Serie 0

Preliminares matemáticos

1. Mostrar que un operador hermítico, es tal que su matriz asociada posee la siguientes propiedades:

a) sus autovalores son reales;

b) sus autovectores correspondientes a autovalores no degenerados son mutuamente ortogonales;

c) los autovectores correspondientes a autovalores degenerados pueden elegirse libremente como ortogonales a los no degenerados

2. Sea una base $\{|\psi_i> \ i = 1, \ldots, K\}$ no ortogonal del espacio de estados de un sistema físico y $<\psi_i|\psi_j>= S_{ij}$, el elemento de matrix de la matriz de solapamiento entre dichos estados:

a) obtener una base ortonormal que genere el mismo subespacio original

b) verificar que la ortogonalización simétrica $|\psi_i'>= \sum_j S_{ij}^{-1/2}|\psi_j>$ es una posible elección para el apartado anterior

c) construir un proyector ortogonal $\mathbf{P}$ sobre el subespacio generado por un subconjunto $|\psi_i>, \ldots, |\psi_N>$ de funciones de la base. Qué propiedades debe satisfacer?

d) verificar que se cumple, $0 \leq <\Psi|\mathbf{P}|\Psi> \leq 1$, para todo $|\Psi>$.

3. Dado un operador F, comparar las representaciones matriciales, $F_{ij} =< \psi_i|F|\psi_j>$ y $\{f_{ij}\}$, de manera que, $F|\psi_i>= \sum_j f_{ji}|\psi_j>$:

a) Cómo están relacionadas ambas matrices?

b) en qué casos coinciden?

4. i. Mostrar que el operador permutación P es unitario;

ii. mostrar que el operador antisimetrización $A = (N!)^{-1/2}\sum_p(-1)^p P$, satisface: $A^\dagger = A$ y $A^2 = A$, lo cual indica que es un proyector ortogonal

iii. mostrar que dada una base ortonormal de funciones de una partícula para un sistema de N fermiones, $\{\psi_i\}$, cualquier conjunto $\{A\psi_{i_1}\ldots\psi_{i_N}\}$, es una base ortonormal del sistema. Si la base de funciones de una partícula tiene K elementos, cuántos tiene el conjunto de las N-partículas, es decir cuál es su dimensión?

5. Analizar el conmutador de los operadores $[A, F]$ cuando F es un operador de una y dos partículas.

6. Mostrar que dos matrices *equivalentes* o similares tienen los mismos autovalores, cúal es la importancia de este resultado?

7. Mostrar que la traza de una matriz, el determinante y los coeficientes de la ecuación secular son invariantes ante transformaciones de similaridad.

8. Mostrar que los autovectores de una matriz no degenerada son linealmente independientes.

9. Mostrar que la inversa de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ se puede expresar en términos de potencias de A de hasta orden $n-1$.

10. Mostrar que una matriz U que transforma una matriz hermítica en otra de forma diagonal es unitaria.

11. Mostrar que el producto interno de dos vectores es invariante ante una transformación unitaria de los mismos.

12. Mostrar que los elementos diagonales de la representación matricial de un proyector T, cumplen: $0 \leq T_{ii} \leq 1$