \text{ MeV}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{es estable}}$

con $A=5$ todos los elementos considerados $(1 \leq p \leq 4)$ son inestables (altamente inestables): solo figura el ancho del nivel de energía pues su vida media es muy pequeña.

1p, 4n ${}^5_1H$ decae en n

${}^5_2He$ decae en α, n

${}^5_3Li$ decae en α, p

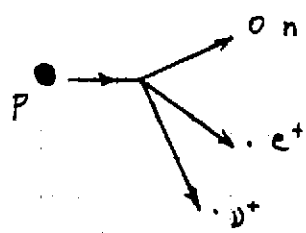
${}^5_4Be$ decae en p

- Problema 2:

El núcleo del átomo de hidrógeno es un protón

${}^1_1H$ no decae y tiene tabulada una abundancia 99,985 %

Supongamos que el protón decae mediante β^+



núcleo productos

$$E_i^{rep.} = E_f^{rep.} + T_{\geq 0}$$

$$(E_i - E_f)_{reposo} = T \geq 0$$

$$(E_i - E_f)_{reposo} \geq 0$$

$$c^2[m_p - (m_n + m_e)] \ngeq 0 \Rightarrow$$

No es posible β^+

$\boxed{\text{EL } {}^1_1H \text{ es estable}}$

- Problema 3:

a) ${}^2_1H + {}^3_1H \longrightarrow {}^4_2He + n$

b) ${}^2_1H + {}^1_1H + n \longrightarrow {}^4_2He$

c) ${}^1_1H_1 + {}^1_1H_1 + n + n \longrightarrow {}^4_2He$

d) ${}^2_1H + {}^2_1H \longrightarrow {}^4_2He$

En el caso a) $M({}^2_1H) + M({}^3_1H) - M({}^4_2He) - M(n) = \Delta E$

$$1876,13 + 2809,45 - 3728,42 - 939,57 = 17,59 \text{ MeV}$$

b) $M({}^2_1H) + M({}^1_1H) + n - M({}^4_2He) = \Delta E$

$1876{,}13 + 938{,}79 + 939{,}57 - 3728{,}42 = 26{,}07$ MeV

c) $2M({}^1_1H) + 2n - M({}^4_2He) = \Delta E$

$1877{,}58 + 1879{,}14 - 3728{,}42 = 28{,}3$ MeV

d) $2M({}^2_1H) - M({}^4_2He) = \Delta E$

$3752{,}26 - 3728{,}42 = 23{,}84$ MeV

Ordenamiento de energías:

$$\Delta E_{a)} < \Delta E_{d)} < \Delta E_{b)} < \Delta E_{c)}$$

n, ${}^1_1H$, ${}^2_1H$, ${}^3_1H$
neutrón, núcleo hidrógeno, núcleo deuterio, núcleo tritio

Las reacciones con núcleos de mayor masa liberan menor energía

Energía en reposo: $n+n+p$: 2817,93
${}^3_1H$: 2809,45

$\Rightarrow$ Las reacciones más energéticas se dan con los núcleos más livianos

∴ el ordenamiento está relacionado con el # A.

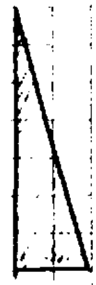
a) $2 + 3 \rightarrow 4 + 1$

d) $2 + 2 \rightarrow 4$

b) $2 + 1 + 1 \rightarrow 4$

c) $1 + 1 + 1 + 1 \rightarrow 4$

ΔE



En la reacción A vemos que al fusionarse núcleos de deuterio y tritio no resulta un núcleo con A=5 estable, sino que tenemos A=4 (${}^4_2He$) y A=1 (un neutrón).

A priori todos los procesos son posibles porque $\Delta E > 0$ siempre.

- Problema 4: $M(A,Z) = Z.m_p + (A-Z)m_n - B(A,Z)$

$$B(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} + a_a \frac{(2Z-A)^2}{A} + \delta A^{-1/2}$$

Sea A fijo $\rightarrow$ $M = M(Z) \rightarrow$

(Z,N)

$$\delta = \begin{cases} \Delta & \text{par-par} \rightarrow B \text{ mayor} \rightarrow \text{estable} \\ 0 & \text{par-impar} \\ -\Delta & \text{impar-impar} \rightarrow B \text{ menor} \rightarrow \text{Inestable} \end{cases}$$

$$\frac{dM(Z)}{dZ} = m_p - m_n + a_c 2A^{-1/3} Z + \frac{a_a 2}{A}(2Z-A)2$$

$$0 = m_p - m_n + a_c 2A^{-1/3} Z + a_a 4 A^{-1}(2Z) - a_a 4$$

$$0 = m_p - m_n + Z\left(\frac{a_c 2}{A^{1/3}} + \frac{a_a 8}{A}\right) - a_a 4 \rightarrow$$

$$Z = \frac{a_a 4 - m_p - m_n}{\left(\frac{2a_c}{A^{1/3}} + \frac{8a_a}{A}\right)}$$

$$M = Z.m_p + (A-Z)m_n - a_v A + a_s \cdots - \delta A^{-1/2}$$

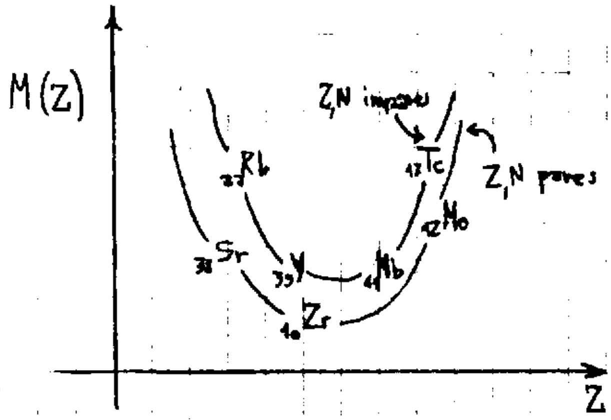
a) Sea $A=92$

↳ $Z = \frac{4a_a - m_p + m_n}{2a_c(92)^{-1/3} + 8a_a(92)^{-1}} = 40,465 \approx 40$

Como A es par tenemos dos curvas de Z estables, correspondientes a Z par

Z par es más estable que Z impar lo que se ve por el mayor binding

Z par → $\Delta = \delta > 0 \Rightarrow M' - \delta$ la parábola cae algo



Núcleo	B [keV]
$_{40}Zr$	8692,6
$_{39}Y$	8661,5
$_{41}Nb$	8662,3

b)

$^{92}_{41}Nb$

$Q_p = M(^{92}_{41}Nb) - M(^{91}_{40}Zr) - m_p - m_e$

$Q_p = 85611\ MeV - 84678,6 - 938,3 - 0,511$

$\boxed{Q_p = -6,4\ MeV}$

$Q_n = M(^{92}_{41}Nb) - M(^{91}_{41}Nb) - m_n$

$Q_n = 85611 - 84680 - 939,5$

$\boxed{Q_n = -8,5\ MeV}$

$\boxed{\frac{B}{A} = 8,658\ MeV}$

$M_{(A,Z)} = N \cdot m_n + Z m_p - B$

$85611\ MeV = 51.939,56\ MeV + 41.938,27\ MeV - B$

usando tabla (incluye los e^-) sacando los e^-

$85590\ MeV =$

$(-85590 + 86386,63)\ MeV = B$

$\boxed{796,58\ MeV = B}$

$B(92,41) = 15,56 \cdot 92 - 17,23 \cdot 92^{2/3} - 0,697 \cdot 41^2 \cdot 92^{-1/3} - 23,285\ \frac{(82-92)^2}{92} - 12 \cdot 92^{-1/2}$

$B = (1431,52 - 351,13 - 259,54 - 25,309 - 1,251)\ MeV$

$\boxed{B = 794,29\ MeV}$

[Hay un 0,2% de diferencia]

$\boxed{\frac{B}{A} = 8,633\ MeV}$

$^{92}_{41}Nb \longrightarrow {}^{92}_{42}Mo + e^- + \bar{\nu}$

$Q_{\beta^-} = 85611,5 - 85611,2 - \cancel{0,511} + \cancel{0,511} = \boxed{0,30\ MeV}$

$Q_{\beta^+} = 85611,5 - 85609,5 - 0,511 - 0,511 = \boxed{0,98\ MeV}$

$^{92}_{41}Nb \rightarrow {}^{92}_{40}Zr + e^+ + \nu$

- **Problema 5:**

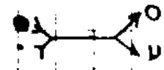
	E(keV)	J π
^{236}U	0	0 +
^{236}U	45,24	2 +
^{236}U	149,47	4 +
^{236}U	309,78	6 +
^{236}U	522,24	8 +
^{236}U	687,60	1 -

El 5to estado excitado tiene 0,68 MeV de energía

β^- : $n \quad p + e^- + \nu$

$^{236}_{92}U$; por β^- decaerá $^{236}_{91}Pa$

CE:



$^{236}_{92}U$; por CE decaerá $^{236}_{93}Np$

$$Q_{(\beta^-)} = M(236,91) - [M(236,92)] =$$
$$219879,3 - 219876,1 = \boxed{2,0 \text{ MeV}}$$

$$Q_{(CE)} = M(236,93) - [M(236,92)]$$
$$219877,38 - 219876,4 = \boxed{0,98 \text{ MeV}}$$

93 e^- 93 p 143 n — 92 e^- 92 p 144 n

- **Problema 6:**

corrección por los electrones

$^{116}_{50}Sn \longrightarrow \quad M_N = 107\,961,78$ MeV $\quad M_N^p = 107\,936,23$ MeV

$$B = 66.939,6 \text{ MeV} + 50.938,3 \text{ MeV} - 107\,936,23 \text{ MeV}$$

$$\boxed{B = 992,37 \text{ MeV}} \rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = 8,55 \text{ MeV}}$$

Acá no hace falta corregir con la masa de los e- porque se restan en la cuenta.

$$Q_n = M(116,50) - [M(115,50) + m_n]$$
$$107\,961,78 \text{ MeV} - (107\,031,77 + 939,6) \text{ MeV} = -39,59 \text{ MeV}$$

Acá sí hace falta porque M(115,49) está dada para el átomo neutro

$$Q_p = M(116,50) - [M(115,49) + m_p + m_e]$$
$$107\,961,78 \text{ MeV} - (107\,032,27 + 938,3 + 0,511) \text{ MeV} = -39,30 \text{ MeV}$$

• Problema 7:

$$E = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$$

oscilador armónico isótropo 3D

con $\hbar\omega = 8\,\text{MeV}$

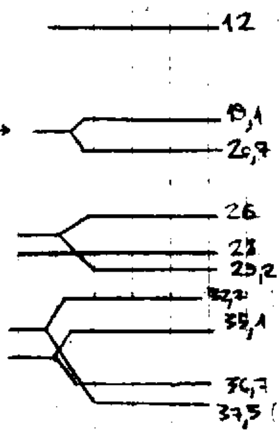
$N = 2n + \ell \qquad \ell < N$

n	ℓ	N	E	deg. nivel (E)	deg (ℓ)	deg. nivel con spin
0	0	0	$\hbar\omega\left(\frac{3}{2}\right)$	1	1	2
0	1	1	$\hbar\omega\left(\frac{5}{2}\right)$	3	3	6
1 0	0 2	2	$\hbar\omega\left(\frac{7}{2}\right)$	6	1 5	12
1 0	1 3	3	$\hbar\omega\left(\frac{9}{2}\right)$	10	3 7	20
2 1 0	0 2 4	4	$\hbar\omega\left(\frac{11}{2}\right)$	15	1 5 9	30
2 1 0	1 3 5	5	$\hbar\omega\left(\frac{13}{2}\right)$	21	3 7 11	42
3 2 1 0	0 2 4 6	6	$\hbar\omega\left(\frac{15}{2}\right)$	28	1 5 9 13	56

a)

8 MeV

	(# cuánticos)		(estados)	MeV	b) Energía [MeV]	# estados
$\frac{3}{2}\hbar\omega$	N=0 n=0	ℓ=0	(1)	12	12	(1)
$\frac{5}{2}\hbar\omega$	N=1 n=0	ℓ=1	(3)	20	19,9	(3) →
$\frac{7}{2}\hbar\omega$	N=2	ℓ=2 ℓ=0	(6)	28	27,6 28	(5) (1)
$\frac{9}{2}\hbar\omega$	N=3	ℓ=3 ℓ=1	(10)	36	35,1 35,9	(7) (3)
$\frac{11}{2}\hbar\omega$	N=4	ℓ=4 ℓ=2 ℓ=0	(15)	44	42,4 43,6 44	(9) (5) (1)
$\frac{13}{2}\hbar\omega$	N=5	ℓ=5 ℓ=3 ℓ=1	(21)	52	49,5 51,1 51,9	(11) (7) (3)
$\frac{15}{2}\hbar\omega$	N=6	ℓ=6 ℓ=4 ℓ=2 ℓ=0	(28)	60	56,4 58,4 59,6 60	(13) (9) (5) (1)



Reharemos todo en página siguiente →

b) $\Delta V_1 = \left(-1/40\right)\cdot \ell^2 \ \text{MeV}$

c) $\Delta V_2 = -1{,}6\,(\ell\cdot s)\ \text{MeV}$ $\qquad J = \ell \pm \frac{1}{2}$ $\qquad J^2 = \ell^2 + 2\ell\cdot s + s^2$

$$\frac{J^2 - \ell^2 - s^2}{2} = \ell\cdot s$$

Si incorporamos acoplamiento spín-órbita, entonces hay que pasar

$$n, l, s, m_l, m_s \longrightarrow n\ l\ s\ j\ m$$

(base desacoplada) (base acoplada)

N	n l	2l+1	deg. nivel (con spín)		capas	j	deg.	
0	0 0	1	2	2	1s	1/2	2	2
1	0 1	3	6	6	1p	1/2	2	
						3/2	4	8
2	1 0	1	2	12	2s	1/2	2	
	0 2	5	10		1d	3/2	4	
						5/2	6	20
3	1 1	3	6	20	2p	1/2	2	
						3/2	4	
	0 3	7	14		1f	5/2	6	
						7/2	8	40
4	2 0	1	2	30	3s	1/2	2	
	1 2	5	10		2d	3/2	4	
						5/2	6	
	0 4	9	18		1g	7/2	8	
						9/2	10	70
5	2 1	3	6	42	3p	1/2	2	
						3/2	4	
	1 3	7	14		2f	5/2	6	
						7/2	8	
	0 5	11	22		1h	9/2	10	
						11/2	12	112
6	3 0	1	2	56	4s	1/2	2	
	2 2	5	10		3d	3/2	4	
						5/2	6	
	1 4	9	18		2g	7/2	8	
						9/2	10	
	0 6	13	26		1i	11/2	12	
						13/2	14	

$N = 2n + l$

capa	l
s	0
p	1
d	2
f	3
g	4
h	5
i	6

$$|l - 1/2| \leq j \leq l + 1/2$$

deg. subnivel : $2j+1$

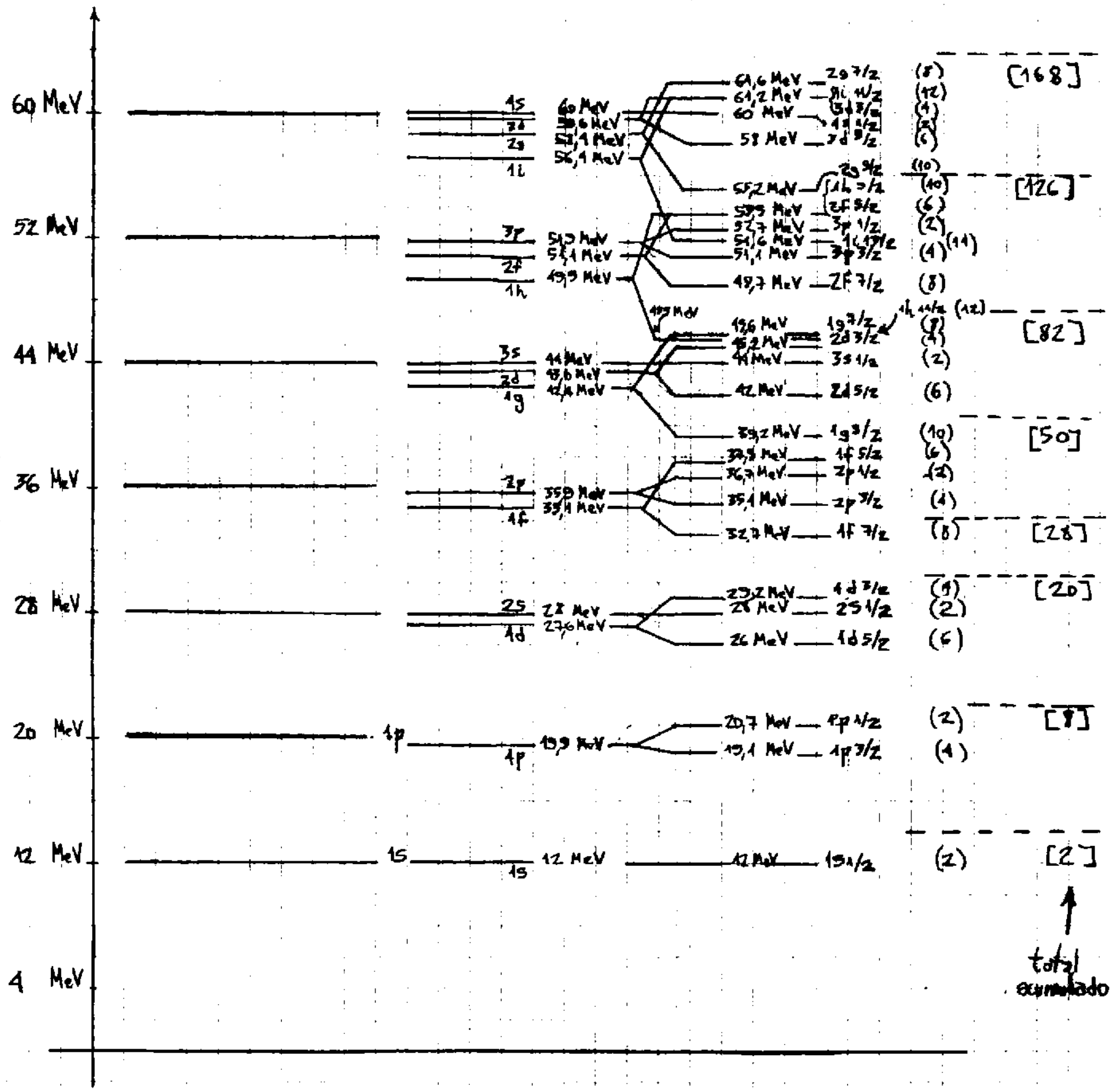
$$\Delta V_1 = -0{,}1 \cdot l^2 \ \text{MeV}$$

$$\Delta V_2 = -1{,}6\,(l \cdot s) \ \text{MeV}$$

$$\frac{j^2 - l^2 - s^2}{2} = l \cdot s$$

$$\Delta V_2(j=1/2) = -\frac{l^2}{2}(-1{,}6) \ \text{MeV}$$

$$\Delta V_2(j=3/2) =$$



Comparando con el resultado experimental (tablas en los libros) puede verse una coincidencia casi perfecta hasta el # mágico 50 (salvo el intercambio en el orden de los niveles $1f\,5/2$ y $2p\,1/2$). Luego del #50 ocurren algunas desviaciones más y otras cosas raras ($1h\,9/2$ y $2f\,5/2$ coinciden en la energía, por ejemplo, así como $1i\,11/2$ y $3d\,3/2$).

• Problema 8:

Sean dos fermiones con igual j (igual valor total de momento angular)

fermión 1 : j_1, m_1
fermión 2 : j_2, m_2

Se puede escribir:

$$|j_1 j_2, m_1, m_2\rangle = \sum_{J,M} |j_1 j_2; J, M\rangle\langle j_1, j_2; J M | j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$$

con $|j_1-j_2| < J < j_1+j_2$ $\quad -J < M < J$

$M = m_1 + m_2$

y también:

$$|j_1 j_2; J M\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; J M\rangle}_{C\text{-}G}$$

donde m_1, m_2 recorren $\quad -j_1 < m_1 < +j_1$
$\quad -j_2 < m_2 < +j_2$

Pero dijimos $j_1 = j_2 \equiv j \Rightarrow$

$$|j, j; J M\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} |j j; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j, j; m_1 m_2 | j, j; J M\rangle}_{C\text{-}G}$$

El ket y la Ψ deben ser antisimétricos $\Rightarrow$ $P_{12}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$

$$P_{12}|j j; J M\rangle = P_{12}\Big(\sum_{m_1}\sum_{m_2} |j j; m_1 m_2\rangle\langle j j; m_1 m_2 | j j; J M\rangle\Big)$$

$$-|j j; J M\rangle = (-1)^{2j-J} \underbrace{\sum_{m_1}\sum_{m_2} |j j; m_2 m_1\rangle\langle j j\, m_2 m_1 | j j\, J M\rangle}_{\doteq\, \mathbb{I}}$$

en los C-G no hay que switchear los m_1, m_2 porque están sumados y son #

P_{ij} opera sobre kets

$$-|j j, J M\rangle = (-1)^{2j-J} |j j, J M\rangle$$

$\Rightarrow$ necesito $2j - J$ impar

$2j - J = 2n - 1$; pero j es semientero (por fermión)

$\cancel{2}\frac{(2k-1)}{\cancel{2}} - J = 2n - 1$

$2k - J = 2n$

$2(k-n) = J$ $\quad \Rightarrow \boxed{J \text{ es par}}$

Si no están en la misma órbita