Estructura de la Materia 4 (Segundo Cuat. de 2006)
Práctica 5: Formulación Lagrangiana

Problema 1: Confeccione un lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange devengan en la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial^\mu \partial_\mu \theta(\overrightarrow{x}, t) = 2\lambda e^{2\theta(\overrightarrow{x}, t)},$$

siendo λ un parámetro constante de la teoría.

Problema 2: Condiere la siguiente densidad lagrangiana

$$L = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* + m^2 \phi^* \phi + V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría. Se pide:

a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos en esta teoría.

b) Calcular los momentos canónico conjugados al campo ϕ y al campo φ.

c) Si se hace, en este lagrangiano, el reemplazo $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, ¿cuál sería el nuevo momento canónico conjugado al campo ϕ?

Problema 3: Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \lambda A^\mu A_\mu\right);$$

siendo, según la convención standard, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y donde λ representa un parámetro constante de la teoría. Se pide:

a) Derivar las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.

b) Muestre que, para $\lambda = 0$, existe una elección de gauge tal que estas ecuaciones pueden escribirse como $\partial^\rho \partial_\rho A^\nu = 0$.

c) Decir si reconoce, en el caso $\lambda = 0$, alguna teoría de campos familiar en tales ecuaciones de movimiento. En tal caso, identifíquela.

d) ¿A qué magnitud física asociaría usted el valor de la constante λ?

Problema 4: Se pide que:

a) Muestre que si agregase a la acción del problema anterior un término de la forma

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\right),$$

donde $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el pseudotensor de Levi-Civita, entonces las ecuaciones de movimento resultantes de la nueva acción permanecerían iguales a las anteriores; es decir, que la inclusión de tal término es inocua en lo que refiere a las ecuaciones clásicas de campo.

b) Escriba la acción de este problema y también el primer término de la acción del problema anterior en función de los campos eléctrico y magnético (E y B respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades T y V (energía cinética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. A fin de otener una interpretación física de esta analogía, piense cómo se escribe la enegía electromagnética en términos de los campos E y B.

Problema 5: Considere el lagrangiano de Dirac acoplado al lagrangiano de Maxwell; es decir

$$L = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

siendo D_μ la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Se pide derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos.

Problema 6: Considere la siguiente acción en tres dimensiones (una menos que lo usual), llamada acción de Chern-Simons

$$S = \int d^3x \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu F^{\nu\rho},$$

donde $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ es el pseudotensor de Levi-Civita (ahora en sólo tres dimensiones), y donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Se pide que derive, a partir de ésta, las ecuaciones de campos para el campo A^μ, y compárelas con las ecuaciones de Maxwell.