Estructura de la Materia 4 (Segundo Cuatrimestre de 2006)
Práctica 4: Ecuaciones de onda relativistas, ecuación de Dirac

Problema 1: Recordando que la ecuación de Schrödinger corresponde a reemplazar la realización $\overrightarrow{p} = -i\hbar\nabla$, $E = i\hbar\frac{d}{dt}$ en la ecuación de movimiento de una partícula según de la física newtoniana, $E = \frac{1}{2m}|\overrightarrow{p}|^2$, proponga cómo sería la ecuación de ondas análoga para el caso de la ecuación de movimiento (relación de dispersión) de una partícula relativista.

Problema 2: Discuta las densidades de probabilidad para la ecuación de Klein-Gordon y para la de Dirac, basándose en las ecuaciones de continuidad que se deducen a partir de éstas. Para hacerlo, considere ambas ecuaciones de onda y también aquéllas que se obtienen al conjugar las mismas (los complejo-conjugados de dichas ecuaciones de onda).

Problema 3: Pruebe que el siguiente operador conmuta con el hamiltoniano de una partícula de spin 1/2.

$$J = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{p} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\sigma} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{\sigma} \end{pmatrix},$$

donde $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$. Relacionar este resultado con la conservación del momento angular total J y la no-conservación del impulso angular orbital L. Discutir el concepto de spin como contribución de dicha cantidad J.

Problema 4: Estudiar la reflexión de una partícula de Dirac ente una barrera de potencial del tipo "escalón". ¿Se conserva la probabilidad entonces? Discuta las componentes de Fourier de energía positiva y negativa de la solución.

Problema 5: Demuestre que el factor giromagnético clásico del electrón $g = 2$ se deduce a partir de la ecuación de Dirac. Asimismo, puede verse que en el límite no-relativista ésta deviene en la ecuación de Schrödinger: Muéstrelo teniendo en cuenta que para $v << c$ vale que $v \simeq \frac{1}{2m}\overrightarrow{\sigma} \cdot (\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})u$.

Problema 6: Demuestre que todas las soluciones a la ecuación de Dirac son soluciones a la ecuación de Klein-Gordon también. Para hacerlo, haga uso del álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

¿Vale lo recíproco? Es decir: ¿Vale que toda solución de Dirac es solución de Klein-Gordon?

Problema 7: Compruebe que el operador $S_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ corresponde a una representación de las transformaciones de Lorentz anctuando sobre spinores de Dirac, según $\psi \to \psi' = e^{i\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\psi$; siendo $\omega^{\mu\nu}$ parámetros antisimétricos (seis de ellos) correspondientes a los tres ángulos de las rotaciones o las tres (arcotangentes de las) velocidades de los boosts. Sabiendo esto, discuta cómo transforman ante Lorentz las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} &\overline{\psi}\psi \\ &\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \\ &\overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned}$$

Compárelas con la forma en la que transforma el producto $\psi^\dagger\psi$.

Problema 8: Construir las soluciones del tipo "onda plana" para la ecuación de Dirac en la representación standard para las matrices γ^μ. Para hacerlo, aplique un *boost* a los spinores $\psi(x) = u(0)e^{-imt}$ y $\psi(x) = v(0)e^{+imt}$. Halle la normalización para los spinores resultantes.

Problema 9: Partiendo de la definición de los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, demuestre las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= 1 \\ P_\pm^2 &= P_\pm \\ P_+P_- &= 0 \\ \gamma^5 P_\pm\psi &= \pm\psi \end{aligned}$$

y que, en el límite ultrarelativista, se cumple que

$$\gamma^5\psi \simeq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \overrightarrow{\sigma} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \frac{\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\psi$$