Practica 1: Cinemática Relativista en la física de Partículas

- Problema 1

$$A \rightarrow B + C$$

desintegración. Sea que nos paramos en el frame CM

sistema CM
$$\begin{cases} P^{\mu}_{Ⓘ} = \left(\frac{M_A \cdot c^2}{c}, 0\right) \\ P^{\mu}_{Ⓕ} = \left(\frac{E_B + E_C}{c}, \vec{P}_B + \vec{P}_C\right) \end{cases}$$

Como el cuadrimomento se conserva:

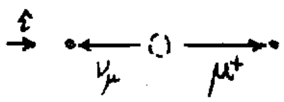
$$M_A \cdot c = E_B + E_C \rightarrow$$
$$0 = \vec{P}_B + \vec{P}_C$$

Esto será la conservación de la energía y el momento.

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu$$

Un pión se desintegra en un muón y un neutrino
Se conserva la energía $\Rightarrow$

$$m_\pi c^2 = |\vec{P}_\nu| c + c\sqrt{|\vec{P}_\mu|^2 + m_\mu^2 c^2}$$



Se conserva el momento lineal $\Rightarrow$

$$\hat{z})\quad 0 = -P_\nu + P_\mu \quad \rightarrow \quad P_\mu = P_\nu$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$$

$$m_\pi = \frac{P_\nu}{c} + \frac{1}{c}\left(P_\mu^2 + m_\mu^2 c^2\right)^{1/2}$$

$$P_\mu - m_\pi c = -\sqrt{P_\mu^2 + m_\mu^2 c^2}$$

$$(m_\pi c - P_\mu)^2 = P_\mu^2 + m_\mu^2 c^2$$

$$\cancel{P_\mu^2} + m_\pi^2 \cancel{c^2} - 2\frac{m_\pi}{c}\cancel{c^2} P_\mu = \cancel{P_\mu^2} + m_\mu^2 \cancel{c^2}$$

$$\boxed{P_\mu = \frac{(-m_\mu^2 + m_\pi^2)c}{2m_\pi}}$$

Podemos resolverlo usando los cuadrimomentos como sigue:

$$\underset{\text{inicial}}{P_\pi^\eta} = \underset{\text{final}}{P_\mu^\eta + P_\nu^\eta} \qquad \text{con} \quad P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

$$P_\pi^\eta \cdot P_{\pi\eta} = (P_\mu^\eta + P_\nu^\eta)(P_{\mu\eta} + P_{\nu\eta})$$

$$m_\pi^2 c^2 - \underset{=0}{P_\pi^2} = P_\mu^\eta P_{\mu\eta} + 2P_\nu^\eta P_{\mu\eta} + P_\nu^\eta P_{\nu\eta}$$

$$m_\pi^2 c^2 = m_\mu^2 c^2 + 2\frac{E_\mu E_\nu}{c^2} - \vec{P}_\mu \cdot \vec{P}_\nu + \underbrace{m_\nu^2 c^2}_{=0}$$

$$m_\pi^2 c^2 - m_\mu^2 c^2 = \frac{2}{c^2} E_\mu P_\mu c + P_\mu^2 \quad \leftarrow \text{No me queda muy fácil de despejar}$$

Conviene considerar mejor

$$(P_\pi)^\mu - (P_\mu)^\mu = (P_\nu)^\mu$$

$$\left[(P_\pi)_\mu - (P_\mu)_\mu\right] \cdot \left[(P_\pi)^\mu - (P_\mu)^\mu\right] = (P_\nu)^\mu (P_\nu)_\mu$$

$$(P_\pi)^\mu (P_\pi)_\mu + (P_\mu)^\mu (P_\mu)_\mu - 2 (P_\pi)^\mu (P_\mu)_\mu = (P_\nu)^\mu (P_\nu)_\mu$$

$$m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c} + \underbrace{\vec{P}_\pi \cdot \vec{P}_\mu}_{=0} = \underbrace{m_\nu^2}_{=0} c^2$$

$$\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2) c^2}{2} = \frac{E_\mu}{\cancel{c}} \cdot m_\pi^2 \cancel{c^2}$$

$$\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2) c^2}{2 m_\pi^2} = E_\mu$$

$$\frac{E_\mu^2}{c^2} - P_\mu^2 = m_\mu^2 c^2 \rightarrow \quad P_\mu = \frac{E_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2$$

$$P_\mu = \frac{c^2 (m_\pi^2 + m_\mu^2)^2}{4 m_\pi^4} - m_\mu^2 c^2$$

se puede despejar de aquí o tomar.

$$(P_\pi)^\mu - (P_\nu)^\mu = (P_\mu)^\mu$$ y llegar a E_ν y $\frac{E_\nu}{c} = |\vec{P}_\nu| = |\vec{P}_\mu|$

Antes de desintegrarse el muón recorrerá una distancia:

$$d = v' \cdot T' \quad , \text{donde } \gamma = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$T' = \frac{T}{\gamma}$

T = vida media en el lab.

T = vida media en el sist. muón

v' = velocidad en el sistema muón

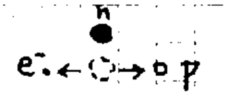
Conviene usar $d' = \frac{p}{M_\mu} \cdot \frac{T}{\gamma}$

$$d = \frac{\gamma M_\mu v_\mu}{M_\mu} \cdot \frac{T}{\gamma} = v_\mu T \rightarrow \boxed{d = T \cdot c \frac{(M_\pi^2 - M_\mu^2)}{2 M_\mu M_\pi}}$$

El muón vive un tiempo mayor a su vida media de laboratorio (T), porque por convención ésta se tabula considerando la partícula en reposo.

• Problema 2:

Si este proceso realmente se da entonces me puedo parar en el sistema neutrón en reposo y considerarlo desde allí suponiendo el caso UMBRAL, en el cual obtengo solamente las partículas en reposo.



ⓐ $P^\mu_{TOT} = \left(\frac{m_n c^2}{c}, 0\right)$

ⓑ $P^\mu_{TOT} = \left(\frac{m_e c^2 + m_p c^2}{c}, 0\right)$

Luego en este sistema suponemos la conservación de la energía $\Rightarrow$

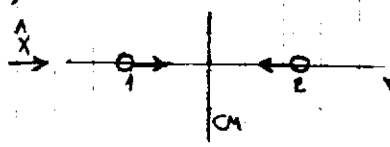
$$m_n c^2 = m_e c^2 + m_p c^2 \quad \Rightarrow$$

939,56 MeV $\neq$ 938,78 MeV $\therefore$ algo se está llevando energía (0,78 MeV) en el proceso.

$\Rightarrow$ debe obtenerse una partícula más = el neutrino

- Problema 4:

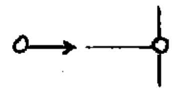
a)



$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$

Me paro en el CM del sistema

* En el frame LAB



inicial) $P^{\mu}_{T} = \left(\frac{E}{c} + mc \,,\, p\right)$ con $p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}$

En el frame LAB es

$P^{\mu}_{T} = \left(\frac{E}{c} + m\,c \,,\, p\right)$

$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$

$\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2} = p$

Esto se conserva medido en el Lab: $P^{\mu}_{T\,\substack{\text{inicial}\\(\text{LAB})}} = P^{\mu}_{T\,\substack{\text{FINAL}\\(\text{LAB})}}$

* En el frame CM

inicial) $P^{\mu}_{T} = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, 0\right)$ ← No puedes vincular fácil E_1, E_2 con E, p en el sistema LAB

Final) $P^{\mu}_{T} = \left(\frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{c}, \vec{p} = 0\right)$ → Ponemos $\vec{p}$ cero porque queremos UMBRAL. Tendremos la energía de las cuatro partículas en reposo

$P^{\mu}_{T} = \left(\frac{mc^2 + mc^2 + mc^2 + mc^2}{c}, 0\right) = (4mc, 0)$ ↘ Estos valores no cambian de un frame a otro

Será un invariante entre frames Inerciales $P^{\mu}P_{\mu}$ ⇒

$$\underset{(CM)}{P^{\mu}P_{\mu}} = (4mc)(4mc)$$

$$\underset{(LAB)}{P^{\mu}P_{\mu}} = \left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - p^2$$

⇒

$$\frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 + 2Em - p^2 = 16m^2c^2$$

$$\cancel{\frac{E^2}{c^2}} + m^2c^2 + 2Em - \cancel{\frac{E^2}{c^2}} + m^2c^2 = 16m^2c^2$$

$$E = \frac{14m^2c^2}{2m}$$

$$\boxed{E_{\text{UMBRAL}} = 7mc^2}$$

(Importante)

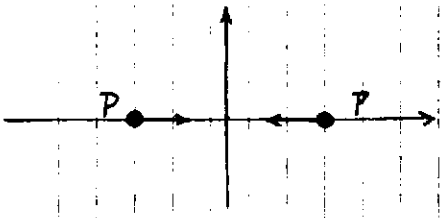
No confundir conservación de la energía con invarianza ante cambio de frame. La energía se conserva en ambos frames pero es un número diferente en el frame lab y en el frame CM. Entonces No es un invariante.
Es decir en ambos son el mismo # antes y después del choque pero esos números no coinciden, porque de serlo sería un invariante también.

b) Sea que colisionan dos haces con energía E. Me paro en el sistema centro de momentos

$\left.\begin{array}{l} \text{CM inicial}) \; P^{\mu}_{TOT} = \left(\frac{2E}{c}\right) \\ \text{CM final}) \; P^{\mu}_{TOT} = (4mc, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $P^{\mu}P_{\mu} = \frac{4E^2}{c^2} = 16m^2c^2$

$\frac{2E}{c} = 4mc$

$\boxed{E_{umbral} = 2mc^2}$



$\Rightarrow \; T_{mínima} = E_{umbral} - mc^2 = mc^2$

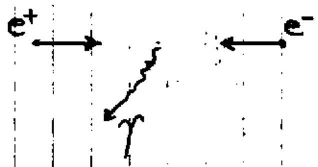
Me alcanza con enviar las partículas con una energía cinética de mc^2 para que se produzca la reacción.

En el caso anterior requería enviarlas con $6mc^2$, lo cual es más costoso a nivel de aceleradores.

• **Problema 5:**

$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma$ (fotón)

Para que cinemáticamente sea posible este proceso necesito una energía umbral.



$*$ frame LAB $\quad \underset{①}{P^{\mu}} = \left(\frac{E^+ + E^-}{c}, \vec{p}^+ + \vec{p}^-\right) \qquad \underset{②}{P^{\mu}} = (P_{\gamma} \cdot c, \vec{P}_{\gamma})$

Necesitaremos $\quad \frac{2E}{c} = P_{\gamma} \rightarrow E = \frac{P_{\gamma}c}{2}$

Para el instante ②

Pero para el fotón es $m_{\gamma} = 0 \Rightarrow \quad P^{\mu}P_{\mu} = m_{\gamma}^2c^2 = 0 = \frac{E^2}{c^2} - P^2 \Rightarrow \frac{E}{c} = P_{\gamma}$

$\vec{P}_{CM} = \frac{m_+\vec{P}_+ + m_-\vec{P}_-}{m_+ + m_-} = \frac{m(\vec{P}_+ + \vec{P}_-)}{2m} = 0$ Me busco un sistema S' (centro de masa) tal que: $\vec{P}_+ = -\vec{P}_-$

$*$ Frame CM $\quad \underset{①}{P^{\mu}} = \left(\frac{E'^+ + E'^-}{c}, 0\right) \rightarrow \underset{②}{P^{\mu}} = (P_{\gamma}c, \vec{P}_{\gamma}) \rightarrow \vec{P}_{\gamma} = 0 \rightarrow P_{\gamma}c = 0 = \frac{E'^+ + E'^-}{c}$ absurdo $\Rightarrow$ $\boxed{\text{cinemáticamente prohibidos}}$

a) Necesitaré dos fotones $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow$

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \Rightarrow \quad \underset{②}{P^{\mu}} = \left([P_{\gamma_1} + P_{\gamma_2}]c, \vec{P}_{\gamma_1} + \vec{P}_{\gamma_2}\right)$ en el frame CM se tendrá:

$\vec{P}_{\gamma_1} + \vec{P}_{\gamma_2} = 0 = \vec{P}_+ + \vec{P}_- \Rightarrow \vec{P}_{\gamma_1} = -\vec{P}_{\gamma_2}$ [momentos opuestos]

Ahora sí es posible

c) En ese caso se requerirá, con $e^+ + e^- \longrightarrow \lambda$

$\vec{P}_{\gamma} = 0 \rightarrow \quad m_{\lambda}^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} \rightarrow E = m_{\lambda}c^2$

$E'^+ + E'^- \geq m_{\lambda}c^2$ como umbral

$E'^+ + E'^- = m_{\lambda}c^2 + \phi$ donde el resto $\phi > 0$ es T_{λ}

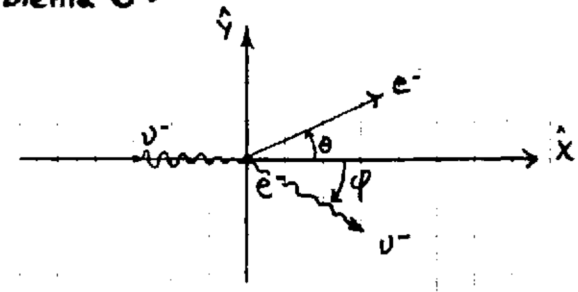
↳ Tengo la restricción de las masas y energías

Notas

$*$ El invariante $P^{\mu}P_{\mu}$ es un mismo # en cualquier sistema inercial pero a un mismo instante, no tiene porqué ser el mismo # a un instante posterior.

$*$ Al cambiar de sistema LAB a CM cambian las $E_+, E_- \rightarrow E'_+, E'_-$; son mayores numéricamente porque absorben la T.

• Problema 6 :



Consideramos sistema laboratorio donde e⁻ está en reposo antes de la colisión

Se conserva la energía ⇒

$$E_\nu + m = E'_\nu + m + T$$
$$E_\nu + m = E'_\nu + E$$

Se conserva el momento lineal ⇒

$$\hat{x})\qquad E_\nu = \sqrt{E^2 - m^2}\,.\cos\theta + E'_\nu.\cos\varphi$$

$$\hat{y})\qquad 0 = \sqrt{E^2 - m^2}\,.\,\text{sen}\,\theta - E'_\nu.\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} E_\nu - (E^2-m^2)^{1/2}.\cos\theta &= E'_\nu.\cos\varphi \\ (E^2-m^2)^{1/2}\,\text{sen}\,\theta &= E'_\nu.\,\text{sen}\,\varphi \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$E_\nu^2 - 2(E^2-m^2)^{1/2}.\cos\theta.E_\nu + (E^2-m^2).\cos^2\theta = E'^2_\nu.\cos^2\varphi$$
$$(E^2-m^2).\,\text{sen}^2\theta = E'^2_\nu.\,\text{sen}^2\varphi$$

NOTA
$$\boxed{\begin{aligned} E - m &= T \\ E + m &= T + 2m \\ E^2 - m^2 &= (T)(T+2m) \end{aligned}}$$

$$E_\nu^2 - 2(E^2-m^2)^{1/2}.\cos\theta.E_\nu + (E^2-m^2) = E'^2_\nu = E_\nu^2 - 2E_\nu T + T^2$$

$$-2(E^2-m^2)^{1/2}.\cos\theta.E_\nu + (E^2-m^2) = T^2 - 2E_\nu T$$

$$-2E_\nu\,T^{1/2}.(T+2m)^{1/2}.\cos\theta + T.(T+2m) = T(T-2E_\nu)$$

$$\underbrace{+\cos\theta}_{(+1-\text{sen}^2\theta)^{1/2}} = \frac{-T(T-2E_\nu) + T(T+2m)}{+2E_\nu\,T^{1/2}.(T+2m)^{1/2}}$$

$$\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = \frac{\cancel{T}^{1/2}(\cancel{-T} + \cancel{2}E_\nu + \cancel{T} + \cancel{2}m)}{(T+2m)^{1/2}\,\cancel{2}E_\nu\,\cancel{T^{1/2}}}$$

$$\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = \frac{T^{1/2}}{(T+2m)^{1/2}}.\frac{(E_\nu+m)}{E_\nu}$$

$$1-\text{sen}^2\theta = \frac{T}{(T+2m)}\frac{(E_\nu+m)^2}{(E_\nu)^2}$$

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \frac{T}{(T+2m)}\frac{(E_\nu+m)^2}{E_\nu^2} = \frac{1}{(T+2m)E_\nu^2}\underbrace{\left((T+2m)E_\nu^2 - T(E_\nu+m)^2\right)}_{\cancel{TE_\nu^2} + 2mE_\nu^2 - \cancel{TE_\nu^2} - 2TmE_\nu - Tm^2}$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{T+2m}\left(2m - \frac{2mT}{E_\nu} - \frac{Tm^2}{E_\nu^2}\right)$$

$$\boxed{\text{sen}^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right)}$$