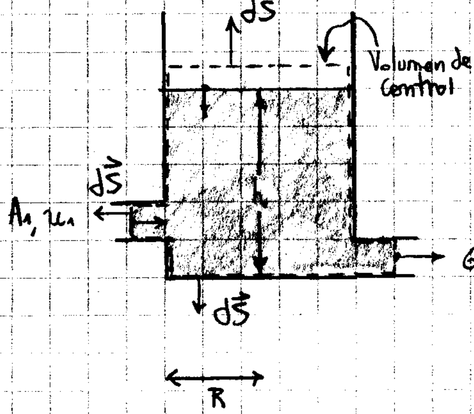
2.

* Flujo no estacionario



el nivel de agua (la altura h) va a variar ⇒ no se puede pensar en flujo estacionario y aplicar Bernoulli

$Q_2 = A_2 . u_2$

la masa se conserva

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho\, dV + \int_{\partial V_c = S_c} \rho . \vec{v} . d\vec{S}$$

contribuyen solo dos áreas

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho . dV = -\int_{A_1} \rho . u_1 . dS + \int_{A_2} \rho . u_2 . dS$$

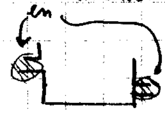
$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho . dV = -\rho . u_1 . A_1 + \rho . u_2 A_2 = \rho (u_2 A_2 - u_1 A_1)$$

con algún detalle es

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{V_{liq}} \rho . dV + \int_{V_{vacío}} 0 . dV\right]$$

$$-\pi R^2 \rho . \frac{\partial h}{\partial t}$$

despreciamos volumencillos en



$$\cancel{\rho}\left(-\pi R^2\right)\frac{\partial h}{\partial t} = \cancel{\rho}(Q_2 - u_1 A_1)$$

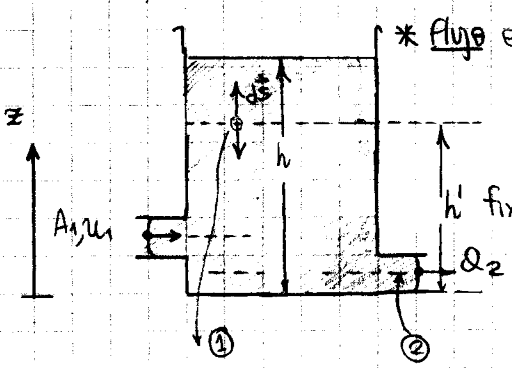
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{u_1 A_1 - Q_2}{\pi R^2}}$$

CONSISTENCIA
si lo que entra es mayor a lo que sale h crece con el t ⇒ el signo parece coherente

Aquí el flujo resultó no estacionario. $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ pues, por ejemplo, en la altura inicial $h(t=0)$ había líquido de densidad ρ y luego hay aire de densidad diferente.

Este modelo valdrá si los volumencillos despreciados son despreciables en comparación al total y en el régimen inicial. Asimismo vale si lo que ingresa, Q_1, es menor a Q_2; cosa de que h baje y no surgue la tapa de nuestra S_c.

* Flujo estacionario



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{en el interior del } V_c$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_c} \rho . dV = -\rho u_1 A_1 + \rho . u_2 A_2 + \int_{tapa} \rho\, v . dS$$

La velocidad de una partícula en ① es justamente $\frac{dh}{dt}$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \pi R^2 h'\right) = -\rho\,(u_1 A_1 + Q_2) + \int_S \rho . \dot{h} . dS$$

$$0 = -\rho\,(u_1 A_1 + Q_2) + \rho\, \dot{h} . \pi R^2$$

$$\boxed{\left(\frac{u_1 A_1 - Q_2}{\pi R^2}\right) = \dot{h}}$$

Aquí resulta flujo estacionario, mientras h no llegue a h'

* Numérico

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_1 A_1 - Q_2 = -0{,}05\, \frac{m^3}{seg.} . \left(\frac{1}{5}\right)$$

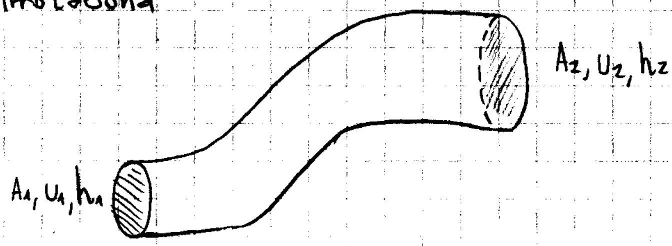
sección del tarro

⇒ por cada m^2 de sección de tacho h disminuye su valor en 0,05 metros (5 cm).

3.

flujo incompresible, $[\rho_0]$ fluye en forma estacionaria $\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0\right]$

$\vec{U}$ irrotacional



consideramos $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ uniformes en las tapas

a) Por la ecuación de continuidad es:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad \text{com} \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = u_1 A_1 = u_2 A_2} \quad \leftarrow \text{El caudal se mantiene}$$

Pero lo queremos en función de $A_1, p_1, h_1, A_2, p_2, h_2$

Por la ecuación de Bernoulli es:

$$\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{u_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho_0} + \frac{u_2^2}{2} + g h_2$$

$$+\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) = g(h_2 - h_1) + \frac{1}{\rho_0}(p_2 - p_1)$$

$$\frac{u_1^2}{2}\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) =$$

$$u_1 = \sqrt{\left(\frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\right)\left[2g(h_2 - h_1) + \frac{2}{\rho_0}(p_2 - p_1)\right]}$$

Caudal Q es $\rightarrow$ $\boxed{Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}} \sqrt{2} \left(g(h_2 - h_1) + \frac{1}{\rho_0}(p_2 - p_1)\right)^{1/2}}$

b) Para que exista flujo deberá cumplirse que:

como $A_2 - A_1 > 0$ $\qquad g(h_2 - h_1) + \frac{1}{\rho_0}(p_2 - p_1) \geq 0$

El caudal debe ser >0 y constante

$$(p_2 - p_1) \geq \rho g (h_1 - h_2)$$

$$\rho_0 g h_2 + p_2 \geq \rho_0 g h_1 + p_1 \qquad \boxed{g h_2 + \frac{p_2}{\rho_0} \geq g h_1 + \frac{p_1}{\rho_0}}$$

c) Si vamos desde $1 \rightarrow 2$ como $A_2 > A_1 \rightarrow u_1 > u_2$ por la ecuación de continuidad; luego, como el Q debe mantenerse

$$u_1^2 > u_2^2$$

$$\rho g (h_2 - h_1) + (p_2 - p_1) = C \quad \text{una constante}$$

$$\rho g\, \delta h + \delta p = 0$$

$$\delta h = \frac{-1}{\rho g} \delta p$$

Las variaciones van de la mano

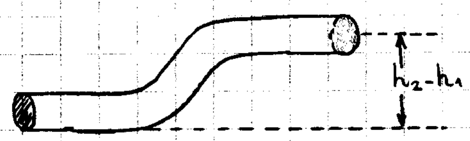
$$\rho \frac{u_1^2}{2} = \rho \frac{u_2^2}{2} + \underbrace{\rho g \Delta h + \Delta p}_{C}$$

d) si $A_1 = A_2 \Rightarrow$ por continuidad $u_1 = u_2 \Rightarrow$

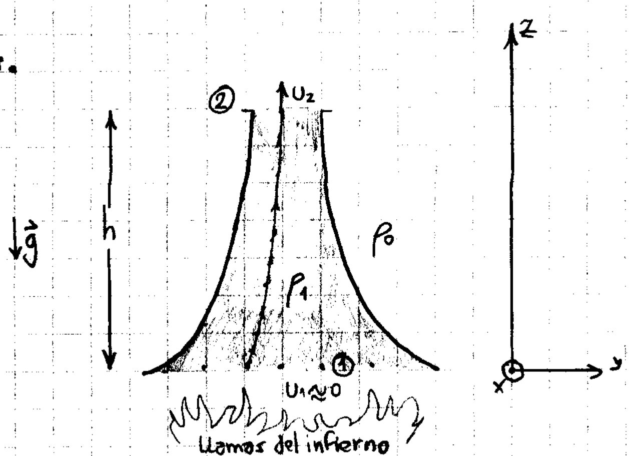
$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$

$$\boxed{\frac{-\Delta h}{\rho g} = \Delta p}$$

La condición es que el incremento de presión sea un múltiplo de (−) el incremento de la altura. Es decir que si $h_2 > h_1 \Rightarrow h_2 - h_1 > 0 \Rightarrow -(h_2 - h_1) < 0$ $\Rightarrow \Delta p < 0 \Rightarrow p_2 < p_1$ (la presión final es menor)



4.



$p.v = R.T \leftarrow$ Fluido gas perfecto

régimen estacionario $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

① ②

$$P_1 + \underbrace{\rho_1 \frac{U_1^2}{2}}_{\approx 0} = P_2 + \rho_1 g h + \rho_1 \cdot \frac{U_2^2}{2}$$

$$P_1 - P_2 - \rho_1 g h = \rho_1 \frac{U_2^2}{2}$$

$$\underbrace{(P_1 - P_{atm})}_{\text{Presión diferencial}} - \rho_1 g h = \rho_1 \frac{U_2^2}{2}$$

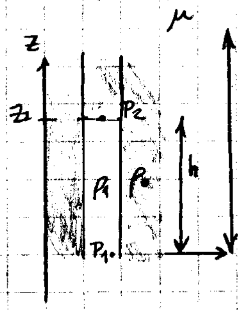
$$\rho_0 g h - \rho_1 g h = \rho_1 \frac{U_2^2}{2}$$

$$\boxed{U_2 = \sqrt{2\frac{(\rho_0 - \rho_1)}{\rho_1} g h}}$$

Ecuación de estado del gas perfecto

$$P = \frac{\rho}{\mu} R T$$

$$P = \frac{\rho_1}{\mu} R T$$

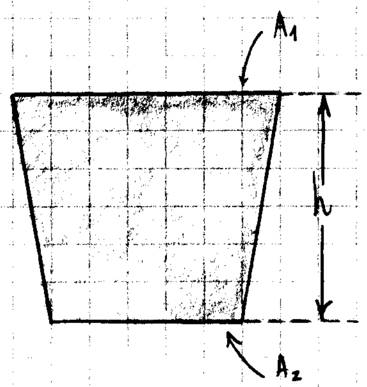


$$P + \rho_0 g z = C_2$$

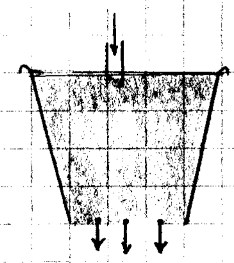
en z_2 es $P = P_2$ y $z = h$

$$P_2 + \rho_0 g h = C$$

5.



$\equiv$



Se mantiene constante el nivel h

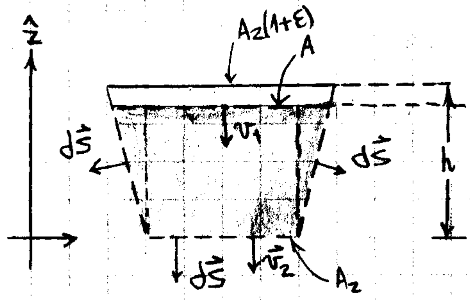
$A_1 = (1+\varepsilon) A_2 \qquad \varepsilon \ll 1$

Suponemos v uniforme en la sección (estamos suponiendo irrotacionalidad del fluido). Como piden $\vec{v}$ en función de t sospechamos que esta cosa tendrá un régimen no estacionario

$\Rightarrow$ Bernoulli no estacionario (irrotacional) incompresible

$\vec{v} = \text{grad}(\phi)$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2$$



altura del líquido (será función del tiempo)

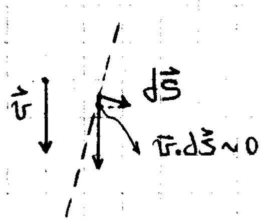
$$A_1(z) \quad \text{con} \longrightarrow \begin{cases} A_1(z=h) = A_2 + \varepsilon A_2 \\ A_1(z=0) = A_2 \end{cases} \Downarrow$$

$$A_1(z) = \left(1 + \frac{\varepsilon z}{h}\right) A_2$$

* continuidad

$$\cancel{A_2} v \left(1+\varepsilon\frac{z}{h}\right) = \cancel{A_2} v_2$$

$$v = \frac{v_2}{(1+\varepsilon z/h)}$$



Considero $z_2 = 0$

$v_1 = v(z)$

$p_1 = p(z)$

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_z + \frac{\rho\, v_2^2}{\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)^2 2} + p + \rho g z = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2$$

$\text{grad}\,\phi = \vec{v}$ pero $\vec{v} = v_z \rightarrow$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = v_z$$

$$\int d\phi = \int \frac{v_2(t)}{1+\frac{\varepsilon z}{h}}\, dz$$

$1 + \frac{\varepsilon z}{h} = u$

$dz = du\,\frac{h}{\varepsilon}$

$$\phi = v_2 \frac{h}{\varepsilon} \ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right) + C(t) \rightarrow \phi(z=0) = C(t) \rightarrow \phi\big|_{z_2=0} = C(t)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\dot{v}_2 h}{\varepsilon}\ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right) + \frac{dC(t)}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=0} &= \frac{dC(t)}{dt}\Big|_{z=0} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=z} &= \frac{dC(t)}{dt} + \frac{\partial v_2}{\partial t}\cdot\frac{h}{\varepsilon}\ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_z - \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=0} = \frac{\partial v_2}{\partial t}\,\frac{h}{\varepsilon}\ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \cdot \ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)\cdot\frac{h}{\varepsilon} + \rho\frac{v_z^2}{2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)^2}-1\right) + P - P_z + \rho g z = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left[\frac{1}{(1+\varepsilon z/h)^2}-1\right]\frac{\varepsilon}{2\cdot\ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)h} v_z^2 + \frac{P-P_z+\rho g z}{\rho\cdot \ln\left(1+\frac{\varepsilon z}{h}\right)\cdot\frac{h}{\varepsilon}} = 0$$

$$\frac{\partial v_z(z,t)}{\partial t} + \beta\cdot v_z^2(z,t) + \gamma(z) = 0 \qquad \beta<0 \quad \gamma>0$$

$$\frac{d v_z}{d t} = -\beta v_z^2 - \gamma$$

$$\int \frac{1}{-(\beta v_z^2+\gamma)}\, d v_z = dt$$

$$\int \frac{d v_z}{\left(v_z^2+\frac{\gamma}{\beta}\right)} = \int(-dt)\cdot\beta \qquad \text{con } \frac{\gamma}{\beta} = \left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{1/2}\right]^2$$

$$\int \frac{d v_z}{v_z^2-\frac{\gamma}{|\beta|}} = -\beta(t-t_0)$$

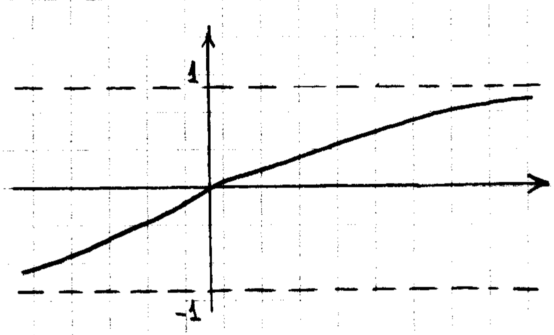
$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{|\beta|}}}\operatorname{atanh}\left(\frac{v_z}{\sqrt{\gamma/|\beta|}}\right) = -\beta(t-t_0)$$

$$\operatorname{atanh}\left(v_z\cdot\sqrt{\frac{|\beta|}{\gamma}}\right) = \left(-|\beta|(t-t_0)\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{|\beta|}}\right)$$

$$\boxed{v_z = \sqrt{\frac{\gamma}{|\beta|}}\tanh\left(\sqrt{-|\beta|\cdot\gamma}\,[t-t_0]\right)}$$

b)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



la tanh tiene una asintota

si $x\to\infty$ $\quad \tanh(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - \overset{\to 0}{e^{-x}}}{e^x+\underset{\to 0}{e^{-x}}}$

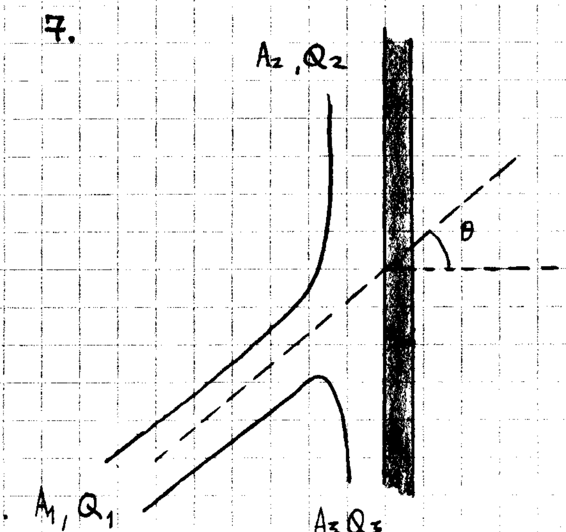
$$\tanh(x) = 1$$

$$\boxed{v_{z_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma}{|\beta|}}}$$

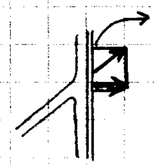
En un tiempo suficientemente largo ($t\to\infty$) la tanh llega a estabilizarse en 1 y por ende $v_z \to v_z^0$ (constante)

$\Rightarrow$ el sistema tiene un régimen estacionario

7.



- fluido ideal $\Rightarrow$ no hay esfuerzos de corte
- $\vec{F}_v = \rho \vec{f} = 0$ no hay fuerzas de volumen



la componente $\parallel$ a la placa se tira por la idealidad del fluido

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho \vec{v}\, dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{v}\, dV}_{=0 \text{ x problema estacionario}} + \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S})$$

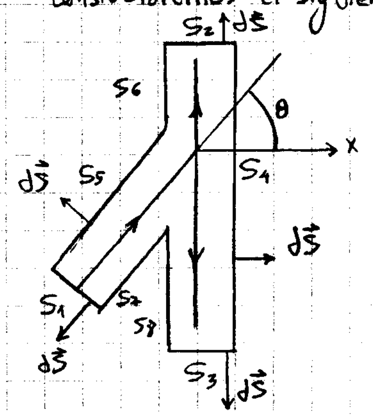
$$\int (\vec{F}_v - \text{grad}(p))\, dV =$$

nulas por suposición

$$\int_V -\text{grad}(p)\, dV = -\oint_S p\hat{n}\, dS = \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S})$$

a)

Consideraremos el siguiente volumen:



$$\oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S}) =$$

$$-\int_{S_1} \rho\,(v_1 \cos\theta, v_1 \operatorname{sen}\theta)\cdot v_1\, dS$$

sobre S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 es $\vec{v} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{S} = 0$

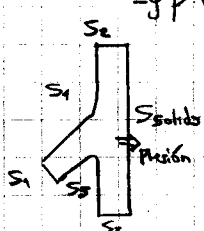
$$+\underbrace{\int_{S_2} \rho\,(0, v_2)\cdot v_2\, dS}_{\rho v_2^2 \cdot A_2 \hat{y}} + \underbrace{\int_{S_3} \rho\,(0, -v_3)\, v_3\, dS}_{-\rho v_3^2 A_3 \hat{y}}$$

$\hat{y}$) $\quad -\rho v_1 \operatorname{sen}\theta\, v_1 A_1 + \rho v_2^2 A_2 - \rho v_3^2 A_3 = 0 \longrightarrow$ Por estar en equilibrio en $\hat{y}$

$\hat{x}$) $\quad -\rho v_1^2 \cos\theta\, A_1 = -\oint p\,\hat{x}\, dS \equiv F_{SL}$

Si hubiese querido calcular la p en las superficies para evaluar $-\oint p\hat{n}\, dS$

$$-\oint p\,\hat{n}\, dS = \sum_{i=1}^{5} -\int_{S_i} p_{0_i}\cdot\hat{n}\, dS_i \quad - \int_{S_s} p\cdot\hat{n}\, dS_s$$



sumo y resto

$$-\rho v_1^2 \cos\theta A_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{5} -\int_{S_i} p_{0_i}\,\hat{n}\, dS_i - \int_{S_s} p_0\,\hat{n}\, dS_s}_{=0} + \int_{S_s} p_0\,\hat{n}\, dS - \int_{S_s} p\cdot\hat{n}\, dS_s$$

Por integral de sup cerrada de una constante p_0

$$-\rho v_1^2 \cos\theta A_1 = -\int_{S_s} \underbrace{(p - p_0)}_{\text{presión neta sobre el sólido}}\hat{n}\, dS$$

$$\boxed{F_{SL} = -\rho v_1^2 A_1 \cos\theta}$$

b) Usemos la ecuación de continuidad $\Rightarrow$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 + A_3 v_3$$
$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

El caudal entrante se reparte

$$-\cancel{\rho} v_1^2 A_1 \,\text{sen}\,\theta + \cancel{\rho} v_2^2 A_2 - \cancel{\rho} v_3^2 A_3 = 0$$

$$\begin{cases} -v_1 Q_1 \,\text{sen}\,\theta + v_2 Q_2 - v_3 Q_3 = 0 \\ Q_1 = Q_2 + Q_3 \end{cases}$$

Necesito ahora poder relacionar las velocidades $\Rightarrow$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g y_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g y_2$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g y_1 = p_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} + \rho g y_3$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g y_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g y_2$$

Como estamos despreciando fuerzas en volumen $\Rightarrow$ consideramos $\Delta y \sim 0$ $\Rightarrow$

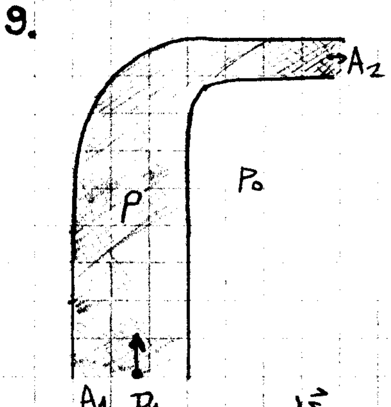
$$\frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_2^2 = \frac{\rho}{2} v_3^2 \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = v_3 \quad \therefore$$

$$\begin{cases} -Q_1 \cdot \text{sen}\,\theta + Q_2 - Q_3 = 0 \\ Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \end{cases}$$

$$Q_2 = Q_3 + Q_1 \cdot \text{sen}\,\theta = Q_1 - Q_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_3 &= \frac{Q_1}{2}(1 - \text{sen}\,\theta) \\ Q_2 &= \frac{Q_1}{2}(1 + \text{sen}\,\theta) \end{aligned}}$$

9.



F_{LC}

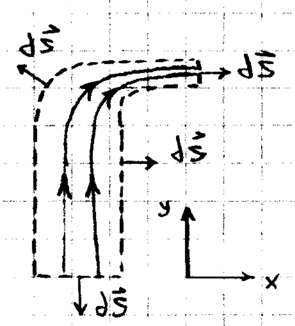
- fluido ideal
- incompresibilidad
- la cañería se angosta lentamente

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}(\vec{P}(t))}_{\int_V \rho \cdot \vec{a} \cdot dV} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{v} \cdot dV + \oint_S \rho \vec{v}\,(\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

$$\int_V \rho \vec{f}\, dV - \int_V \text{grad}(p)\, dV =$$

Fuerza de todo externo

hay que corregir e integrar sobre todo el contorno



$\vec{F}$

$$\underbrace{\vec{F}_{\text{líquido}} = -\int_S p \hat{n}\, dS}_{} = \oint_S \rho \vec{v}\,(\vec{v}\, d\vec{S})$$

$$= -\int_{A_1} \rho v_1 v_1 dS\, \hat{y} + \int_{A_2} \rho v_2 v_2 dS\, \hat{x}$$

$\hat{n} dS$

Acá se usa el trick de integral de una K en una sup. cerrada es cero

$$\vec{F}_{\substack{\text{caño} \\ \text{sobre líquido}}} = -\oint_S p \hat{n}\, dS$$

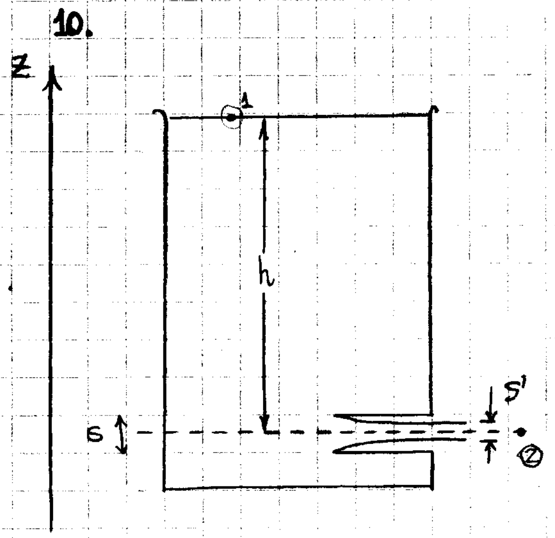
$$\vec{F}_{\substack{\text{caño} \\ \text{líquido}}} = -\rho v_1^2 A_1 \hat{y} + \rho v_2^2 A_2 \hat{x}$$

$$-\rho v_1^2 A_1 + \rho \frac{A_1^2 v_1^2}{A_2^2} \cancel{A_2}$$

- continuidad $\quad \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$

$$\boxed{\vec{F}_{\substack{\text{caño} \\ \text{líquido}}} = -\rho v_1^2 A_1 \hat{y} + \rho \frac{A_1^2 v_1^2}{A_2} \hat{x}}$$

10.



• flujo estacionario e irrotacional ⇒ vale Bernoulli ∴

a)

$$p_1 + \rho \underbrace{\frac{v_1^2}{2}}_{\approx 0} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

$$p_{atm} - p_{atm} + \rho g (z_1 - z_2) = \rho \frac{v_2^2}{2}$$

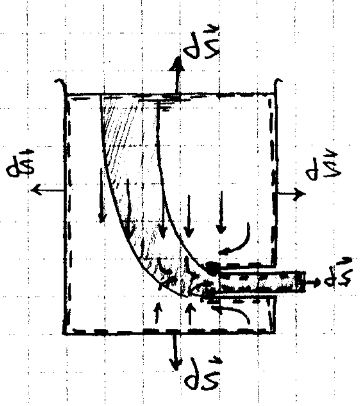
$$2 g h = v_2^2$$

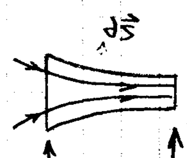
$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

b)

$$\frac{D}{Dt}\left(\vec{P}(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{v}\, dV + \oint_S \rho \vec{v}\, \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Supongo condiciones estacionarias



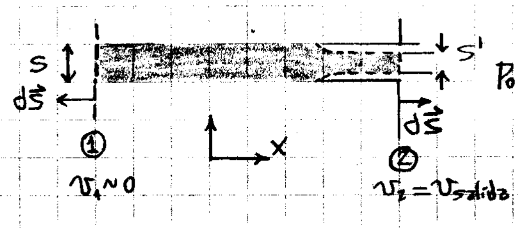


No hay suficiente información como para aplicar Bernoulli entre estas dos tapas.

$$\underbrace{\int_V \rho \vec{f}\, dV}_{\cong 0} - \oint_S p \hat{n}\, dS = \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S})$$

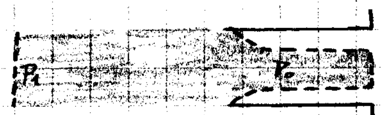
Despreciando fuerzas en volumen

$$0 = + \int_S p \hat{n}\, dS + \int_{S'} p \hat{n}\, dS + \int_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S}) + \int_{S'} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S})$$



$$-p_1 \cdot S + p_0 \cdot S + \rho\, 2gh\, S' = 0$$

$$\boxed{\frac{S'}{S} = \frac{p_1 - p_0}{\rho\, 2gh}}$$

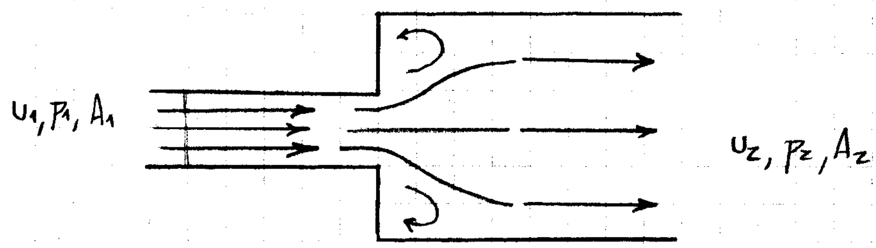


$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 - p_0}{\rho g h}\right) \Rightarrow$$

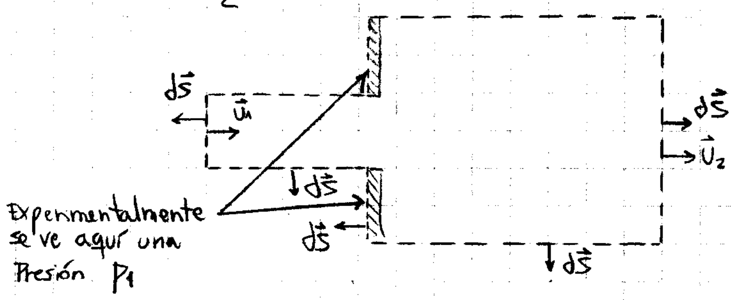
$p_{dif.}$

$$\boxed{\frac{S'}{S} \sim \frac{1}{2}}$$

11.



$$\rho \frac{U^2}{2} + p + h_p = C$$ sobre cada línea de corriente → Consideraré flujo estacionario



← Volumen de control para aplicar teorema del transporte

$\boxed{\bullet}$ $$\rho \frac{U_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{U_2^2}{2} + p_2 + h_p$$

$$\frac{\rho}{2}(U_1^2 - U_2^2) + (p_1 - p_2) = h_p$$

$$\frac{D}{Dt}\vec{P}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \vec{v}\, dV + \oint_S \rho \vec{v}\, \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

despreciamos fuerzas de volumen

$$-\oint_S p \hat{n}\, dS = \oint_S \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot d\vec{S})$$

No conozco la expresión de la presión en p_2 $= -\rho U_1^2 A_1 + \rho U_2^2 A_2$

$\boxed{\bullet}$ $$+p_1(A_2 - A_1) + p_1 A_1 - p_2 A_2 = -A_1 \rho U_1^2 + A_2\left(\rho U_1^2 + 2p_1 - 2h_p - 2p_2\right)$$

$$p_1(A_2 - A_1) + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho U_1^2 (A_2 - A_1) + 2A_2 p_1 - 2A_2 p_2 - 2h_p A_2$$

$$-p_1 A_2 + p_2 A_2 = \rho U_1^2 (A_2 - A_1) - 2h_p A_2$$

$$\boxed{h_p = \frac{1}{2}\left[\rho U_1^2 \frac{(A_2 - A_1)}{A_2} + (p_1 - p_2)\right]}$$

Pero esto depende de la p_2 que desconozco

$$p_2 - p_1 = \rho U_1^2 \frac{(A_2 - A_1)}{A_2} - 2h_p$$

Usaremos continuidad ⇒

$\boxed{\bullet}$ $U_1 A_1 = U_2 A_2$

$$U_2^2 = \frac{U_1^2 A_1^2}{A_2^2}$$

$$p_2 = \rho \frac{U_1^2}{2} + p_1 - \rho \cdot \frac{U_1^2}{2}\frac{A_1^2}{A_2^2} - h_p$$

NOTA: tengo tres incógnitas p_2, U_2, h_p ⇒ quiero 3 ecuaciones $\boxed{\bullet}$

$$\rho \frac{U_1^2}{2} - \rho \frac{U_1^2}{2}\cdot\frac{A_1^2}{A_2^2} - h_p = \rho U_1^2 \frac{(A_2 - A_1)}{A_2} - 2h_p$$

$$h_p = \rho U_1^2 \left[\frac{(A_2 - A_1)}{A_2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{A_1^2}{A_2^2}\right]$$

$$h_p = \rho U_1^2 \left(\frac{\cancel{2}A_2^2 - A_2 A_1 2 - \cancel{A_2^2} + A_1^2}{2A_2^2}\right)$$

$$\boxed{h_p = \rho \frac{U_1^2}{2}\left(\frac{A_2 - A_1}{A_2}\right)^2}$$