Práctica [redacted] 2

1.[redacted]

← Variables eulerianas

$v_1 = v_2 = 0$
$v_3 = f(x_3)$

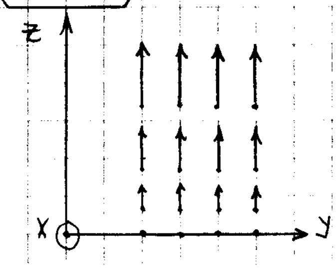
$t \geq 0$
$x_3 \geq 0$

$\vec{u}(\vec{x},t) = (0,0,f(x_3))$ ⟵ Campo de velocidades

$\vec{v}(x_3) = f(x_3)\,\hat{z}$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = f(x_3) \longrightarrow \frac{1}{f(x_3)}\,dx_3 = dt$$

CASO



Ejemplo de campo $\vec{u}$ en u_z
Tiene simetría rotación en $\hat{z}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \overbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}^{=0} + \overbrace{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{x}}^{\mathbb{I}} \Rightarrow$$

Pues en Euler son independientes (x,t)

$\hat{3})\quad \dfrac{dx_3}{dt} = f(x_3)$

$$\dot{x}_3 = f(x_3)$$

$$\int_0^{x_3} \frac{1}{f(x_3')}\,dx_3' = \int_0^t dt' = t \rightarrow t = t(x_3)$$

Sea la caída de agua en una cascada ⇒ caída libre de agua

$$\frac{dx_3}{dt} = -gt$$
$$dx_3 = -gt\,dt$$
$$x_3 - x_3^0 = -g\cdot\frac{1}{2}t^2$$

$$\boxed{z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

↓

$z = \chi(z_0,t)$

Es la descripción Lagrangiana

$v_z = \sqrt{2g(z_0 - z)}$

$$\boxed{v_z = -gt}$$

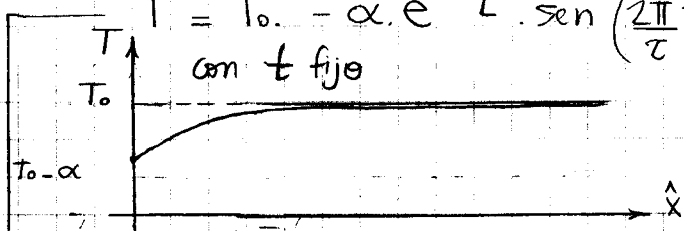
descripción de Euler

$$\frac{dv_3}{dt} = -g$$
$$v_3 = -g\cdot t$$
$$\vec{v} = (0,0,-g\,t)$$
$$\frac{dv_3}{dx_3}\frac{dx_3}{dt} = -g$$
$$v_3\,dv_3 = -g\,dx_3$$
$$\frac{1}{2}v_3^2 = -g(x_3 - x_3^0)$$
$$v_3^2 = -2gx_3 + 2gx_3^0$$
$$v_3 = \sqrt{2g(x_3^0 - x_3)}$$

[redacted]**2.**

$$T = T_0 - \alpha\, e^{-\frac{x}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

con t fijo



$T(x=0) = T_0 - \alpha\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$

→ Tengo $T = T(T_0, x, t)$ descripción euleriana

$T_0, \alpha, L, \tau > 0$

Una partícula (que seguimos) se mueve con velocidad U ⇒

$$U = \frac{\partial x}{\partial t}(X_0,t) = \frac{dx}{dt}(x,t)$$

Constante

$$x - x_0 = U\,t \Rightarrow$$

Lagrange
$$\begin{cases} x = x_0 + U\,t & ① \\ x_0 = x - U\,t & ② \end{cases}$$

① es $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$

② es $\vec{x}_0 = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t)$

a) Descripción euleriana

$$\frac{\partial x}{\partial t} = U = v \Rightarrow \vec{v} = U\,\hat{x}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(T) \Rightarrow$$

$$= -\alpha \cdot e^{-x/L} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot \frac{2\pi}{\tau} + U \cdot \left(-\alpha \cdot e^{-x/L} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right) \cdot -\frac{1}{L}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha \cdot e^{-\frac{x}{L}} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + U \cdot \alpha \cdot e^{-\frac{x}{L}} \cdot \frac{1}{L} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \alpha \, e^{-\frac{x}{L}} \left[-\frac{2\pi}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + \frac{U}{L} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]}$$

b) $T = T_0 - \alpha \cdot e^{-\frac{(x_0 + U \cdot t)}{L}} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \rightarrow T = T(x_0, t)$

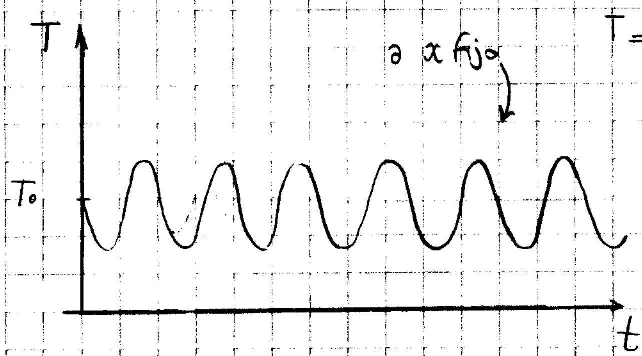
descripcion Lagrangiana

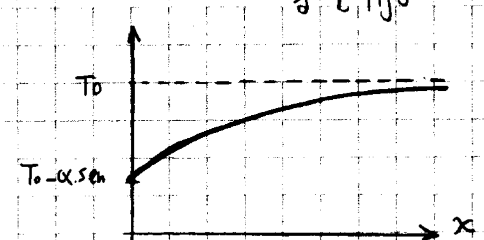
$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_0, t) = -\alpha \cdot \left[e^{-\frac{(x_0 + U \cdot t)}{L}} \cdot -\frac{U}{L} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + e^{-\frac{(x_0 + U \cdot t)}{L}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot \frac{2\pi}{\tau} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot e^{-\frac{(x_0 + U \cdot t)}{L}} \left[-\frac{2\pi}{\tau} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + \frac{U}{L} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]}$$

Las dos descripciones realizadas coinciden.

$T = T_0 - \alpha \, e^{-x/L} \cdot \text{sen}\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$





La $\frac{dT}{dt}$ tiene dos partes oscilantes con coeficientes ortogonales.

En un punto fijo del espacio la temperatura oscila como un coseno en el tiempo.

4.

$U_x = \dfrac{\alpha . x}{1+\beta . t}$ $\qquad U_y = c \qquad$ α, β, c constantes

$\vec{U} = \left(\dfrac{\alpha . x}{1+\beta . t}, c \right) \Rightarrow \vec{U} = \vec{U}(x,t)$ Campo de velocidades Euleriano

* Líneas de corriente

$\vec{U} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt} \right) \qquad \dfrac{dx}{V_x} = \dfrac{dy}{V_y}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha . x}{(1+\beta . t) . c}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha . x}{1+\beta . t} \qquad \frac{dy}{dt} = c$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha \; dy}{c(1+\beta . t)}$$

$$\frac{1+\beta . t}{\alpha . x} dx = \frac{dy}{c} \qquad \text{con } x \neq 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{\alpha}{c(1+\beta . t)}(y-y_0)$$

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{c(1+\beta t)} \qquad \ln(\alpha x)$$

$$y - y_0 = \frac{c}{\alpha}(1+\beta t) . \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad \frac{1}{\alpha} \ln(x) = \frac{1}{c} \cdot \frac{y-y_0}{(1+\beta t)}$$

ó con una sola constante de integración es $\rightarrow$ $\boxed{y - y_0 = \frac{c}{\alpha}(1+\beta t) . \ln(x)}$

t siempre es un parámetro que permanece fijo

* Trayectorias

$$\frac{dy}{dt} = c \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha . x}{1+\beta . t}$$

$$y - y_0 = c . t \qquad 1+\beta t = \tau$$

$$y = y_0 + c . t \qquad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dt}{1+\beta t} \qquad \beta dt = d\tau$$

$$\frac{y-y_0}{c} = t$$

$$\frac{1}{\alpha} . \ln(x) = \frac{1}{\beta} . \ln(\tau) = \ln(\tau)^{1/\beta} \rightarrow \frac{x}{x_0} = \tau^{\alpha/\beta}$$

$y = y_0 + c . t$

$x = x_0 (1+\beta t)^{\alpha/\beta}$

sacando el parámetro t $\rightarrow$ $\boxed{y = y_0 + \frac{c}{\beta}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\beta/\alpha} - 1\right]}$ $\leftarrow$ Ecuación de la trayectoria

* Líneas de traza

$$y_0 = y - c . t \qquad x_0 = x . (1+\beta . t)^{-\alpha/\beta}$$

Despejamos $\vec{x}_0$ de las trayectorias. Cumplen $\vec{x} = \vec{x}_0$ en $t = 0$

Sea que se mete colorante en $\vec{x}'$ y en t', donde éste último será un parámetro a variar. Entonces

$$\begin{cases} x_0 = x'(1+\beta t')^{-\alpha/\beta} \\ y_0 = y' - c t' \end{cases}$$

(x_0, y_0) serán los puntos iniciales de todos los elementos que pasarán en algún instante t' por x'. Luego:

$$x = x' \left(\frac{1+\beta t}{1+\beta t'} \right)^{\alpha/\beta} \qquad y = y' - c t' - c t = y' - c(t' + t)$$

son las ecuaciones paramétricas de la traza a un tiempo t (elementos de fluido que pasarán por el punto $\vec{x}'$ en algún t' comprendido entre:

$$t_c < t' < t$$

, donde t es fijo y t_c es un tiempo en el cual se comenzó a "marcar" a los elementos.

* con $\alpha = \beta$ es:

corriente $\to$ $Y = Y_0 + \frac{c}{\alpha}(1+\alpha t)\cdot \ln x$

$$Y = Y_0 + \frac{c}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{X_0}\right) - 1\right]$$

trayectoria $\to$ $Y = Y_0 - \frac{c}{\alpha} + \frac{c}{\alpha X_0}\cdot x$

traza $\to$

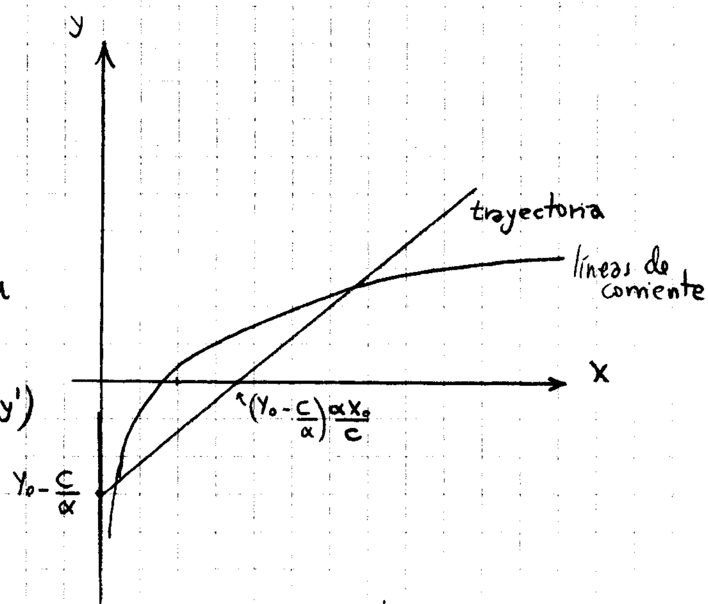
$$y = y' - c(t'+t)$$

$$1+\beta t' = \frac{x'}{x}(1+\beta t)$$

$$t' = \frac{x'}{x}\frac{(1+\beta t)}{\beta} - \frac{1}{\beta}$$

$$y = y' - c\left[\frac{x'}{x}\left(\frac{1+\beta t}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta} + t\right] \leftarrow \text{traza}$$

Faltaría determinar el punto $\vec{x}' = (x', y')$ en donde se hecha el colorante y definir un t final (una constante ahora)



Según puede verse, dada la no estacionariedad del campo de velocidades ha resultado

corriente $\quad y \propto \ln(x)$

trayectoria $\quad y \propto x$

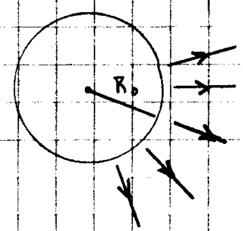
traza $\quad y \propto -1/x$

un comportamiento diferente para c/u de los tipos de líneas.

5. Las partículas se mueven con una velocidad radial

$$v(r) = \frac{v_0 R_0^2}{r^2} \qquad t>0 \quad , \quad r > R(t)$$

Campo de velocidades (variables eulerianas) $\Rightarrow$



$$\frac{dR(t)}{dt} = v(r) = \frac{v_0 R_0^2}{R^2}$$

$$\int_{R_0}^{R} \frac{R^2}{R_0^2}\, dR = \int_{t_0=0}^{t} v_0\, dt$$

$$\frac{1}{R_0^2}\cdot\frac{1}{3}\left(R^3 - R_0^3\right) = v_0 . t$$

$$R^3 - R_0^3 = 3 v_0 t R_0^2$$

$$R^3 = R_0^2 \left(R_0 + 3 v_0 t\right)$$

$$\boxed{R = \left[R_0^2 \left(R_0 + 3 v_0 t\right)\right]^{1/3}}$$

$R = R(R_0, t) \Rightarrow$ Descripción Lagrangiana

7.

Veamos un caso particular: fluido con vector rotación $\vec{\Omega} \Rightarrow$ pongo $\vec{\Omega}$ en $\hat{z}$ y $\Rightarrow$

$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ luego

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = x\Omega \hat{y} - y\Omega \hat{x}$$

Tomemosle rotor ahora $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y\Omega & x\Omega & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}(-y\Omega)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial x}(x\Omega)\hat{z} + \frac{\partial}{\partial y}(y\Omega)\hat{z} - \frac{\partial}{\partial z}(x\Omega)\hat{x}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \Omega \hat{z} + \Omega \hat{z} = 2\Omega \hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \boxed{\vec{\omega} = 2\Omega}$$

8.

a) $V_\theta(r,t) = v_0(1-\alpha r t) \rightarrow \vec{V} = V(r,t)\,\hat{\theta}$ $\qquad \boxed{\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}}$ Vorticidad

$$\vec{\omega} = \qquad + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\,\hat{z}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r.v_0[1-\alpha r t]\right) = \frac{1}{r}\left[v_0(1-\alpha r t) + r(-v_0\alpha t)\right]$$

$$\omega = \frac{1}{r}(v_0 - v_0\alpha r t - r v_0\alpha t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{r}(1-2\alpha r t)\,v_0\,\hat{z}}$$

b) $v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \rightarrow \vec{v} = v(r)\,\hat{\theta}$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.v_\theta(r)\right)\hat{z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_0}{2\pi}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = 0}$$

c) $v_\theta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right]$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(\frac{\Gamma_0}{2\pi r} - \frac{\Gamma_0}{2\pi r}.e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\right\}\hat{z}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_0}{2\pi}.e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\right)\hat{z}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{1}{r}.\frac{\Gamma_0}{2\pi}\left(e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.-\frac{\cancelto{1}{2}r}{\cancelto{2}{4}\nu t}\right)\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = +\frac{\Gamma_0}{2\pi}\cdot\frac{1}{\nu t}.e^{+\frac{r^2}{4\nu t}}\,\hat{z}}$$

d) $v_x = v_{0x}.\frac{y}{h} \rightarrow \vec{v} = v(y)\,\hat{x}$

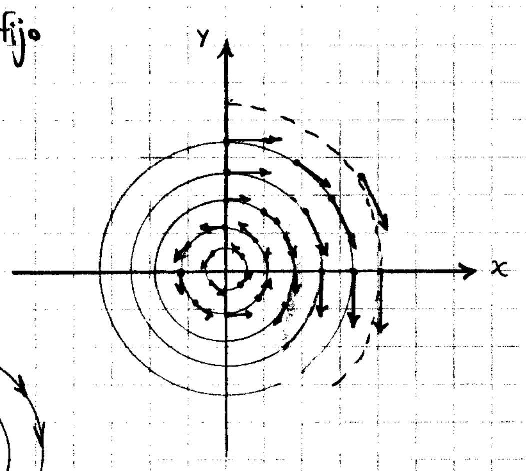
$$\vec{\omega} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(v_{0x}.\frac{y}{h}\right)\hat{z} = -v_{0x}.\frac{1}{h}\,\hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\frac{v_{0x}}{h}\,\hat{z}}$$

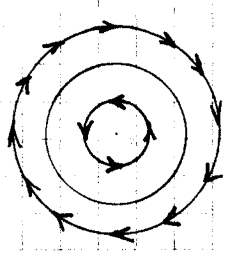
- Gráficos de los campos vectoriales de velocidades

a) $V_\theta(r,t) = v_0(1-\alpha r t)$

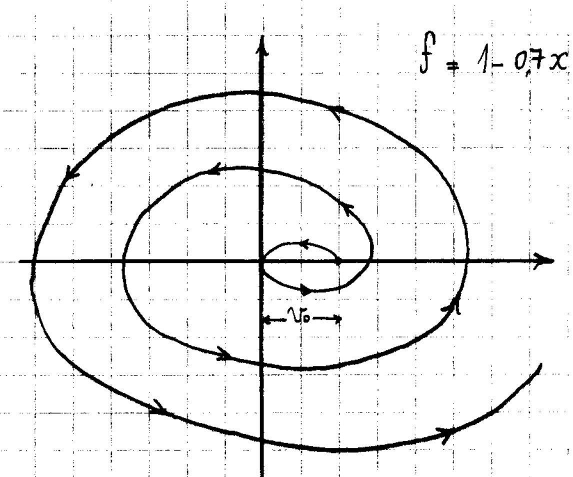
Gráfico Polar

a tiempo fijo





$f = 1 - 0{,}7x$



b)

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}$$

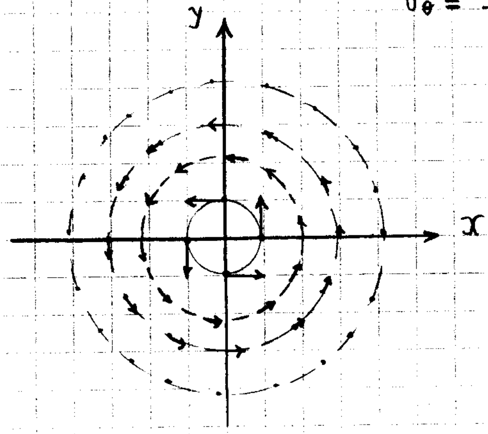
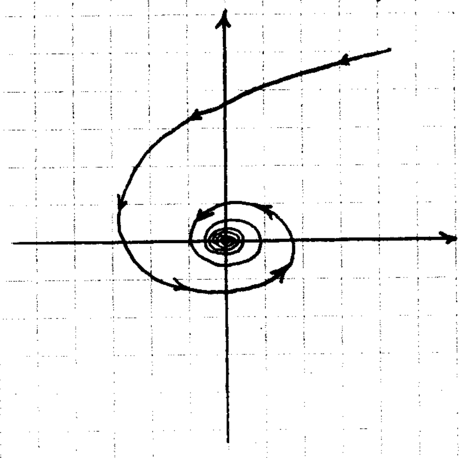
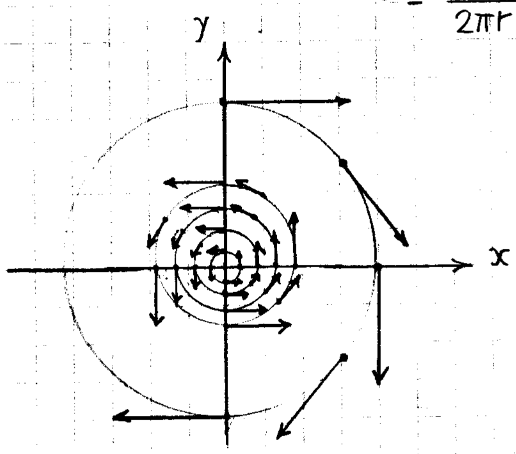


Gráfico polar $\quad \frac{1}{x} = f$



c)

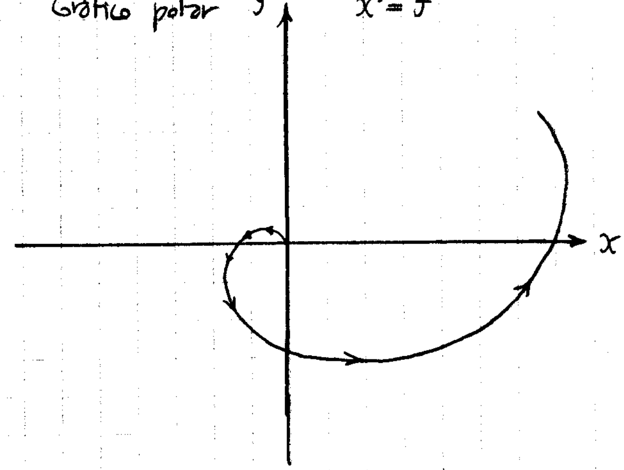
$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^2 - \dots\right)$$



$$r \text{ chico} \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi\, 2}\frac{r^3}{(4\nu t)^2}$$

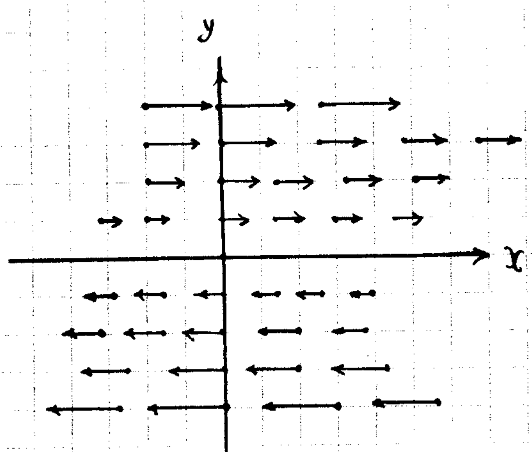
$$r \text{ grande} \approx \frac{-\Gamma_0}{2\pi r}\cdot e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

Gráfico polar $\quad x^3 = f$



d)

$$v_x = v_{0x}\cdot\frac{y}{h}$$



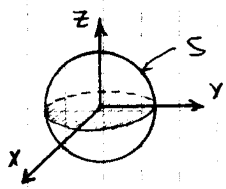
9.

a)

$$\int_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV \quad \text{Gauss o de la divergencia}$$

$$\int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes o del rotor}$$

$\vec{V}$ simetría esférica con $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$ cte.



$$\int_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\, dV = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}\int dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \operatorname{div}(\vec{v})$$

dada la simetría esférica $\vec{V}$ es constante sobre una esfera de radio $r \Rightarrow$

$$\int_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = V(r)\int_S dS = V(r)\,\cancel{4\pi r^2} = \cancel{\frac{4}{3}\pi r^2}\, r\, \operatorname{div}(\vec{v})$$

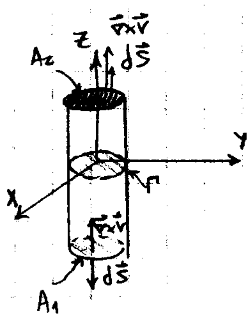
$$V(r) = \frac{r}{3}\operatorname{div}(\vec{v})$$

Con $a =$ constante, $a \equiv \operatorname{div}(\vec{v}) \Rightarrow$ $\boxed{\vec{V}(r) = a\,\frac{r}{3}\,\hat{r}}$

b)

$\vec{V}$ simetría cilíndrica ; $\vec{V} = V\,\hat{\phi}$ con $\vec{V} \neq \vec{V}(\phi)$; $\vec{V} \neq \vec{V}(z)$

$\vec{\nabla}\times\vec{V} = b\,\hat{z}$



$$\underset{\substack{\text{algún lazo } \Gamma\\ \text{en el cilindro}}}{\int} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \underset{\text{cilindro de tapas equidistantes de } z=0}{\int} (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot d\vec{S}$$

$$V(r)\, r\int_0^{2\pi} d\theta = b\int_{\text{cilindro}} \hat{z}\cdot d\vec{S} = b(A_1 - A_2) = 0$$

$$2\pi r\, V(r) = 0$$

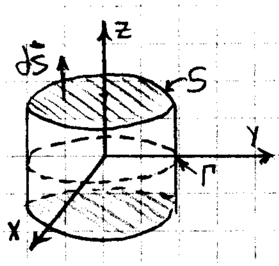
Por simetría sabemos que como $b\hat{z}$ es constante debe ser $\int \vec{\nabla}\times\vec{v}\cdot d\vec{S} = bA_1 = bA_2$

$$2\cancel{\pi}\cancel{r}\, V(r) = \frac{b\,\cancel{\pi}\, r^{\cancel{2}}}{2}$$

$$V(r) = \frac{b\,r}{4}$$

$$\boxed{\vec{V}(r) = \frac{b\,r}{4}\,\hat{\phi}}$$

c)



$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{V}\cdot d\vec{S} = A$$

donde A es el flujo sobre el cilindro desde el plano xy hacia arriba (sup. abierta) $\Rightarrow$ el flujo sobre el cilindro desde xy en $-\hat{z}$ será $-A$ y $\Rightarrow$

$$\int_\Gamma \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \forall\, \Gamma \text{ que englobe al origen}$$

$\Rightarrow$ $\vec{V} =$ constante en $\hat{\phi}$