Estructura de la Materia 4 (Segundo Cuat. de 2006)
Práctica 6: Teorías de Gauge y sus Diagramas de Feynman

Problema 1: Considere la acción de un campo escalar cargado ante el campo electromagnético,

$$L = \int d^4x \left(D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right) ,$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Se pide:

a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación $U(1)$ global definida según $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, para cualquier constante α.

b) Suponiendo, ahora, una transformación local (i.e. permitiendo que α sea, ahora, una función arbitraria de las cuatro coordenadas), deduzca cómo tendría que transformar el campo electromagnético $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ a efectos de que la acción permaneciese invariante ante $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x)$.

c) Muestre que la tranformación del campo $A_\mu(x)$ deja también invariante al lagrangiano de Maxwell.

d) Discuta las reglas de Feynman aplicadas al proceso $\phi\phi^* \to \phi\phi^*$ en el caso en el cual se considera la acción de arriba, pero habiéndole agregado un término $\frac{\lambda_4}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda_3}{3!}\phi^3$ a la densidad lagrangiana. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas.

Problema 2: Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} .$$

Muestre que:

a) Esta acción es invariante ante la transformación de gauge conjunta $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$, donde la transformación del campo electromagnético es aquélla que se dedujo en el problema anterior.

b) Esta acción es invariante ante la transformación global $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A_\mu(x)$, si y sólo si el campo de spin $1/2$ es no-masivo.

Problema 3: Considere las dos teorías de campos descriptas en los problemas 1 y 2.

a) Describa los tipos de vértices de interacción a los que a teoría de Dirac-Maxwell lleva según las reglas diagramáticas de Feynman, y compárelos con aquéllos que corresponderían a la teoría de Klein-Gordon del problema 1.

b) En particular, estudie a qué órden (en potencias de e) aparece el primer término no-nulo en la amplitud de scattering para el proceso que corresponde a: crear un par de fotones a partir de una colisión de partícula-antipartícula. Nuevamente, compare el caso de Klein-Gordon con el caso de Dirac.

c) Presente el diagrama (el que corresponde al menor orden no trivial) del proceso de interacción entre cuatro fotones de distinto momento. Muestre que es indispensable la consideración de un lazo para tal proceso. Lea los comentarios del libro de J.J. Jackson (sí, el de electrodinámica clásica) respecto a este proceso.

d) Volviendo sobre el proceso del punto c) (scattering de Delbruck), diseñe un vértice para un lagrangiano (efectivo) que sirviese para remedar el proceso fotón-fotón $\to$ fotón-fotón a nivel clásico (i.e. a nivel de un gráfico que no incluyese lazos). ¿Cuál debería ser el término que sería necesario agregar y cuál la constante de acoplamiento?

e) Discuta las reglas de Feynman para el lagrangiano a lá Fermi,

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi - g_1\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi - g_2\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\overline{\psi}\psi A_{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

para ser precisos, el de Fermi sólo incluiría, como interacción, el tercero de éstos.

Problema 5: Considere la teoría de Yang-Mills, descripta por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - ig[A_{\mu}, A_{\nu}]$, siendo A_{ν} las componentes de un cuadrivecor de matrices de $d \times d$ tales que éstas pertenecen a una representación de un dado grupo de Lie cuyo álgeba tiene D generadores y sus constantes de estructura son f^{abc}. I.e., se tiene $A_{\nu} = A^{a}_{\nu}(x)J^{a}$, con $[J^{a}, J^{b}] = if^{abc}J^{c}$, y con $A^{a}_{\mu}(x)$ funciones reales que conmutan, $a = \{1, 2, 3, ...d\}$. Note que la traza Tr se toma sobre los índices a, b, justamente. Se pide que:

a) Muestre que si se transforma el campo de gauge según $A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) = \Omega(x)A_{\mu}(x)\Omega^{-1}(x) - \frac{i}{g}\left(\partial_{\mu}\Omega(x)\right)\Omega^{-1}(x)$, dada una transformación arbitraria del grupo $\psi \to \Omega(x)\psi$ con $\Omega(x) = \exp\left(i\omega_{a}(x)J^{a}\right)$, entonces el lagrangiano de Yang-Mills permanece invariante.

b) Esto generalizaría la invarianza de gauge de la teoría electromegnética, discuta por qué.

c) Muestre cómo un término de masa para el gluón (i.e. para el campo de gauge $A^{a}_{\mu}(x)$) rompería dicha invarianza de gauge.

d) Muestre que, a diferencia de la teoría de Maxwell, esta teoría permite la auto-interacción del campo de gauge. Dibuje los diagramas que contribuirían a orden g y g^2 para los scattering de tres gluónes y de cuatro gluones. Al hacer esto, discuta la dependencia del momento del gluón que aparece en algunos vértices de interacción.

Problema 6: Siguiendo con la teoría de Yang-Mills:

a) Escriba el lagrangiano de Yang-Mills acoplado a campos de spin 1/2. Ahora, se tendría que considerar un vector ψ^{a} cuyas componentes son, a su vez, fermiones de Dirac, y que es vector en lo que refiere a sus tranformaciones como vector de la representación del grupo de Lie, $a = \{1, 2, 3, ...d\}$.

b) Obtenga la nueva regla de tranformación para el campo de gauge $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x)$, análogamente como lo hizo en los dos primeros problemas, pero para el caso en el cual el campo transforma ante un grupo de Lie genérico $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Omega(x)\psi(x)$. Es decir, ¿cómo tendría que tranformar el gluón para que la teoría tuviese invarianza local ante tranformaciones de gauge de un grupo genérico cuyos elementos son $\Omega(x)$?

Problema 7: Yendo un poco más allá, considere el lagrangiano del punto a) del problema anterior y modifíquelo levemente introduciendo una matriz simétrica genérica en el término de masa; a saber,

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}^a \gamma^\mu \left(D_\mu\right)^{ab} \psi^b - m\overline{\psi}^a M^{ab} \psi^b - \frac{1}{4} Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right).$$

Discuta la invarianza de gauge que tiene este lagrangiano en función de la matriz M^{ab}. En particular, ¿sería la misma que en el caso diagonal $M^{ab} = m_a \delta^{ab}$?