Práctica 7

1.

Flujo 1D — estacionario $\partial_t = 0$
μ, ρ uniformes y constantes $\rightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{U}) = 0$

$$\vec{U} = U(\xi,\eta)\hat{\xi}$$

* Sea ξ coordenada cartesiana $\rightarrow$

$$(\vec{U}\cdot\operatorname{grad})\vec{U} = \left(U_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + U_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + U_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\begin{pmatrix} U_\xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \Big[U_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} U_\xi + \underbrace{U_\eta}_{=0} \frac{\partial}{\partial \eta} U_\xi + \underbrace{U_\zeta}_{=0} \frac{\partial}{\partial \zeta} U_\xi\Big]\hat{\xi}$$

$$= U(\xi,\eta)\underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi,\eta)}_{=0} = \boxed{0}$$ $\rightarrow$ la parte convectiva es nula

* Sea ξ coordenada no cartesiana $\Rightarrow$ tomemos el caso de

$$\vec{U} = U(r,z)\hat{\theta} \rightarrow$$

$$(\vec{U}\cdot\operatorname{grad})\vec{U} = \left(U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta} + U_z \cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ U(r,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{U_r}_{=0} \cdot\frac{\partial}{\partial r} U(r,z)\hat{\theta} + \underbrace{\frac{U_\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\, U(r,z)\,\hat{\theta}} + \underbrace{U_z}_{=0}\cdot\frac{\partial}{\partial z} U(r,z)\hat{\theta}$$

$$= \frac{U^2(r,z)}{r}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = \frac{U^2(r,z)}{r}(-\hat{r}) \neq 0$$

En los otros sistemas coordenados falta esto porque en ellos los versores dependen de los ángulos

2.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\cdot\operatorname{grad})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\cdot\operatorname{grad}(p) + \nu\,\nabla^2\vec{U}$$ $\longleftarrow$ Navier-Stokes en ausencia de gravedad

sea $U \equiv$ velocidad típica problema
$L \equiv$ Longitud característica en un problema

$$\nabla^2\vec{U} \propto \frac{U}{L^2} \quad ; \quad (\vec{U}\cdot\operatorname{grad})\vec{U} \propto \frac{U^2}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{(\vec{U}\cdot\operatorname{grad})\vec{U}}{\nu\,\nabla^2\vec{U}}\right| \propto \frac{U\cdot L}{\nu} = Re$$ (# de Reynolds)

∴ el # de Re da idea del peso relativo entre las fuerzas de inercia y las viscosas.

• Si tenemos $\quad Re \gg 1 \rightarrow \quad |(\vec{U}\cdot \text{grad})\vec{U}| \gg \nu . \nabla^2 \vec{U} \quad$ [1]

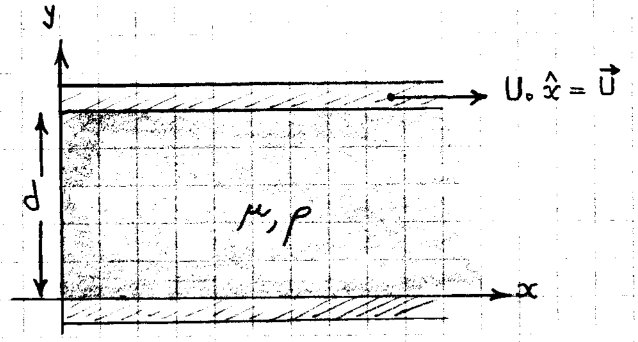
Podríamos considerar que estamos ante un flujo de baja viscosidad y por ende esperar en todo el fluido comportamientos como los de los fluidos ideales ($\nu = 0$).
Sin embargo en las capas límite (pegadas al contorno de los objetos) pese a que ν puede ser bajo los grad de $\vec{U}$ son muy altos [pues $\vec{U}$ debe ajustarse para ser nulo en el contorno] y allí puede dejar de valer [1] $\Rightarrow$ en ese caso la capa límite puede separarse ante una pequeña perturbación y generar un flujo turbulento. Por eso es inestable el caso de $Re \gg 1$

• Si tenemos $\quad Re \ll 1 \rightarrow \quad |(\vec{U}\cdot \text{grad})\vec{U}| \ll \nu . \nabla^2 \vec{U} \quad$ [2]

Estamos ante la presencia de un fluido muy viscoso; el flujo es muy ordenado y muy estable. No hay grandes grad $(\vec{U})$ y por ende no tenemos bruscos cambios en las interfases: el ajuste de $\vec{U}$ es gradual $\Rightarrow$ es muy estable el caso de un término convectivo pequeño.

3.

a)



Planteamos Navier-Stokes general

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot \text{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\cdot \text{grad}(p) + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g}$$

Estamos interesados en la solución estacionaria que se alcanza pasado el transitorio $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

No considero gravedad $\vec{g} = 0$

Como $\vec{v} = v(y)\hat{x} \rightarrow$ el término convectivo no aporta

$$v(y)\frac{\partial}{\partial x}(v(y))\hat{x} = 0$$

Como ρ, μ uniformes $\rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v(y)) = 0$$

• $\vec{v} = v\hat{x}$

• $v \neq v(x)$ por simetría de traslación merced a planos ∞

• $v = v(y)$ pues es $v(y=0) = 0$ y crece $v(y=d) = U$

$$\frac{1}{\rho}\text{grad}(p) = \nu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = p(x) \quad \text{pero} \quad \underset{\uparrow \\ ¿f(x)?}{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}} = \nu . \underbrace{\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}}_{f(y)} \Rightarrow p = K.x$$

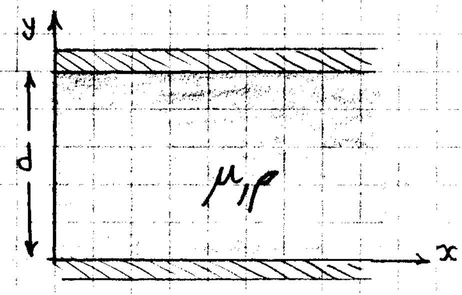
Según esto la presión debería ser lineal en x; pero esto no es posible por la simetría traslacional del problema $\Rightarrow \quad p = K \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = 0$$

Proponemos $\quad v = A.y + B \quad$ (perfil lineal)

C.C. $\begin{cases} v(y=0)=0 & \rightarrow \quad B=0 \\ v(y=d)=U_0 & \rightarrow U_0 = A.d \rightarrow A=\frac{U_0}{d} \end{cases}$ $\boxed{v=\frac{U_0}{d}y}$

b)



Misma geometría que el caso anterior. Buscamos solución estacionaria
$\rightarrow \partial_t \vec{v}=0$
No considero $\vec{g}=0$

La $\vec{v}$ será nula sobre los contornos. El líquido fluirá entre los planos en dirección $\hat{x}$ $\rightarrow$ grad (p) está en $\hat{x}$

$$\text{grad}(p) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P}{l}$$

- $v \neq v(x)$ por simetría de traslación
- $v = v(y)$ con $\left.\begin{matrix} v(y=0)=0 \\ v(y=d)=0 \end{matrix}\right\}$ CC

$$(\vec{v}\cdot\text{grad})\,\vec{v} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}v(y)=0$$

No hay convección $\Rightarrow$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\Delta P}{l} + \nu\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta P}{l}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta P}{\mu . l}$$

$$\frac{d}{dy}v_y = \frac{\Delta P}{\mu . l}$$

$$v_y = \frac{\Delta P}{\mu . l}.y + C$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta P}{\mu . l}.y + C$$

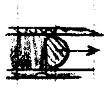
$$v = \frac{\Delta P}{\mu . l}\cdot\frac{y^2}{2} + C.y + D$$

$0 = D$ $\qquad 0 = \frac{\Delta P}{\mu . l}\frac{d^2}{2} + C.d$

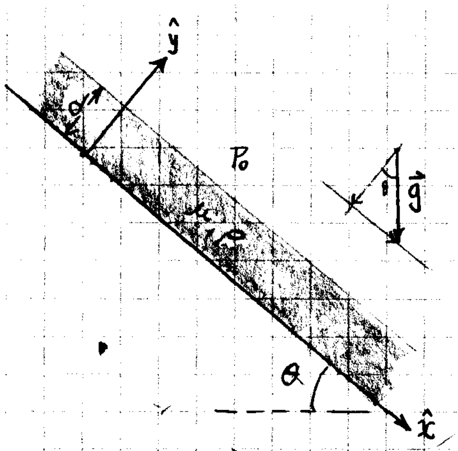
$$C = \frac{-\Delta P . d^{\cancel{2}}}{\mu . l . 2 . \cancel{d}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta P}{2\mu l}\left(y^2 - y.d\right)}$$

(perfil parabólico)



4.



Consideramos un régimen estacionario

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0$ $\qquad \rho$ uniforme $\rightarrow$ div $(\vec{v})=0$

Considerando un régimen estacionario, $\vec{v}=v\,\hat{x}$ (no cabe otra posibilidad).

$$\text{div}(v\hat{x}) = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow v = v(y)$ pues $\begin{matrix} v(y=0)=0 \\ v(y=d)\neq 0 \end{matrix}$

El término convectivo dará: $\quad v_x \frac{\partial}{\partial x} v_x = 0$ pues $v(y)\hat{x} \rightarrow$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot grad(p) + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\left(\partial_x P, \partial_y P, \partial_z P\right) + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\hat{x} - g \cdot \cos\theta\,\hat{y} + g \cdot sen\,\theta\,\hat{x}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow P \neq P(z)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} - g \cdot \cos\theta \quad \hat{y} \rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cdot \cos\theta$$

$$P = -\rho g \cdot \cos\theta \cdot y + f(x)$$

Pero $\underset{\forall x}{P(y=d) = P_0} \rightarrow \qquad P_0 = -\rho g \cos\theta . d + f(x)$

$$\Rightarrow \quad P = -\rho g \cos\theta . y + P_0 + \rho g \cos\theta . d$$

Campo de presiones $\longrightarrow P = -\rho g \cos\theta . (y-d) + P_0$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$0 = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g . sen\,\theta \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -g/\nu \cdot sen\,\theta$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(-g/\nu\right) \cdot sen\,\theta$$

$$\frac{dv}{dy} = \left(-g/\nu\right) \cdot sen\theta . y + C$$

$$v = \left(-g/\nu\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\,\theta . y^2 + C . y + D$$

C.C $\begin{cases} v(y=0) = 0 & \rightarrow D = 0 \\ v(y=d) = v_d : & \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\mu_{aire} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=d} = 0 \end{cases}$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{g}{\cancel{2}\nu} sen\theta . \cancel{2}y + C = 0$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{-g}{2\nu} sen\theta\, y^2 + \frac{g . d}{\nu} . sen\,\theta . y\right)\hat{x}}$$

$$Y = \frac{C . \nu}{g . sen\theta} = d$$

$$C = \frac{d}{\nu} g\, sen\theta$$

b)

$$v_{MAX} = \frac{-g}{2\nu} sen\,\theta\, d^2 + g \frac{d}{\nu} sen\theta\, d = g \frac{d^2 sen\theta}{2\nu}$$

$$v_{prom} = \frac{1}{d}\int_0^d v . dy = \frac{1}{d}\left(\frac{-g}{2\nu} sen\theta . \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^d + \frac{g . sen\theta . d}{\nu} \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^d\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{-g}{6\nu} . sen\theta . d^3 + \frac{g}{2\nu} sen\,\theta\, d^3\right) = \frac{1}{3}\frac{g}{\nu} . sen\theta\, d^2$$

$$\frac{V_{max}}{V_{prom}} = \frac{\cancel{g d^2 sen\theta}}{\cancel{g d^2 sen\theta}} \cdot \frac{3\cancel{\nu}}{2\cancel{\nu}} = \boxed{3/2}$$

c) El caudal será:

$$Q = \int_{\text{Línea corriente } y=0}^{\text{Línea corriente } y=d} \vec{v} . \hat{n}\, dl$$

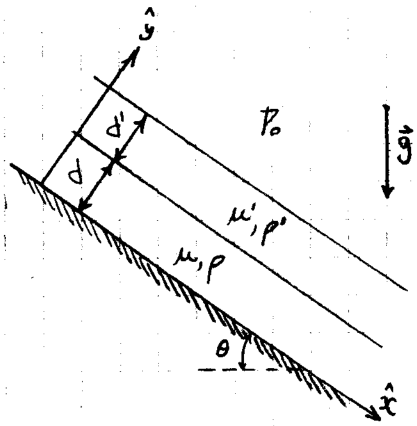
$$Q = \int_0^d -\frac{g}{\nu} \,\text{sen}\,\theta \left(\frac{y^2}{2} - y.d\right) . dy = -g.\frac{\text{sen}\,\theta}{\nu} . \left(\frac{y^3}{3} - \frac{dy^2}{2}\right)$$

$$= -g\frac{\text{sen}\,\theta}{\nu} \left(\frac{d^3}{3} - \frac{d^3}{2}\right) = g\frac{\text{sen}\,\theta}{\nu}\frac{d^3}{6}$$

$$[Q] = \frac{s}{\cancel{m^2}} . \cancel{m^3}$$

$$\boxed{Q_{\text{lineal}} = g\frac{\text{sen}\,\theta}{\nu} . \frac{d^3}{6}}$$ ← caudal por unidad de ancho

5.



Tenemos un segundo líquido inmiscible con el primero.

Queremos régimen estacionario $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

La velocidad será $\vec{v} = v(y)\,\hat{x}$

Por $\text{div}(\vec{v}) = 0$ $\quad v \neq v(x)$

El término convectivo $(\vec{v}.\text{grad})\vec{v} = v(y).\frac{\partial}{\partial x} v(y)\,\hat{x} = 0$

$$[1] \qquad 0 = -\frac{1}{\rho} . \left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}\right) + \nu.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\hat{x} + g.\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} - g.\,\text{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

$$[2] \qquad 0 = -\frac{1}{\rho'} . \left(\frac{\partial P'}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P'}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial P'}{\partial z}\hat{z}\right) + \nu'.\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\hat{x} + g.\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} - g\,\text{sen}\,\theta\,\hat{y}$$

tendremos una ecuación de Navier-Stokes para cada zona de ρ, μ que deberán empalmar. Resolviendo [1] llegamos al mismo resultado, sin imponer CC, que en 4, salvo que:

$$P_d \equiv P(y=d) = -\rho g \cos\theta.\, d + f(x) \rightarrow$$

$$P = -\rho g \cos\theta (y-d) + P_d \quad \Rightarrow \quad P \neq P(x) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$v = \frac{-g}{2\nu}.\,\text{sen}\,\theta\, y^2 + C.y + D$$

$$CC = \begin{cases} v(y=0) = 0 \longrightarrow D = 0 \\ v(y=d) = v_d \text{ : Los esfuerzos de corte son continuos y } v_d = v'_d \end{cases}$$

$$\mu.\frac{dv}{dy}\Big|_d = \mu\left[-\frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta.d + C\right]$$

Resolviendo [2] se llega a:

$$P_0 \equiv P(y = d+d') = -\rho' g \cos\theta.\,(d+d') + f(x)$$

$$\rightarrow \quad P = -\rho' g \cos\theta . y + P_0 + \rho'.g.\cos\theta\,(d+d') \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$v' = -\frac{g}{\nu'}.\frac{1}{2}.\,\text{sen}\,\theta\, y^2 + A.y + B$$

$$CC = \begin{cases} v'(y=d+d') = v'_{max} \\ v'(y=d) = v'_d \text{ : Los esfuerzos de corte son continuos y } v'_d = v_d \end{cases}$$

$$\mu'\frac{dv'}{dy}\Big|_d = \left[\frac{-g}{\cancel{2}\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{2}.\,d + A\right]\mu'$$

$$\frac{dv'}{dy}\Big|_{d+d'} = 0 = -\frac{g.\,\text{sen}\,\theta}{\nu'}(d+d') + A$$

$$\mu\left[C - \frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\right] = \mu'\left[A - \frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\right]$$

$$= \mu'\left[\cancel{+\frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d} + \frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d' - \cancel{\frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d}\right]$$

$$C = \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{g}{\nu'}\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\,d' + \frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d$$

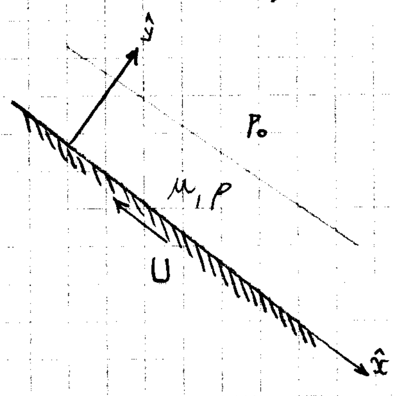
$$v = \frac{-g}{2\nu}\,.\,\text{sen}\,\theta\; y^2 + \frac{\mu'}{\mu}\,.\,\frac{g}{\nu'}\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\,d'\,.\,y + \frac{g}{\nu}\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\,y$$

$$v' = \frac{-g}{2\nu'}\,.\,\text{sen}\,\theta\; y^2 - \frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,(d+d')\,y + B$$

$$-\frac{g}{2\nu}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 + \frac{\mu' g}{\mu \nu'}\,\text{sen}\,\theta\, d'd + \frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 = B - \frac{g}{2\nu'}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 - \frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 - \frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\, dd'$$

$$+\frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\, dd' + \frac{3g}{2\nu'}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 + \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{g}{\nu'}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d'd + \frac{g}{2\nu}\,\text{sen}\,\theta\, d^2 = B$$

6.



Aquí lo que cambia simplemente son las CC

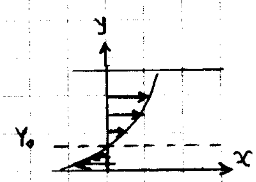
$$CC \begin{cases} v(y=0) = -U\hat{x} \\ v(y=d) = v_d \end{cases} : \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=d} = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{por igualdad} \\ \text{de esfuerzos} \\ \text{tangenciales}\end{array}\right)$$

$$v = \frac{-g}{2\nu}\,\text{sen}\,\theta\; y^2 + C\,.\,y + D$$

$$v(y=0) = D = -U$$

$$\left.\frac{dv}{dy}\right|_d = 0 = \frac{-g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d + C \;\rightarrow\; C = \frac{g}{\nu}\,.\,\text{sen}\,\theta\,.\,d$$

$$\boxed{\vec{v}(y) = \left[\frac{-g}{2\nu}\,\text{sen}\,\theta\; y^2 + \frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\,y - U\right]\hat{x}}$$



$$0 = \frac{-g}{2\nu}\,\text{sen}\,\theta\; Y^2 + \frac{g}{\nu}\,\text{sen}\,\theta\,.\,d\,Y - U$$

$$= -Y^2 + 2Yd - \frac{U\,.\,2\nu}{g\,.\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 - 4(-1)\,.\,U 2\nu / g\,\text{sen}\,\theta}}{-2}$$

$$y_1, y_2 = \frac{2d \pm \sqrt{4d^2 + \dfrac{8U\nu}{g\,\text{sen}\,\theta}}}{2}$$

corresponde la solución $\displaystyle y_0 = d - \sqrt{d^2 + \frac{4U\nu}{g\,.\,\text{sen}\,\theta}}$

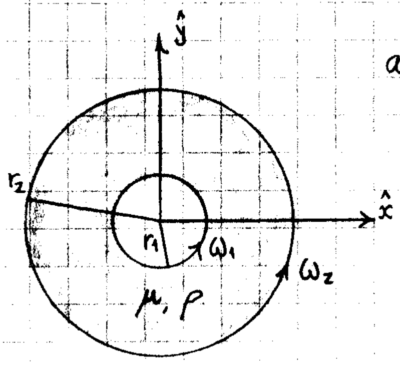
Se ha pedido como condición de contorno que el líquido tenga la velocidad del plano inclinado [condición de No-deslizamiento] en $y=0$.

***** Suplemento Ejercicio 5

Considerando que el sistema ha alcanzado el régimen estacionario aplicamos la condición de No deslizamiento; lo cual significa que el fluido superior ve incrementada su velocidad en v (la velocidad del líquido inferior).

Lo que se pide en la interfaz de ambos fluidos es la continuidad de los esfuerzos de corte. Su discontinuidad generaría paradojas de aparición de aceleraciones enormes que no se han observado experimentalmente.

7.



a) Buscamos solución laminar y estacionaria.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Como ρ es uniforme $\rightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

Simetría de revolución $\rightarrow$ $\vec{v} \neq \vec{v}(\theta)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{v}(r=r_1) = \omega_1 \hat{\theta} \\ \vec{v}(r=r_2) = \omega_2 \hat{\theta} \end{array}\right\}$ por condición de No deslizamiento

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = v(r)\,\hat{\theta}$$

Escribiendo Navier-Stokes en cilíndricas tendremos:

$$[1]\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{v^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \nu \underbrace{\left(-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\right)}_{=0} \\ (\vec{v}.\mathrm{grad})\, v \overset{\ddagger}{=} -\dfrac{1}{\rho . r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v - \dfrac{v}{r^2}\right) \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{array}\right.$$

‡ Aquí no hay que derivar versores pues $(\vec{v}.\mathrm{grad})v$ es nec. un escalar

Pero $(\vec{v}.\mathrm{grad})\, v = \left(\overset{0}{v_r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \overset{0}{v_z}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) v_\theta = \dfrac{v_\theta}{r}.\dfrac{\partial}{\partial \theta} v_\theta = 0$ (El término convectivo no aporta)

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left[r.\frac{\partial}{\partial r} v(r)\right] + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r)}{\partial \theta^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v(r)}{\partial z^2}}_{=0}$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r}.\left[\frac{\partial v}{\partial r} + r.\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right] = \frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Reescribimos [1] como.

$$[2]\left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{v^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}.\dfrac{\partial P}{\partial r} & 0 = -\dfrac{1}{\rho}.\dfrac{\partial P}{\partial z} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho r}.\dfrac{\partial P}{\partial \theta} + \nu\left[\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \dfrac{v}{r^2}\right] & \end{array}\right.$$

$P \neq P(z) \rightarrow P = P(r,\theta)$ pero

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \theta}}_{f(r,\theta)} = \underbrace{\nu.\left[\frac{\partial v}{\partial r} + r.\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r}\right]}_{f(r)}$$

¿?

Con lo cual $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = f(r) \rightarrow$ integrando $P = T(r).\theta + K(r)$;

pero $P(r,\theta=0) = P(r,\theta=2n\pi) \rightarrow$ P no puede ser multivaluada $\Rightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = P(r)$$

, por lo tanto todo se reduce a resolver la ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0$$

Esto tiene solución general $v = A.r + \frac{B}{r}$ (Después de haber forzado una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{B}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{B}{r^2}\right) = \frac{2B}{r^3} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} \\ -\frac{v}{r^2} = -\frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} \end{cases}$$

Ahora considerando CC $\begin{cases} v(r=r_1) = \omega_1 . r_1 \\ v(r=r_2) = \omega_2 . r_2 \end{cases}$

$$r_1 . \omega_1 = A r_1 + \frac{B}{r_1^2} \rightarrow$$

$$r_2 . \omega_2 = A r_2 + \frac{B}{r_2^2} \rightarrow$$

$$A = \omega_1 - \frac{B}{r_1^2} = \omega_2 - \frac{B}{r_2^2}$$

$$B\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \omega_2 - \omega_1$$

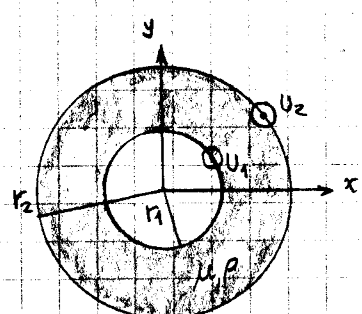
$$B = (\omega_2 - \omega_1)\frac{r_2^2 r_1^2}{(r_1^2 - r_2^2)}$$

$$A = \omega_1 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)\, r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)} = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)}$$

$\omega_1 r_1 - \cancel{\omega_1 r_2} - \omega_2 r_2 + \cancel{\omega_1 r_2}$

$$\boxed{\vec{v} = v(r)\,\hat{\theta} = \left[\frac{(\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2)}{(r_1^2 - r_2^2)} . r + \frac{1}{r} . \frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{(r_1^2 - r_2^2)}\right]\hat{\theta}}$$

b)



Buscamos solución laminar y estacionaria $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Una vez alcanzado el estado estacionario debe valer que:

$$\vec{v} = v(r)\hat{z}$$

Con CC $\begin{cases} v(r_1) = U_1 \\ v(r_2) = U_2 \end{cases}$

$\vec{v} \neq \vec{v}(z)$ por la simetría de traslación en $\hat{z}$
$\vec{v} \neq \vec{v}(\theta)$ " " " " rotación entorno a $\hat{z}$

Escribamos las ecuaciones de Navier-Stokes correspondientes:

$$[1] \quad \begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial r} \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ (\vec{v}\cdot\mathrm{grad})v = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}v\right)\right] \end{cases}$$

Pero $\quad v_z \frac{\partial}{\partial z} v(r) = 0 \quad \Rightarrow$ el término convectivo no aporta

Ahora bien $\quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad P = P(z) + K \quad$ pero

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}}_{f(z)} = \underbrace{\nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r} v(r) \right]}_{f(r)}$$

, luego $\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad P =$ Constante

$$0 = \nu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) \right] = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

$v = U.r$

$\frac{dv}{dr} = U(r)$

$U' +$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right] \quad \rightarrow \quad r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = K$$

si $r \neq 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{K}{r}$

$$v = K . \ln(r) + C$$

(dos constantes K y C)

$$v(r = r_1) = K \ln(r_1) + C = U_1$$

$$v(r = r_2) = K \ln(r_2) + C = U_2$$

$$K \ln(r_2) + U_1 - K \ln(r_1) = U_2$$

$$K \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = U_2 - U_1$$

$$K = \frac{U_2 - U_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right)} = \frac{U_1}{U_2}$$

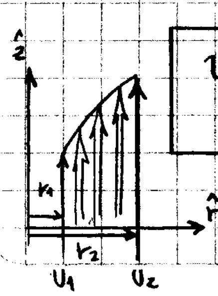
$\ln$

$$C = U_1 - K \ln r_1 = U_1 - \frac{(U_2 - U_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln r_1$$

$$C = \frac{U_1 \ln(r_2) - \cancel{U_1 \ln r_1} - U_2 \ln r_1 + \cancel{U_1 \ln r_1}}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$C = \frac{U_1 \ln(r_2) - U_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$v(r) = \left(\frac{U_2 - U_1}{\ln(r_2/r_1)} \right) . \ln r + \ln\left(\frac{r_2^{U_1}}{r_1^{U_2}} \right) \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$



$$\boxed{v(r) = \frac{(U_2 - U_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} . \ln(r) + \frac{\ln\left(r_2^{U_1}/r_1^{U_2}\right)}{\ln(r_2/r_1)}}$$

(perfil logarítmico)

8.

a) El punto del fluido de mayor rapidez será:

$$Y_0: \quad \left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0} = 0 \qquad +\frac{\Delta P}{2\mu l} 2y - \frac{\Delta P . d}{2\mu l} = 0 \rightarrow \boxed{Y_0 = \frac{d}{2}}$$

• Por análisis dimensional

$$Y_0 = f\left(d, \mu, \rho, \frac{\Delta P}{l}\right)$$

la presión

Como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - constante entonces no puede depender de los dos μ, ρ al mirar la ec. diferencial ρ no figura →

	d	μ	$\cancel{\rho}$	$\Delta P/l$	Y_0
L	1	-1	-3	-2	1
M	0	1	1	1	0
T	0	-1	0	-2	0

$$\underset{4-3}{n-k} = 1 \ \# \pi$$

Pero no sirve porque Y_0/d ya es adimensional. Entonces tomaremos

$$Y_0 = f\left(\mu, \frac{\Delta P}{l}, d\right)$$

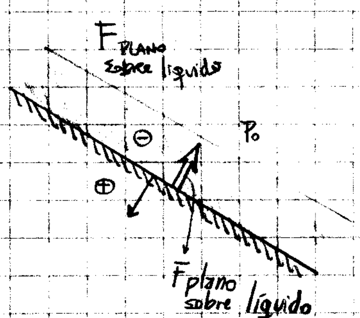
	Y_0	μ	$\Delta P/l$	d
L	1	-1	-2	1
M	0	1	1	0
T	0	-1	-2	0

$$n-k$$
$$3-2 = 1 \ \# \pi \rightarrow \pi = Y_0/d$$

$$\boxed{Y_0 = K . d}$$

El análisis dimensional nos dice que el punto de mayor rapidez no dependerá de μ ni de $\Delta P/l$

b) Fuerza del plano al líquido



$$\vec{F} = -\int p \, \hat{n} \, dy \, dz + \mu .$$

$$\vec{F} = -(-\hat{y}) \int p . \, dx . \, dz$$

$$P = P_0 - \rho . g . \cos\theta . (y - d)$$

$$= \hat{y} \int_0^L \int_0^L (P_0 + \rho . g . \cos\theta . d) . \, dx . dz$$

$$f = \hat{y} . (P_0 + \rho . g \cos\theta . d) \quad , \text{ con } f = \frac{F}{L^2}$$

Fuerza por unidad de área

• Por análisis dimensional

$$f = f\left(d, g \cos\theta, \rho, P_0\right)$$

$\frac{F}{L^2}$

	f	d	g'	ρ	P_0
L	-1	1	1	-3	-1
M	1	0	0	1	1
T	-2	0	-2	0	-2

$$n - k = 5 - 3 = 2 \ \# \pi$$

En un primer caso consideraremos $P_0 \sim 0$ entonces tendremos $1 \ \# \pi$ que será:

$$\pi = f \, d^a \, g'^b \, \rho^c$$

$$L^0 M^0 T^0 = L^{-1} M^1 T^{-2} L^a L^b T^{-2b} L^{-3c} M^c$$

$$-1+a+b-3c=0 \qquad -1+a-1+3=0 \qquad a=-1$$
$$1+c=0 \rightarrow c=-1$$
$$-2-2b=0 \rightarrow b=-1$$

$$\Pi = f\, d^{-1} g^{-1} \rho^{-1}$$

$$\boxed{f = K\, \rho . g . \cos\theta . d}$$

Volviendo al caso general observamos que $[f]=[P_0]$ con lo cual $\Pi_1 = \frac{f}{P_0}$

$$\Pi_2 = P_0\, d^a g^b \rho^c$$

y como tienen las mismas dimensiones f y P_0 será

$$\frac{f}{P_0} = f\left(P_0\, d^{-1} . g . \cos\theta^{-1} . \rho^{-1} \right)$$

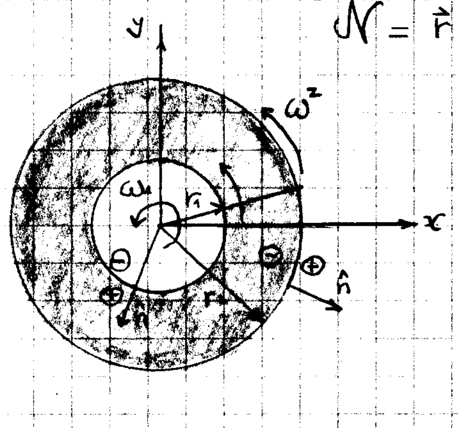
$$f = P_0 . f\left(\frac{P_0}{\rho . g . d . \cos\theta} \right)$$

Juntando los dos casos, vemos que si $P_0 \sim 0 \rightarrow$ podríamos postular una f:

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta} \rightarrow f = \cancel{P_0} . \frac{\rho . g . d . \cos\theta}{\cancel{P_0}}$$

lo cual lleva al caso anterior.

c) Cada cilindro le aplicará un torque N al fluido dado por



$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

me interesará solo la componente en $\hat{\theta}$ de la fuerza dada por

* cilindro 1

$$F = \int \overleftrightarrow{T}\, \hat{n}\, dS \qquad dS = r_1 d\theta dz \qquad \hat{n} = \hat{r}$$

$$\begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{rr}\hat{r} \\ e_{\theta r}\hat{\theta} \\ e_{zr}\hat{z} \end{pmatrix}$$

$$\mu \left(r . \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}_{=0} \right) r_1\, d\theta . dz \;\; \hat{\theta}$$

El fluido tiende a hacer girar al cilindro ccw $\rightarrow$ $d\vec{N} > 0$ [en $\hat{z}$]

con la $\hat{n}$ evaluada es la $\vec{N}$ del fluido sobre el cilindro

$$\left(-\frac{1}{r^2} 2\right) \frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_2 - \omega_1)\mu}{(r_1^2 - r_2^2)} \;\; \hat{\theta}$$

$$d\vec{N} = \cancel{r} . \frac{2}{r^{\cancel{2}}} \frac{r_1^2 r_2^2 [\omega_2 - \omega_1]}{(r_2^2 - r_1^2)} \mu\, \hat{z}$$

por unidad angular y de longitud en $\hat{z}$

$\omega_2 > \omega_1 \rightarrow$ es $d\vec{N} < 0$

torque del cilindro sobre el fluido $\quad -d\vec{N} = -\frac{2}{r} \frac{r_1^2 r_2^2 [\omega_2 - \omega_1]}{(r_2^2 - r_1^2)} \mu\, \hat{z}$

* cilindro 2

torque del cilindro sobre el fluido $\longrightarrow d\vec{N} = \dfrac{2}{r}\dfrac{r_1^2 r_2^2(\omega_2-\omega_1)}{(r_2^2-r_1^2)}\mu\ \hat{z}$

si $\omega_2>\omega_1 \rightarrow$ el cilindro le ayuda a girar al fluido

Si $\omega_2<\omega_1 \rightarrow$ el cilindro frena algo al fluido

Aplicando ahora análisis dimensional será:

$$\tau = f(\mu, r_1, r_2, \omega_1, \omega_2)$$

$[\tau] = M^1 L^2 T^{-2}$

	μ	r_1	r_2	ω_1	ω_2	τ/unidad de long
L	-1	1	1	0	0	1
M	1	0	0	0	0	1
T	-1	0	0	-1	-1	-2

$6-3 = 3\ \#\pi \rightarrow$

$\Pi_1 = \dfrac{r_1}{r_2}$ $\qquad \Pi_2 = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$

$\Pi_3 = r_1^a\,\omega_1^b\,\mu^c\,\tau$

$L^a\,T^{-b}\,L^{-c}M^c\,T^{-c}\,L^2M^1T^{-2}$

$a-c+1=0 \qquad a=-2$

$-b-c-2=0 \qquad b=-2+1=-1$

$c+1=0 \qquad c=-1$

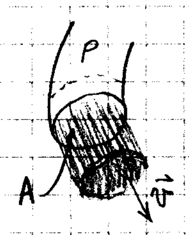
$r_1^{-2}\,\omega_1^{-1}\,\mu^{-1}\,\tau = \Pi_3$

$$\boxed{\tau = \mu\,\omega_1\,r_1^2\,f\left(\frac{r_1}{r_2},\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$$

d) Caudal másico es

$\rho.v.A$

$\dfrac{M}{\cancel{L^3}}\dfrac{\cancel{L^1}}{T^1}\cancel{L^2}$



$[Q_m] = M.T^{-1}$

$$Q_m = f(\rho, \mu, r_1, r_2, U_1, U_2)$$

	Q	ρ	r_1	r_2	U_1	U_2
L	0	-3	1	1	1	1
M	1	1	0	0	0	0
T	-1	0	0	0	-1	-1

$6-3 = 3\ \#\pi$

$\Pi_1 = r_1/r_2$

$\Pi_2 = U_1/U_2$

$\Pi_3 = Q\,\rho^a\,r_1^b\,U_1^c$

$M^1T^{-1}\,L^{-3a}M^a\,L^b\,L^cT^{-c}$

$$\boxed{Q = K.\rho.r_1^2\,U_1\,f\left(\frac{r_1}{r_2},\frac{U_1}{U_2}\right)}$$

$-1-c=0 \rightarrow c=-1$

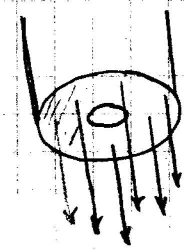
$1+a=0 \rightarrow a=-1$

$-3a+b+c=0 \qquad 3+b-1=0$
$b=-2$

$\Pi_3 = Q\,\rho^{-1}\,r_1^{-2}\,U_1^{-1}$

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \vec{v}\cdot\hat{n}\, dl$$ Esto es caudal por unidad de longitud

$$Q_m = \int_S \rho\, v \cdot dS$$



$$= \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \rho\, v(r) \quad r\, d\theta\, dr$$

$$\rho\, 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{U_2-U_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(\ln r) + \_\_\_\_\_\_ \right) r\, dr$$

$$= 2\pi\rho \left[\frac{\ln\left(r_2^{U_1}/r_1^{U_2}\right)}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \left(\frac{r_2^2-r_1^2}{2}\right) + \left(\frac{U_2-U_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right) \int_{r_1}^{r_2} \ln r \cdot r\, dr \right]$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \ln r \cdot r\, dr = \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{r^2}{4} \Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$Q_m = 2\pi\rho \left(\frac{r_2^2-r_1^2}{2}\right) \frac{\ln\left(r_2^{U_1}/r_1^{U_2}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} + \frac{2\pi\rho\,(U_2-U_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\frac{r_2^2 \ln r_2}{2} - \frac{r_1^2 \ln r_1}{2} - \frac{r_2^2}{4} + \frac{r_1^2}{4} \right]$$

$$= \frac{2\pi\rho}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[(r_2^2 - r_1^2)(U_1 \ln r_2 - U_2 \ln r_1) + (U_2 - U_1)(r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1) \right.$$
$$\left. (U_2 - U_1)\left(-\frac{r_2^2}{4} + \frac{r_1^2}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi\rho}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\cancel{r_2^2 U_1 \ln r_2} - r_1^2 U_1 \ln r_2 - U_2 r_2^2 \ln r_1 + \cancel{U_2 r_1^2 \ln r_1} \right.$$
$$\left. + U_2 r_2^2 \ln r_2 - \cancel{U_1 r_2^2 \ln r_2} - \cancel{U_2 r_1^2 \ln r_1} + U_1 r_1^2 \ln r_1 + \dots \right]$$

$$= r_1^2 U_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 U_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{U_2-U_1}{4}(r_1^2 - r_2^2)$$

$$\boxed{Q_m = \frac{\pi\rho}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \left[\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left[U_2 r_2^2 - U_1 r_1^2\right] + \left[r_1^2 - r_2^2\right]\frac{(U_2-U_1)}{4} \right]}$$

$$+ \frac{U_2 r_1^2 - r_2^2 U_2 - U_1 r_1^2 + r_2^2 U_1}{4} \Big]$$

Si las velocidades fuesen iguales $U_1 = U_2 \rightarrow$

$$\left[Q_m = \pi \cdot \rho\, U \cdot (r_2^2 - r_1^2) \right]$$ lo cual parece muy razonable

* Suplemento Ejercicio 8 b)

$$F = \iint \overleftrightarrow{T}\,\hat{n}\; dx\,dz$$

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_{xy} \\ -T_{yy} \\ -T_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\left(\partial_x v_y + \partial_y v_x\right) \\ p - \mu\left(\partial_y v_y + \partial_y v_y\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu\, \partial_y v_x & \hat{x} \\ p & \hat{y} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

fuerzas de corte por unidad de área

$$f = -\mu \cdot \left(\frac{-g}{\cancel{2}\nu} \operatorname{sen}\theta \cdot \cancel{2}\, y + \frac{g}{\nu} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d \right)$$

$$f = 0 \qquad \text{en } (y = d)$$

no hay esfuerzos de corte en la superficie