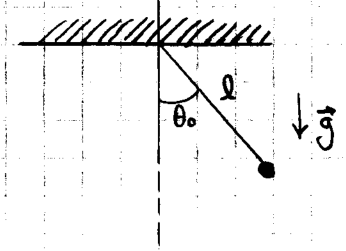
Practica 6

1.



Péndulo simple

De la ecuación diferencial sabemos que la masa no interviene. Tampoco está en las CC del problema. Pero manteniéndola sucede que vemos

$$\tau = f(l, g, \theta_0, m)$$

¿?

	τ	g	l	θ_0	m
L	0	1	1	0	0
M	0	0	0	0	1
T	1	-2	0	0	0

→ Aquí vemos claro que la masa no encaja en este esquema. Entonces,

① Meto una magnitud más

② La desecho

No puedo meter una magnitud más porque conozco que no hay más dependencias

$n = 4$, $k = 2 \Rightarrow 2 \# \pi$

$\pi_1 = \theta_0$

$$\pi_2 = \tau^1 \cdot g^b \cdot l^c = L^0 M^0 T^1 \cdot L^b M^0 T^{-2b} L^c M^0 T^0$$

$$\begin{cases} 0 + b + c = 0 \\ 1 - 2b = 0 \\ \quad b = 1/2 \\ \quad b = -c = -1/2 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \tau \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} = \tau\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\pi_2$$

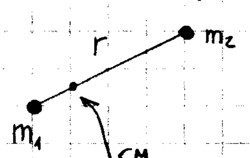
Puede escribirse: $\pi_2 = f(\pi_1) \rightarrow \tau\sqrt{g/L} = f(\theta_0)$

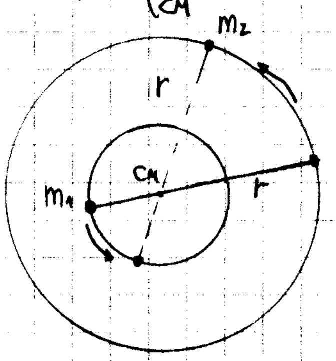
$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\theta_0)}$$

con $f(\theta_0)$: $\quad 1/10 \leq f(\theta_0) \leq 1$

2.

Dos cuerpos sometidos a su atracción mutua moviéndose de tal forma que r permanece invariable.





En ausencia de fuerzas externas el CM se mueve con velocidad constante. Me puedo poner en un sistema inercial en el cual $V_{CM} \equiv 0$ →

Seguro que el periodo (τ) dependerá de m_1, m_2 (relacionados estos con la ubicación del CM) y de r.

$$\tau = f(m_1, m_2, r, G)$$

Hemos metido G intuyendo que aparecerá porque la fuerza que mantiene en sus órbitas a las masas es la gravitatoria.

	τ	m_1	m_2	r	G
L	0	0	0	1	3
M	0	1	1	0	-1
T	1	0	0	0	-2

$n-k$

$5-3 = 2 \ \# \pi$

Las magnitudes m_1, m_2 tienen las mismas dimensiones, su cociente constituirá un número π de por sí.

$$\pi_1 = \frac{m_1}{m_2}$$

con dos mag. de iguales dimensiones hago un $\# \pi$

•Nota

En π_2 tenemos que poner algún m porque no puede figurar una dimensión en una sola magnitud

$$\pi_2 = \tau\, r^a G^b m_1^c$$

Para π_2 tomamos

	τ	m_1	r	G
L	0	0	1	3
M	0	1	0	-1
T	1	0	0	-2

$$(L^0M^0T^1)(L^aM^0T^0)(L^{3b}M^{-b}T^{-2b})(L^0M^cT^0)$$

$a+3b=0$ $\quad$ $a=-3(1/2)=-3/2$

$c-b=0 \rightarrow c=b=1/2$

$1-2b=0$ $\quad$ $b=1/2$

$$\pi_2 = \tau\, r^{-3/2} G^{1/2} m_1^{1/2}$$

$$\pi_2 = f(\pi_1) \rightarrow \quad \tau\, r^{-3/2} G^{1/2} m_1^{1/2} = f(m_1/m_2)$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_1}}\cdot f\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

Si la trayectoria fuese elíptica, modificamos:

	τ	m_1	m_2	r_M	r_m	G
L	0	0	0	1	1	3
M	0	1	1	0	0	-1
T	1	0	0	0	0	-2

$n-k$

$6-3 = 3 \ \# \pi$

Salen dos $\# \pi$ inmediatamente, porque son magnitudes de iguales dimensiones

$$\pi_1 = m_1/m_2$$

$$\pi_2 = r_M/r_m$$

$$\pi_3 = \tau\, G^b m_1^c r_M^d$$

cada dimensión debe figurar en 2 magnitudes del problemas

$$T^1 \quad L^{3b}M^{-b}T^{-2b}M^cL^d$$

$3b+d=0$ $\quad$ $d=-3b=-3/2$

$c-b=0 \rightarrow c=b=1/2$

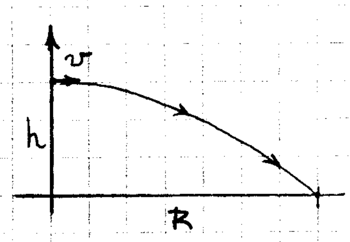
$1-2b=0$ $\quad$ $b=1/2$

$$\pi_3 = \tau\, r_M^{-3/2} G^{1/2} m_1^{1/2}$$

$$\pi_3 = f(\pi_1, \pi_2)$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{r_M^3}{Gm_1}}\, f\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{r_M}{r_m}\right)}$$

3.



$$R = f(h, v, g, m)$$

m → no debería depender de m

g ↑ porque tiene que ver con la fuerza que lo tira hacia abajo)

	R	h	v	g	m
L	1	1	1	1	0
M	0	0	0	0	1
T	0	0	-1	-2	0

← De aquí vemos que m estará sobrando (lo desechamos)

$$\pi_1 = \frac{R}{h}$$

$$\pi_2 = R\, v^a g^b$$

Me queda vinculado el dato, R, que quiero obtener. Es lo que se llama un factor de escala (R/h) hay que hacer experimentos en este caso.

$$L^1 L^a T^{-a} L^b T^{-2b}$$

$1 + a + b = 0$ $\quad$ $1 = b$

$-a - 2b = 0$ $\quad$ $a = -2$

$a = -2b$

$$\pi_2 = R\, v^{-2} g^1$$

$$R = \frac{v^2}{g} \cdot \pi_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{R = \frac{v^2}{g} f(R/h)}$$

Podríamos ensayar una $f(R/h)$ lineal pero en ese caso se cancela R, entonces probamos $k\frac{h}{R}$ $\Rightarrow$

$$R = \frac{v^2}{g} k \frac{h}{R} \rightarrow R^2 = \frac{v^2}{g} h k$$

$$\frac{1}{10} \leq f(R/h) \leq 1$$

Esto da bastante bien $\leftarrow$ $R = v\sqrt{\frac{kh}{g}}$

($k=2$) es la solución teórica.

Pero análisis dimensional no da modo de hallar f [hay que hacer experimentos]

Podríamos haber tomado otra elección $\downarrow$

$$\pi_2 = h^c v^a g^b$$

$$L^1 L^a T^{-a} L^b T^{-2b} \rightarrow$$

$c + a + b = 0$ $\quad$ $c - b = 0$

$-a - 2b = 0$ $\quad$ $b =$

$a = -2b$ $\quad$ $a = -2$

$$\pi_2 = \frac{h}{v^2} g$$

$$\pi_1 = \frac{R}{h} \quad \rightarrow \quad \boxed{R = h\, f\left(\frac{hg}{v^2}\right)}$$

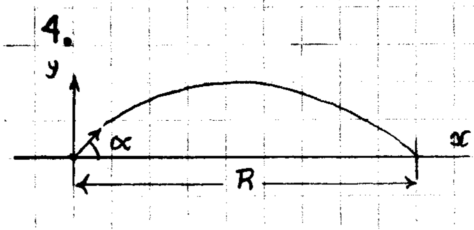
$$R = h\, K\left(\frac{v^2}{hg}\right)^{1/2}$$

Este pasaje usa que conozco el resultado final

$$R = v\sqrt{\frac{kh}{g}}$$

En el 1er caso la relación funcional fue una hipérbola y en el segundo una raíz cuadrada (a la menos uno)

4.



$$R = f(v, g, \alpha)$$

donde se ha considerado que v es $|\vec{v}_0|$ $\rightarrow$ el ángulo se metió aparte y será un # π

	R	v	g	α
L	1	1	1	0
M	0	0	0	0
T	0	-1	-2	0

$n = 4$

$k = 2$

$$\pi_1 = \alpha$$

$$\pi_2 = R\, v^a g^b$$

$$L^1 L^a T^{-1a} L^b T^{-2b}$$

$1 + a + b = 0 \rightarrow 1 - b = 0$ $\quad$ $b = 1$

$-a - 2b = 0$

$a = -2b \rightarrow a = -2$

$$\Pi_2 = R \cdot v^{-2} \cdot g \quad \rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{R}{v^2} g$$

Esto no está mal, pero puede llegarse más lejos usando más física $\rightarrow$ $\boxed{R = \frac{v^2}{g} f(\alpha)}$

Consideramos como variables separadas las magnitudes v_x, v_y; que incluirán al ángulo α.

$R = f(v_x, v_y, g)$

$v_x = v \cdot \cos\alpha$
$v_y = v \cdot \text{sen}\,\alpha$

todas velocidades iniciales

	v_x	v_y	g	R
L	1	1	1	1
M	0	0	0	0
T	-1	-1	-2	0

n-k
4-3

$$\Pi_1 = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\Pi_2 = v_x^a \cdot R\, g^b$$

$$L^a T^{-a} L^1 L^b T^{-2b}$$

$1 + a + b = 0 \rightarrow -b = -1$, $b = 1$

$-a - 2b = 0$
$a = -2b \Rightarrow a = -2$

$$\Pi_2 = v_x^{-2} R g$$

$$R = \frac{v_x}{g} f(v_y/v_x) \quad \leftarrow \quad f\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \frac{R}{v_x^2} \cdot g$$

$$R = \frac{v \cdot \cos\alpha}{g} f\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Otro modo aún, es separar la escala L para lograr "3" dimensiones independientes y tener un solo # Π.

	v_x	v_y	g	R
L_x	1	0	0	1
L_y	0	1	1	0
T	-1	-1	-2	0

4-3
n-k = 1

$$\Pi = R\, g^a v_x^b v_y^c$$

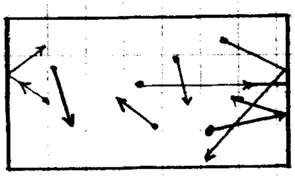
$$\underbrace{L_x^1}\, \underbrace{L_y^a} T^{-2a} \underbrace{L_x^b} T^{-b} \underbrace{L_y^c} T^{-c} \rightarrow$$

$1 + b = 0$ $\quad \boxed{b = -1}$
$a + c = 0$ $\quad a = -c$
$-2a - c - b = 0$ $\quad -2a + a + 1 = 0$ $\quad \boxed{c = -1}$ $\quad \boxed{1 = a}$

$$\boxed{R = \frac{K \cdot v^2 \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}{g}} \quad \leftarrow \quad \Pi = R \cdot g \cdot v_x^{-1} v_y^{-1} = \frac{R \cdot g}{v^2 \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha}$$

Este es un verdadero triunfo. El cálculo usual da K=2

5. La ecuación de estado de los gases ideales no es otra cosa que la expresión de la presión en un compartimento conteniendo un gas. Sin embargo conviene partir de la temperatura, pensándola como el producto de los choques de las partículas contra las paredes.



$$T = f(N, P, V)$$

\# de moléculas, presión, Volumen

$$\frac{\frac{m.\ell}{.s^2}}{\ell^2} = \frac{m}{\ell . s^2}$$

	P	V	N	T	C_θ
L	-1	3	0	0	-2
M	1	0	0	0	-1
T	-2	0	0	0	+2
θ	0	0	0	1	1

Propongo una constante, en danza con las unidades para que T resulte en unidades de θ (temperatura)

$n-k$

$5-3 = 2 \ \# \pi$

$\pi_1 = N$

$$\pi_2 = T\, C_\theta^{a}\, V^{b}\, P^{c}$$

$$\theta^1 M^{-a} T^{2a} \theta^a L^{3b} L^{-c} M^{c} T^{-2c} L^{-2a}$$

$1+a=0 \qquad a=-1$

$-a+c=0 \qquad c=-1$

$2a-2c=0$

$-2a+3b-c=0 \rightarrow 2+3b+1=0 \rightarrow b=-1$

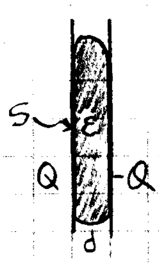
Meto de prepo una constante con unidades tales que cancelan las unidades de todas las magnitudes intervinientes salvo las de energía.

$$f(N) = \pi_2 = T\, C_\theta^{-1} V^{-1} P^{-1}$$

$$\boxed{T = P.V.\, C_\theta \, . f(N)}$$

$$P.V = \underbrace{C'_\theta . f'(N)}_{\text{debería ser } NR} . T$$

6. Capacitor plano



$$C = f(S, \varepsilon, d)$$

	S	ε	d	C
L	2	-3	1	-2
M	0	-1	0	-1
T	0	2	0	2
Q	0	2	0	2

Tengo dos # π

$$[\varepsilon] = \frac{\text{Farad}}{[\ell]} = \frac{C^2 . s^2}{m^3 . kg}$$

$$[V] = \frac{m^2 . kg}{s^2}$$

$$[C] = \text{Farad} = \frac{C^2 s^2}{m^2 kg}$$

Filas independientes en la matriz → $n-k$

$4-2 = 2 \# \pi$

$\pi_1 = d^2 . S^{-1} \longrightarrow$ encuentro "a ojo" esto adimensional

$$\pi_2 = C . S^a . \varepsilon^b$$

$$Q^0 L^0 M^0 T^0 = L^{-2} M^{-1} T^2 Q^2 . L^{2a} L^{-3b} M^{-b} T^{2b} Q^{2b}$$

$-2+2a-3b=0$ $\quad -2-2a+3=0$

$1-b=0 \rightarrow b=-1$ $\quad \frac{1}{2}=a$

$2+2b=0$

$2+2b=0$

$$\Pi_2 = C \cdot S^{1/2} \varepsilon^{-1}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon}{\sqrt{S}} \cdot f\left(\frac{d^2}{S}\right)}$$

si fes una $\sqrt{\ } \rightarrow$ $\left[C = \frac{\varepsilon \cdot d}{S} \right]$ resultado correcto

7.

* caso 1

bajas velocidades $\qquad \lambda = f(m_o, v)$

	λ	m_o	v
L	1	0	1
M	0	1	0
T	0	0	-1

$\rightarrow$ como la matriz es de 3x3 (3 filas indeptes) se ve que necesito más datos $\Rightarrow$ fuerzo la constante h

$[h] = \frac{m^2 \cdot kg}{s}$

	λ	m_o	v	h
L	1	0	1	2
M	0	1	0	1
T	0	0	-1	-1

$\Rightarrow$ ahora tenemos $\underset{n-k}{4-3} = 1 \ \# \Pi$

$$\Pi = \lambda \, m_o^a \, v^b \, h^c$$

$$L^0 M^0 T^0 = L^1 (M^a)(L^b T^{-b})(L^{2c} M^c T^{-c})$$

$1+b+2c=0 \qquad 1-c+2c=0 \rightarrow c=-1$

$a+c=0 \qquad a=-c \qquad a=1$

$-b-c=0 \rightarrow b=-c \rightarrow \qquad b=1$

$$\Pi = \lambda \frac{m_o v}{h} \rightarrow \boxed{\lambda = K \frac{h}{m_o v}}$$

* caso 2

altas velocidades

8. La serie de Balmer para el átomo de Hidrógeno es $\longrightarrow$ $\nu = R_\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 3, 4, \ldots$ pero se puede poner como $\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

$$R_\infty = f(m_e, h, c)$$

	m_e	h	c	R_λ
L	0	2	1	-1
M	1	1	0	0
T	0	-1	-1	0

$\longrightarrow$ Aquí habrá un solo # Π

$$\Pi = R_\infty \cdot m_e^a\, h^b\, c^c$$

$$L^0 M^0 T^0 = L^{-1} M^a L^{2b} M^b T^{-b} L^c T^{-c}$$

$-b - c = 0 \rightarrow b = -c$

$a + b = 0 \rightarrow a = -b$

$-1 + 2b + c = 0 \rightarrow -1 + b = 0$

$b = 1$

$a = -1$

$c = -1$

$$\Pi = R_\infty \cdot m_e^{-1}\, h\, c^{-1}$$

$$\boxed{R_\infty = \frac{m_e c}{h} \cdot K}$$

Revisando teoría vemos que $R_\infty = \frac{m_e \cdot c}{h} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$, donde α es la constante de estructura fina.

$F = f(\mu, \rho, v$