



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10 NB

Notese que  $t_0$  no es lo mismo para  $\vec{x}$  y para  $\vec{x}^{-1}$



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



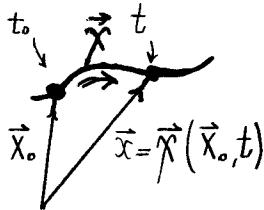
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

• Descripción Lagrangiana (1780) ó material

Se sigue cada elemento de fluido (como en mecánica newtoniana). Tenemos trayectorias

[1]  $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$  con:  
 $\vec{x}_0 = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t_0)$  (1b)

Posición de un elemento que en  $t_0$  se hallaba en  $\vec{x}_0$ .  $\vec{x}_0$  es un punto fijo del fluido que elijo para seguir. Sigo un "elemento de fluido". 1b es la identidad.

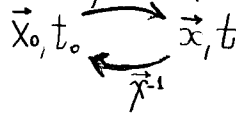


Como la materia es impenetrable: dos puntos no ocupan el mismo lugar en el espacio, la relación entre  $\vec{x}$  y  $\vec{x}_0$  debe ser inversible;

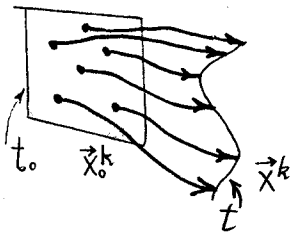
[2]  $\vec{x}_0 = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$  con:  
 $\vec{x} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t_0)$  (2b)

$\vec{\chi}$  da la posición en el tiempo  $t$  si estaba en  $\vec{x}_0$  en  $t_0$

$\vec{\chi}^{-1}$  da la posición inicial  $\vec{x}_0$  si la posición actual es  $\vec{x}$ . 2b es la identidad en el instante inicial  $\vec{\chi}(t_0)$  se halla en  $\vec{x}$ .



En realidad [1] son infinitas trayectorias de puntos con coordenadas iniciales  $\vec{x}_0^k$  donde  $k$  etiqueta elementos de fluido.



• El Jacobiano

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial \chi_i (\text{fila})}{\partial \chi_j (\text{columna})} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial x} & \frac{\partial \chi_1}{\partial y} & \frac{\partial \chi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial x} & \frac{\partial \chi_2}{\partial y} & \frac{\partial \chi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial x} & \frac{\partial \chi_3}{\partial y} & \frac{\partial \chi_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \chi_1 \\ \vec{\nabla} \chi_2 \\ \vec{\nabla} \chi_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{\chi} = \chi_i \hat{e}_i = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$

$\vec{X} = (x, y, z) = X_j \hat{e}_j$

Definimos la velocidad del elemento de fluido como:

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\delta \vec{x}}{\delta t} = \frac{\vec{\chi}(\vec{x}_0, t + \delta t) - \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)}{\delta t}$$

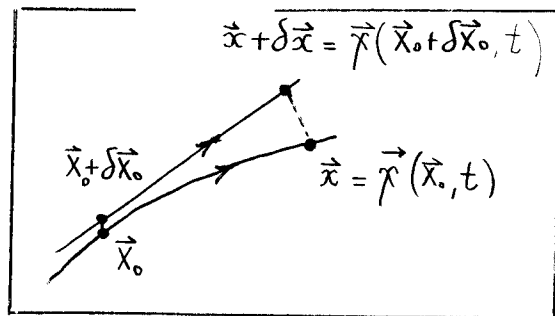
donde se deriva con  $\vec{x}_0$  constante.

$$\delta \vec{x} = \vec{r}(\vec{x}_0 + \delta \vec{x}_0, t) - \vec{r}(\vec{x}_0, t) = \frac{\delta \vec{r}}{\delta \vec{x}_0} \cdot \delta \vec{x}_0 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0j}} \delta x_{0j}$$

↙ Esto da la distancia entre puntos materiales próximos.

$$\delta \vec{x} = \vec{J} \cdot \delta \vec{x}_0$$

$$\delta \vec{x} = \text{Grad}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{x}_0$$



La operación  $\text{Grad} \equiv \text{Grad}|_{\vec{x}_0}$  es una generalización de  $\vec{\nabla}$  para vectores. Se usará también:

$$\text{grad} \equiv \text{grad}|_{\vec{x}}$$

Luego  $\vec{J} = \text{Grad}(\vec{r})$ . Si existe  $\vec{r}^{-1}$  entonces  $\det(\vec{J}) \equiv J$  (el jacobiano) debe ser no nulo y finito. EL 'J' es una función escalar y si  $J \neq 0$ ,  $J < \infty$  permite la inversión de  $\vec{r}$  que de no ser posible indica una falla en la hipótesis de continuidad.

Las  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0j}}$  permiten explorar el entorno de un punto.

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \delta x_{0j} \rightarrow$$

$$x_i - x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \delta x_{0j}$$

$$v_i - v_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial x_{0j}} \delta x_{0j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_{0j}} \delta x_{0j}$$

$$\delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_{0j}} \delta x_{0j}$$

### • Descripción Euleriana (1760) ó espacial

Se basa en campos. Las propiedades del fluido se describen por campos

$$\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$$

donde  $\vec{x}, t$  son variables independientes. Sabemos cuánto vale un campo en cada punto del espacio y a cada tiempo pero no sabemos el valor del campo para un elemento de fluido en función del tiempo. Aquí no interesa seguir los elementos de fluido. Campos usuales serán la velocidad  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  y la densidad  $\rho(\vec{x}, t)$ .

Para medir la variación temporal del campo  $\Psi$  sobre un elemento de fluido que se mueve (observador en movimiento con el fluido) consideramos:

$$\Delta \Psi = \Psi(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\Delta \Psi = \Psi(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) + \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\Delta \Psi = \Psi(\vec{x} + \vec{v} \Delta t, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) + \Psi(\vec{x}, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t)$$

$$\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{[\Psi(\vec{x} + \vec{v} \Delta t, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t + \Delta t)]}{\Delta t} + \frac{\Psi(\vec{x}, t + \Delta t) - \Psi(\vec{x}, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{D \Psi}{D t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \Psi}{\partial z} v_z \Delta t \right] + \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{D \Psi}{D t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})(\Psi)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\Phi) \rightarrow \text{Derivada total}$$

Derivada local: variación de  $\Phi$  medida por un observador inmóvil.

Derivada convectiva: cambio asociado con el movimiento en el espacio.

Podemos establecer una comparación:

$$\frac{D\Phi_E}{Dt} = \frac{\partial\Phi_E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\Phi_E)$$

$$\frac{D\Phi_L}{Dt} = \frac{\partial\Phi_L}{\partial t}(\vec{x}_0)$$

donde:

$\Phi_E = \Phi_E(\vec{x}, t)$  el campo en la descripción euleriana

$\Phi_L = \Phi_L(\vec{x}_0, t)$  una función en la descripción lagrangiana

La derivada total puede obtenerse también considerando  $\vec{x} = \vec{\gamma}[t]$ , con lo cual

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{\gamma}[t], t)$$

y tomando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{v} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{x}} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

lo cual, sin duda, mezcla ambas representaciones. No olvidemos que en Euler  $\vec{x} \neq \vec{x}(t)$

● Paso entre representaciones

- El pasaje: MATERIAL  $\longrightarrow$  ESPACIAL requiere obtener  $\vec{\gamma}^{-1}$

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial\vec{\gamma}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\gamma}(\vec{\gamma}^{-1}[\vec{x}, t], t)}{\partial t} \doteq \vec{v}(\vec{x}, t)$$

Por supuesto  $\vec{v}(\vec{x}_0, t)$  y  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  son dos funciones diferentes pero que dan el mismo valor vectorial en sus argumentos  $(\vec{x}_0, t)$  y  $(\vec{x}, t)$

- El pasaje ESPACIAL  $\longrightarrow$  MATERIAL requiere resolver:

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{con condiciones iniciales } \vec{x}_0$$

Esto básicamente es obtener la trayectoria de cada elemento de fluido.

● Líneas en la dinámica de fluidos

Tendremos diferentes tipos de líneas en el estudio de los fluidos

- trayectorias: camino recorrido por el elemento de fluido [path lines]  $\vec{x} = \vec{\gamma}(\vec{x}_0, t)$
- líneas de corriente: a  $t$  fijo curvas tales que en todos sus puntos la velocidad es tangente a la curva. Son las líneas del campo  $\vec{v}$ . Se definen desde:

$$d\vec{x} \times \vec{v} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Las líneas de corriente cambian de forma con el  $t$  en general

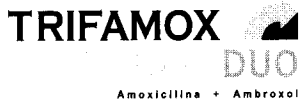
Cuando  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$  (flujo estacionario) las líneas de corriente son las trayectorias



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



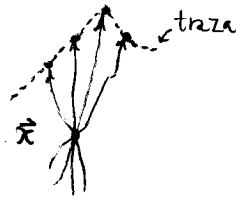
Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



- líneas de traza: lugar geométrico, a tiempo  $t$ , de todas las partículas que en el pasado han estado en un dado punto  $\vec{x}$  [streak lines]



Con flujo estacionario  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$  todas las líneas coinciden

### EJEMPLO

Lagrangiana  $\begin{cases} x = x_0 \cdot e^{\alpha t} \\ y = y_0 \cdot e^{-\alpha t} \end{cases}$

$\begin{cases} v_x = x_0 \alpha e^{\alpha t} \\ v_y = -y_0 \alpha e^{-\alpha t} \end{cases}$  Lagrangiana  $\vec{v}(\vec{x}_0, t)$

inversión  $\begin{cases} x_0 = x e^{-\alpha t} \\ y_0 = y e^{\alpha t} \end{cases}$

$\vec{v}(\vec{x}, t) = \alpha (x_0 e^{\alpha t}, -y_0 e^{-\alpha t}) = \alpha (x, -y) = \vec{v}(\vec{x})$

✓ No depende de  $t$  en este caso sencillo

⇒ Euleriana  $\begin{cases} v_x = \alpha \cdot x \\ v_y = -\alpha \cdot y \end{cases}$

$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$

sistema  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y \end{cases}$

$\ln(x) = \alpha t + C_1$

$x = A \cdot e^{\alpha t}$

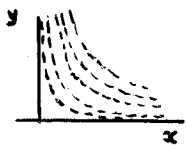
$\ln(y) = -\alpha t + C_2$

$y = B \cdot e^{-\alpha t}$

ci.  $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

lagrangiana  $\begin{cases} x = x_0 \cdot e^{\alpha t} \\ y = y_0 \cdot e^{-\alpha t} \end{cases}$

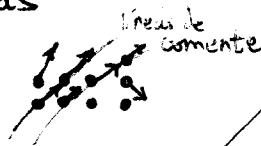
$\frac{dx}{\alpha \cdot x} = \frac{dy}{-\alpha \cdot y} \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \rightarrow \ln(x) = -\ln(y) \rightarrow x = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{x}$



líneas de corriente = trayectorias = líneas de traza para este flujo 2D de ejemplo

### Adaraciones Varias

a  $t$  fijo puedo marcar la  $\vec{v}$  en cada punto (líneas del campo  $\vec{v}$ ); las curvas tales que  $\vec{v}$  es tangente a la misma son líneas de corriente.



### Calculo de líneas de traza

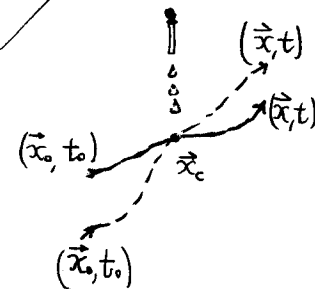
Sea que se inyecta colorante en  $\vec{x}_c$  a partir de un dado  $t_c$ . Entonces:

$\vec{x}_0 = \vec{x}^{-1}(\vec{x}_c, t')$

es la posición inicial de todas las partículas que en algún  $t'$  se hallarán en  $\vec{x}_c$  y por ende serán teñidas ( $t_c < t'$ ).

La línea de traza será:

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0[\vec{x}_c, t'], t)$



puesto que es la posición al instante  $t$  de todas las partículas que partieron desde  $\vec{x}_0$  pasando por  $\vec{x}_c$  en el tiempo  $t'$  donde el parámetro que varía  $t'$  lo hace entre

$t_c < t' < t$

En la práctica las líneas de traza son fáciles de obtener: sencillamente se inyecta colorante en el fluido y listo.

● El teorema de la divergencia de Euler

El jacobiano dice cómo transforma un elemento de volumen

$$d^3x = J(x, t) d^3x_0$$

las variaciones temporales de J hacen entonces cambiar el elemento de volumen y también la densidad dado que la masa es invariante. Del álgebra sabemos que:

$$J \delta_{ik} = J_{il} C_{kl}, \quad C_{kl} = \text{cofactor de } J_{kl}$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = \frac{dJ_{il}}{dt} C_{il}$$

$$\frac{dJ_{il}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{0l}} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_{0l}}$$

el subíndice 0 representa la coordenada inicial de la trayectoria  $\vec{x}$

$$\frac{dJ_{il}}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_{0l}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0l}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l} J_{kl}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} J_{kl} C_{il} = J \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$$\frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \cdot \text{div}(\vec{v}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{J} \cdot \frac{dJ}{dt} = \text{div}(\vec{v})}$$

Sea un volumen  $\delta\tau$  con una masa  $\delta m = \rho \delta\tau$

$$\boxed{\delta\tau = J \delta\tau_0} \leftarrow \text{variación de un elemento de volumen}$$

$$\boxed{\delta m = \rho \delta\tau = \rho_0 \delta\tau_0} \leftarrow \text{conservación de la masa}$$

$$\Rightarrow \rho J = \rho_0$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} \delta\tau + \rho \cdot \frac{d(\delta\tau)}{dt}$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} J \delta\tau_0 + \rho \cdot \frac{dJ}{dt} \delta\tau_0$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} J \delta\tau_0 + \rho \cdot J \cdot \text{div}(\vec{v}) \delta\tau_0$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD  $\rightarrow$

$$\boxed{0 = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v})}$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho) + \rho \cdot \text{div}(\vec{v})$$

$$J = \frac{\delta\tau}{\delta\tau_0} \rightarrow \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{\delta\tau_0} \frac{d(\delta\tau)}{dt} \cdot \frac{1}{\delta\tau_0} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \text{div}(\vec{v})}$$

TASA DE DILATACION

La tasa de dilatación es la divergencia de  $\vec{v}$ , y nos dice la velocidad de la variación relativa del elemento de volumen

$$\boxed{\dot{\theta} = \text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}}$$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



Si  $\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow$  el fluido es incompresible

En un fluido incompresible  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \underbrace{\text{div}(\vec{v})}_{=0} = 0 \Rightarrow$  incompresible  $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho) = 0$$

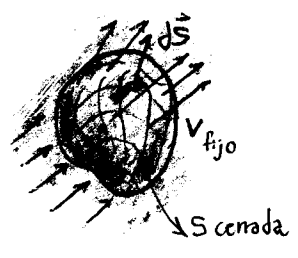
la densidad no varía siguiendo la trayectoria de un elemento. Esto no implica  $\rho \neq \rho(t)$ , pues podría tratarse de un fluido estratificado con zonas de diferente, pero constante, densidad

• ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\rho + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0$$

[1]  $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$  ← Forma espacial de la ecuación de continuidad

Consideremos un volumen fijo  $V$  donde la masa será  $M(t)$



$$\frac{d(M)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{x}, t) \cdot d^3x = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) \cdot d^3x$$

Como estoy en una posición fija (no sigo al volumen) la  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{d(M)}{dt} = - \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) \cdot d^3x = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

↑ tasa de variación de masa (por continuidad)      ↑ por divergencia Gauss      ↓ Flujo de masa a través de la superficie S

No hay fuentes ni sumideros de materia (la masa se conserva) dentro de  $V$ , esta es la hipótesis de la [1]. La variación de masa en un  $V$  fijo está relacionada con el flujo de la misma a través de  $S$ .

• Teorema del Transporte

Si la  $\rho$  es constante necesariamente lo que entra = lo que sale y  $\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$

Consideremos ahora un volumen móvil donde la masa será  $M_0$  (constante). El volumen viaja con el fluido

$$M = \int_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \cdot d^3x$$

combiando de forma pero con los mismos integrandos. Sea una magnitud  $\Phi$  con  $\Psi$  definida como  $\Phi$ /volumen

$$\Phi(t) = \int_{V(t)} \Psi(\vec{x}, t) \cdot d^3x \Rightarrow$$
 con un cambio de variables

$$\bar{\Phi}(t) = \int_{V(t_0)} \Psi(\vec{x}[\vec{x}_0, t], t) \cdot J \cdot d^3x_0$$

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot J + \Psi \cdot \frac{\partial J}{\partial t} \right) \cdot d^3x_0$$

↓ volvemos a la representación espacial

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t)] = \int_{V(t)} \left( \frac{d\Psi}{dt} + \Psi \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{dJ}{dt} \right) \cdot d^3x$$

$$\boxed{\dot{\Phi}(t) = \int_{V(t)} \left( \frac{d\Psi}{dt} + \Psi \cdot \text{div}(\vec{v}) \right) \cdot d^3x}$$

TEOREMA DEL TRANSPORTE

Casos particulares son

a)  $\Phi = 1 \Rightarrow \dot{V}(t) = \int_{V(t)} \text{div}(\vec{v}) \cdot d^3x$

b)  $\Phi = \rho \Rightarrow \dot{M} = \int_{V(t)} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) \right) \cdot d^3x = 0 \neq V(t)$  pues el integrando es la ecuación de continuidad

c)  $\Psi = \rho \vec{v} \Rightarrow \vec{P} = \int_{V(t)} \rho \vec{v} d^3x$

$$\dot{\vec{P}} = \int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \text{div}(\rho \vec{v}) \right] d^3x$$

$$= \int_{V(t)} \left[ \frac{d\rho}{dt} \vec{v} + \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v} \cdot \frac{d\rho}{dt} \right] d^3x = \int_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d^3x$$

$$\dot{\vec{P}} = \int_{V(t)} \rho \cdot \vec{a} \cdot d^3x$$

d)  $\Psi = \rho \vec{v} \times \vec{x}$

$$\vec{L} = \int_{V(t)} \rho \vec{a} \times \vec{x} d^3x$$

e)  $\Psi = \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2$

$$\dot{T} = \int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 \right) + \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 \cdot \text{div}(\vec{v}) \right] d^3x$$

$$= \int_{V(t)} \left[ \frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} |\vec{v}|^2 + \rho |\vec{v}| \frac{d|\vec{v}|}{dt} - \frac{|\vec{v}|^2}{2} \frac{d\rho}{dt} \right] d^3x$$

$$\dot{T} = \int_{V(t)} \rho |\vec{v}| \cdot |\vec{a}| d^3x = \int_{V(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{a} d^3x$$

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago  
Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago  
Comprimidos x 10

**VIXCEF**  
Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA  
Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatinica  
Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibiototerapia  
www.bago.com.ar

● Descripción de fuerzas

Tendremos:

- Fuerzas de volumen: que pueden actuar en cualquier punto y se describen por un campo vectorial. Suelen ser exteriores

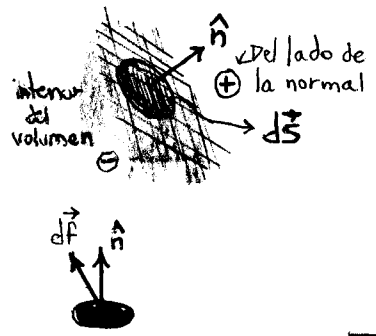
$$\vec{dF} = \vec{F} d^3x$$

con  $\vec{F} \equiv$  fuerza por unidad de volumen

$$\vec{f} = \frac{1}{\rho} \vec{F}$$

fuerza por unidad de masa

- Fuerzas de superficie: actúan por contacto y son resultado de acciones moleculares a corto alcance. Consideramos un "corte" dentro del fluido



$$d\vec{S} = \hat{n} dS \quad \text{área orientada}$$

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}(\hat{n}) \cdot d\vec{S}$$

fuerza de  $\oplus$  sobre  $\ominus$

donde  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \vec{\sigma}(\hat{n})$  esfuerzos internos

Un modelo sencillo es la llamada presión

$$\vec{\sigma}(\hat{n}) = -p \hat{n}$$

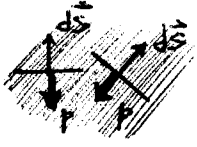
(presión es paralela a la normal y perpendicular a la superficie)

$$\vec{\sigma}(\hat{n}) \parallel \hat{n} \quad \leftarrow \text{presión}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\sigma}(\hat{n}) \perp \hat{n} \\ \parallel \text{superficie} \end{array} \right\} \leftarrow \text{esfuerzo de corte (cizalla)}$$

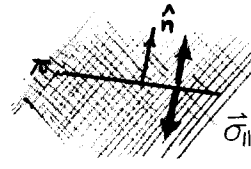
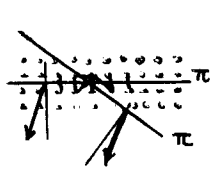
fluido ideal  $\rightarrow \vec{\sigma} \parallel \hat{n}$   
fluido viscoso  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma} \parallel \hat{n} \\ \vec{\sigma} \perp \hat{n} \end{array} \right.$

La idea es que la fuerza que se transmite a través de cualquier corte (orientado arbitrariamente) es una presión = fuerza ejercida opuesta a la normal. Esto vale en el modelo FLUIDO UNIFORME



$$d\vec{f} = -p\hat{n}dS$$

Si cambia el plano  $\pi$  de corte el esfuerzo interno  $\vec{\sigma}(\hat{n})$  cambia porque son diferentes las fuerzas moleculares. Entonces los esfuerzos no pueden caracterizarse por un simple vector.

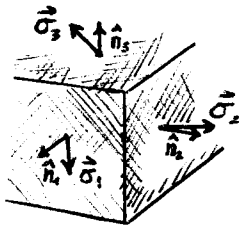


$\sigma_{11} > 0 \rightarrow$  TRACCIÓN (sólidos)  
 $\sigma_{11} < 0 \rightarrow$  PRESIÓN (líquidos y gases)

$$\vec{\sigma}(\hat{n}) = \underbrace{\vec{\sigma}_{11}}_{\text{presión/tracción}} + \underbrace{\vec{\sigma}_{\perp}}_{\text{corte o cizalla}} \leftarrow \text{En general}$$

● Esfuerzos Principales

Dado un sistema cartesiano defino tres cortes paralelos a los ejes  $\hat{e}_i$ . Quedan definidas tres normales  $\hat{n}_i$  y tres esfuerzos internos  $\vec{\sigma}_i$



$$\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$$

que serán los esfuerzos principales. A su vez cada esfuerzo tiene tres componentes cartesianas

$$\vec{\sigma}_i = \sigma_{ik} \hat{e}_k$$

Lo cual define una matriz de esfuerzos:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_1 \\ \vec{\sigma}_2 \\ \vec{\sigma}_3 \end{pmatrix}$$

corte
presión o tracción

$\sigma_{ij}$  → componente del esfuerzo  
 $\sigma_{ij}$  → identifica orientación del corte

● Principios de la dinámica de fluidos

Tenemos dos postulados para la dinámica (en un sistema inercial) (independientes y que permitan construir toda la teoría)

1

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} d^3x = \int_{V(t)} \vec{F} d^3x + \oint_{S(t)} \vec{\sigma}(\hat{n}) dS$$

$\rho \vec{v}$  aquí es el momento lineal por unidad de Volumen

por transporte

$$\int_{V(t)} [\vec{F} - \rho \vec{a}] d^3x + \oint_{S(t)} \vec{\sigma}(\hat{n}) dS = 0$$

fuerzas de inercia en volumen

La variación de  $\vec{P}$ , con un volumen  $V(t)$  que seguimos, se debe a todas las fuerzas aplicadas sobre el mismo. Vale  $\forall V(t), S(t)$  (son  $\infty$  ecuaciones)

Esto tiene pinta teorema trabajos virtuales D'Alembert

2

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} \times \vec{x} d^3x = \int_{V(t)} \vec{F} \times \vec{x} d^3x + \oint_{S(t)} \vec{\sigma}(\hat{n}) \times \vec{x} dS$$

por transporte

$$\int_{V(t)} [\vec{F} - \rho \vec{a}] \times \vec{x} d^3x + \oint_{S(t)} \vec{\sigma}(\hat{n}) \times \vec{x} dS = 0$$

La variación del  $\vec{L}$  balancea el momento de todas las fuerzas aplicadas

$\vec{\sigma}(\hat{n})$  toma como corte a la superficie  $\perp \hat{n} \Rightarrow \vec{\sigma}(\hat{n}) dS = d\vec{f}$  da la fuerza correcta



• Lema del tetraedro de Cauchy

En un punto cualquiera del fluido situamos un origen de coordenadas y construimos el tetraedro de la figura. Se cumple que:

$$\Delta S(i) = \hat{n}(i) \cdot \Delta \vec{S} = \hat{n}(i) \cdot (\Delta S \hat{N}) = N_i \Delta S$$

$$\Delta \vec{S}(i) = -\Delta S(i) \hat{n}(i) \quad (\text{por la dirección})$$

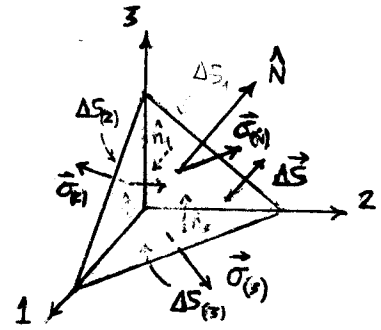
La idea de Cauchy es hacer  $h \rightarrow 0$  con tetraedros cada vez más pequeños.

$$\Delta S(i) = \hat{n}(i) \cdot \hat{N} \Delta S$$

fuerza sobre cara  $\perp \hat{i}_3$

$$\vec{\sigma}_{(2)} \Delta S_{(2)} = \vec{\sigma}_{(2)} N_2 \Delta S$$

Nótese que como las normales apuntan hacia adentro corresponde un signo (-) porque en  $\oint \vec{\sigma} dS$  se usa la normal externa.



$$\hat{N} = N_1 \hat{n}_1 + N_2 \hat{n}_2 + N_3 \hat{n}_3$$

$$V = \frac{1}{3} \Delta S \cdot h$$

La idea es aplicar el 1er postulado de la dinámica donde usamos TVM integral en algún punto  $P_a$  cualquiera de la cara correspondiente.

$$\left[ F_i - \rho a_i \right] \frac{1}{3} h \Delta S \Big|_{P_a} + \left[ \sigma_{(n)} i \right] \Delta S \Big|_{P_i} - \left[ \sigma_{(k)} N_k \Delta S \right] \Big|_{P_k} - \left[ \sigma_{(j)} N_j \Delta S \right] \Big|_{P_j} - \left[ \sigma_{(3)} N_3 \Delta S \right] \Big|_{P_3} = 0$$

$$\frac{1}{3} h [F_i - \rho a_i] + \sigma_{(n)} i - N_k \sigma_{(k)} i = 0$$

$\Rightarrow$  con  $h \rightarrow 0$  debe valer  $\sigma_{(n)} i = N_k \sigma_{(k)} i$  ; es decir

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(\hat{n})} = N_k \vec{\sigma}_{(k)}} \quad \text{LEMA DE CAUCHY}$$

el esfuerzo  $\vec{\sigma}_{(\hat{n})}$  es la suma de las proyecciones de  $\hat{N}$  sobre cada uno de los ejes multiplicada por el esfuerzo principal correspondiente.

Al tender  $h \rightarrow 0$  todos los puntos convergen en el origen y el esfuerzo  $\vec{\sigma}_{(\hat{n})}$  en cualquier dirección arbitraria  $\hat{N}$  se puede expresar en términos de los esfuerzos principales  $\vec{\sigma}_{(k)}$ , no necesito conocer  $\vec{\sigma}$  en todo punto.

• Carácter tensorial de  $\vec{\sigma}$

Sean dos sistemas de coordenadas con origen común  $\{\hat{e}_i\}, \{\hat{e}'_i\} \rightarrow$

$$\vec{x} = x_i \hat{e}_i, \quad \vec{x} = x'_k \hat{e}'_k \rightarrow x'_k = Q_{ki} x_i \quad \hat{e}'_k = Q_{ki} \hat{e}_i$$

Si la  $\boxed{\hat{N} \equiv \hat{e}'_k}$   $\rightarrow \vec{\sigma}_{(\hat{n})} = \vec{\sigma}'_{(k)}$  es un esfuerzo principal en  $\{\hat{e}'_i\} \Rightarrow$

$$\vec{\sigma}_{(\hat{n})} = N_j \vec{\sigma}_{(j)} = Q_{kj} \vec{\sigma}'_{(j)} = Q_{kj} \sigma'_{(j)m} \hat{e}_m = \sigma_{(n)l} \hat{e}_l$$

puesto que  $Q_{kj} = \hat{e}'_k \cdot \hat{e}_j = \hat{N} \cdot \hat{e}_j = N_j \rightarrow$

$$\sigma_{(n)l} \hat{e}'_k \cdot \hat{e}_a = \boxed{\sigma_{(n)a} = Q_{kj} Q_{ma} \sigma'_{(j)m}}$$

Entonces  $\sigma_{ka}$  transforman según las leyes de los tensores de rango 2.

$$\boxed{\vec{\sigma} \equiv \text{Tensor de esfuerzos}}$$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

$\square_{(k)}$  refiere a etiqueta de vector



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

$\square_k$  refiere a etiqueta de componente



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



compleiéndose:

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(\hat{n})}^t = \hat{N}^t \cdot \vec{\sigma}} \Rightarrow \vec{\sigma}_{(\hat{n})} = \vec{\sigma}^t \cdot \hat{N}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{(\hat{n})}' &= \mathbb{R} \vec{\sigma}_{(\hat{n})} = \mathbb{R} \vec{\sigma}^t \cdot \hat{N} = \mathbb{R} \vec{\sigma}^t \mathbb{R}^{-1} \mathbb{R} \cdot \hat{N}' = (\mathbb{R} \vec{\sigma}^t \mathbb{R}^{-1}) \hat{N}' = \vec{\sigma}^t' \hat{N}' \\ \Rightarrow \vec{\sigma}^t' &= \mathbb{R} \vec{\sigma}^t \mathbb{R}^{-1} \therefore \vec{\sigma} \text{ es un tensor pues los tensores cambian según } T' = \mathbb{R} T \mathbb{R}^{-1} \end{aligned}$$

### ● Transformación de Integrales

A partir del teorema de Gauss

$$\int_V \text{div}(\vec{A}) d^3x = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

$$\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d^3x = \oint_S A_i n_i dS$$

si  $\vec{A} = \phi(\vec{x}) \cdot \vec{B}$   
 $A_i = \phi B_i \rightarrow$

$$B_i \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d^3x = B_i \oint_S \phi n_i dS \rightarrow \boxed{\int_V \text{grad}(\phi) d^3x = \oint_S \phi \hat{n} dS}$$

si  $\phi = A_j \rightarrow$

$$\int_V \epsilon_{kij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} d^3x = \oint_S \epsilon_{kij} A_j n_i dS \rightarrow$$

$$\boxed{\int_V \text{rot}(\vec{A}) d^3x = \oint_S \hat{n} \times \vec{A} dS}$$

si  $\phi = \sigma_{jk} \rightarrow$

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_i} d^3x = \oint_S \sigma_{jk} n_i dS \xrightarrow{\text{de lugar también}} \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} d^3x = \oint_S \sigma_{ji} n_i dS$$

### ● La Ecuación indefinida

$$\int_V (F_i - \rho a_i) d^3x + \oint_S \sigma_{(n)i} dS = 0 \rightarrow \int_V (F_i - \rho a_i) d^3x + \int_V \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} d^3x = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_S n_k \sigma_{ki} dS$$

$$\boxed{F_i - \rho a_i + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} = 0}$$

Ecuación indefinida

$$\boxed{\vec{F} - \rho \vec{a} + \text{div}(\vec{\sigma}) = 0}$$

Se llama ecuación indefinida porque falta un modelo para el cuerpo material en cuestión (así como está vale para cualquier medio deformable) dando propiedades de la estructura de la materia.

### ● CASO: fluido ideal (Euler)

$$\underline{\sigma_{ki} = -p \delta_{ki}}$$

pues  $\sigma_{(n)i} = -p n_i = n_j \sigma_{ji} \rightarrow \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial (-p \delta_{ki})}{\partial x_k} = -\delta_{ki} \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \Rightarrow F_i - \rho a_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

$$F_i - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

Ecuación de Euler  $\rightarrow$

$$\boxed{\vec{F} - \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \text{grad}(p) = 0}$$

### ● Simetría del $\vec{\sigma}$

Usando el 2º principio

$$\vec{\sigma}_{(n)} = n_k \vec{\sigma}_{(k)}$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} (F_j - \rho a_j) x_k d^3x + \oint_S \epsilon_{ijk} n_k \sigma_{lj} x_l dS = 0$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial (\sigma_{lj} x_l)}{\partial x_l} d^3x = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \int_V \left\{ [F_j - \rho a_j + \frac{\partial \sigma_{lj}}{\partial x_l}] x_k + \sigma_{lj} \delta_{lke} \right\} d^3x = 0$$

Pero, luego por la ecuación indefinida resulta el primer término nulo y entonces

$$\epsilon_{ijk} \int \sigma_{kj} d^3x = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{kj} = \sigma_{jk}}$$

Entonces  $\vec{\sigma}$  debe ser simétrico

• Fluidos Ideales

Se suele definir como fluido un material que en reposo NO puede sostener esfuerzos de cizalla. Entonces:

$$\boxed{\sigma_{ki} = -p \delta_{ki}} \quad [1]$$

Euler construye el modelo de FLUIDOS IDEALES usando [1] también para un fluido en movimiento.

$$\bullet \quad \boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \text{grad}(p)} \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\bullet \quad \boxed{\frac{dp}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0} \quad \text{Continuidad} \quad \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Este modelo no considera la viscosidad.

Otra simplificación viene de considerar la compresibilidad

$\swarrow$  compresible (asociado a flujos de altas velocidades)  
 $\searrow$  incompresible ( $\text{div}(\vec{v}) = 0$ )  $\Rightarrow$   $\boxed{\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(p) = 0}$

$\downarrow$  densidad uniforme  $\rho = \rho_0$   
 $\downarrow$  densidad estratificada  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$

• Hidrostática

La hidrostática considera los fluidos en reposo ( $\vec{a}, \vec{v} = 0$ ). Las ecuaciones fundamentales de la hidrostática entonces son:

$$\boxed{0 = \vec{F} - \text{grad}(p)} \quad 0 = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\boxed{0 = \frac{dp}{dt}}$$

Se suelen expresar las fuerzas por unidad de masa  $\rightarrow$

$$\vec{F} = \rho \vec{f} \quad , \quad \text{donde} \quad \vec{F} \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{Volumen}} \quad , \quad \vec{f} \equiv \frac{\text{fuerza}}{\text{masa}} \equiv \text{aceleración}$$

Sea que la fuerza es conservativa  $\rightarrow$  proviene de un potencial  $\vec{F} = -\text{grad}(\Omega)$

$$\boxed{\text{rot}(\vec{F}) = 0}$$

$$\text{rot}(\rho \vec{f}) = \boxed{\text{grad}(\rho) \times \vec{f} + \rho \cdot \text{rot}(\vec{f}) = 0}$$

Entonces necesitaremos que:  $\begin{cases} \vec{f} \text{ paralela al grad}(p) \\ \vec{f} \text{ sea conservativa} \rightarrow \vec{f} = -\text{grad}(\Omega) \end{cases}$

En hidrostática es:

$$0 = \rho \vec{f} - \text{grad}(p)$$

$$0 = -\rho \cdot \text{grad}(\Omega) - \text{grad}(p)$$

$$0 = -\text{grad}(\Omega) - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p)$$

El modelo de flujo barotrópico considera que  $\boxed{\rho = \rho(p)} \rightarrow$  define

$$\boxed{\mathcal{H} \equiv \int_0^p \frac{dp}{\rho(p)}} \quad \text{con lo cual} \quad \text{grad}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) \quad \therefore$$

$$0 = -\text{grad}(\Omega) - \text{grad}(\mathcal{H}) = -\text{grad}(\Omega + \mathcal{H})$$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

Ecuaciones de Cauchy  $\downarrow$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

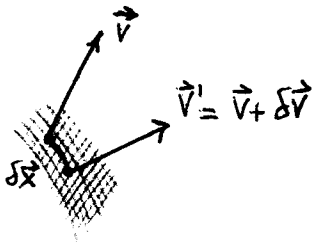


Un flujo barotrópico es compresible

Entonces  $\mathcal{H} + \Omega = \text{cte.}$  en hidrostática para un flujo barotrópico.

Por supuesto  $\rho = \rho_0$  es un caso especial sencillo:  $\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{\rho} + \Omega = \text{cte.}$

• Variación de la velocidad entre puntos cercanos



$$v'_i = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta x_k$$

$$v'_i = v_i + \delta x_k \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \delta x_k \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$$v'_i = v_i + \delta x_k \underbrace{\epsilon_{ikj}}_{\text{tensor de deformación}} + \delta x_k \underbrace{\omega_{ik}}_{\text{tensor de rotación}}$$

dual de Gibbs

$$\omega_{ik} = \epsilon_{ikj} \varphi_j \quad \left[ \text{se puede escribir el tensor así} \right]$$

$$\epsilon_{lik} \omega_{ik} = \epsilon_{lik} \epsilon_{ikj} \varphi_j$$

$$\epsilon_{lik} \omega_{ik} = 2 \delta_{lj} \varphi_j = 2 \varphi_l \Rightarrow$$

$$\varphi_l = \frac{1}{2} \epsilon_{lik} \omega_{ik}$$

$$\delta x_k \omega_{ik} = \delta x_k \epsilon_{ikj} \varphi_j = \{ \delta \vec{x} \times \vec{\varphi} \}_i$$

$$\{ \text{rot}(\vec{v}) \}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) = \epsilon_{ijk} \omega_{kj} = - \epsilon_{ikj} \omega_{kj} = \omega_i$$

$$\{ \text{rot}(\vec{v}) \}_i = -\varphi_i \quad \text{y llamaremos} \quad \boxed{\text{rot}(\vec{v}) \equiv \omega} \quad \text{vorticidad}$$

$$\omega_i = -2\varphi_i$$

$$v'_i - v_i = \delta x_k \epsilon_{ik} + \{ \delta \vec{x} \times \vec{\varphi} \}_i$$

$$v'_i - v_i = \delta x_k \epsilon_{ik} + \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \omega_j \delta x_k$$

$$\frac{\delta v_i}{\delta x_k} = \epsilon_{ik} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j$$

$$v_k \left( \frac{\delta v_i}{\delta x_k} \right) = v_k \epsilon_{ik} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} v_k \omega_j = \frac{v_k}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{v_i}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j v_k$$

$$\frac{1}{2} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j v_k$$

$$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_k} + \epsilon_{ijk} \omega_j v_k \Rightarrow$$

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \left( \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) + \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

• Transformación del término convectivo (otra demostración) EM1 (7)

Podemos transformar la parte convectiva en  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  de acuerdo a

$$\left[ (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right]_j = v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \Rightarrow$$

$$v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = v_k \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k v_k) - v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k v_k) + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$= + v_k \delta_{lj} \delta_{nk} \frac{\partial v_l}{\partial x_n} - v_k \delta_{lj} \delta_{nk} \frac{\partial v_n}{\partial x_l}$$

$$= + v_k \delta_{lj} \delta_{nk} \frac{\partial v_l}{\partial x_n} - v_k \delta_{nj} \delta_{lk} \frac{\partial v_l}{\partial x_n}$$

$$= + v_k (\delta_{lj} \delta_{nk} - \delta_{lk} \delta_{nj}) \frac{\partial v_l}{\partial x_n}$$

$$= + v_k \epsilon_{iln} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_l}{\partial x_n}$$

$$= + \epsilon_{ijk} (\epsilon_{iln} \frac{\partial v_l}{\partial x_n}) v_k$$

$$v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_k v_k) + \epsilon_{jik} \left[ \epsilon_{iln} \frac{\partial v_l}{\partial x_n} \right] v_k$$

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \times \vec{v}}$$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20

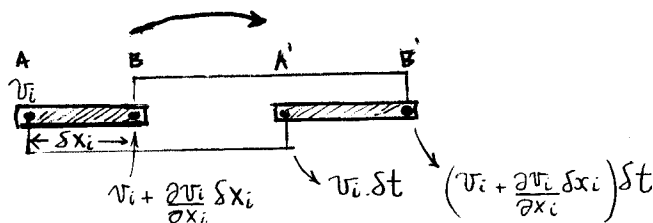


Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



A la vanguardia en antibioterapia  
www.bago.com.ar

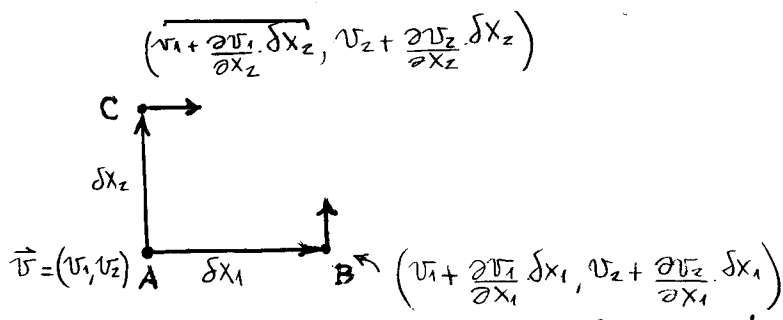
Superficie del tensor de deformación



EL tensor de deformación está asociado con la variación de tamaño de los elementos de fluido.

$$\frac{1}{\delta t} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta x_i \delta t \right) = \frac{1}{\delta t} \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

• Significado del tensor de rotación



$$\delta \vec{v}_1 = [\vec{v}_C - \vec{v}_A]_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta x_2$$

$$\delta \vec{v}_2 = [\vec{v}_B - \vec{v}_A]_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta x_1$$

$$\omega_{12} \propto \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \delta x$$

Los componentes del tensor  $\omega_{ij}$  están asociados con rotación de los elementos de fluidos. Evidentemente con

$$\omega_{12} > 0 \rightarrow \text{clockwise}$$

$$\omega_{12} < 0 \rightarrow \text{anticlockwise}$$

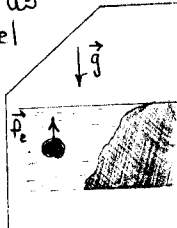
El fluido como un todo puede girar pese a que  $\omega = 0$ .

$\vec{\omega}$  indica estados de giro de los elementos infinitesimales de fluido.

• Empuje de un cuerpo sumergido (inmerso en fluido)

$$\vec{f}_e = - \oint_S p \hat{n} dS = - \int_V \text{grad}(p) dV$$

↑ Es el empuje del fluido circundante sobre el cuerpo inmerso en él. No estamos considerando esfuerzos de cizalla.



• EJEMPLO

Para un cuerpo sumergido en agua <sup>flotando</sup> en el campo de presiones terrestre será:

$$p = p_0 - \rho g z$$

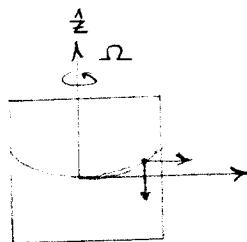
$$\text{grad}(p) = -\rho g \hat{z}$$

$$\vec{f}_e = \int_V \rho g \hat{z} d^3x = \rho g V = m_c \cdot g$$

$$\vec{f}_e = \text{Peso del cuerpo}$$

Prncipio de Arquímedes ↑

Consideramos un balde que gira (estacionario)



$$\rho \vec{f} - \text{grad}(p) = 0$$

$$-\rho g \hat{z} + \rho \Omega^2 r \hat{r} - \text{grad}(p) = 0$$

ficticia ↑  $\hat{r}) \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r$

$$p(r, z_0) = \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} + D(z)$$

$$\hat{z}) \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p(z, r_0) = -\rho g z + C(r)$$

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2$$

La superficie equipotencial es una tal  $z = z(r)$  parabólica

● **Flujos barotrópicos con campos conservativos**  
 Partimos de la ecuación de Euler:

$$\rho a_i = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{con } \vec{f} = -\text{grad}(\Omega) \text{ [Conservativa]}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v}) \times \vec{v} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\text{grad}(\Omega) - \text{grad}(\mathcal{H}) - \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\text{grad}(\Phi)$$

donde:  $\Phi = \Omega + \mathcal{H} + \frac{1}{2} v^2$

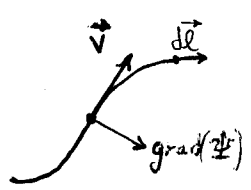
Consideremos unos casos particulares importantes:

● **FLUJO ESTACIONARIO**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = -\text{grad}(\Phi)$$

tomando producto escalar con  $\vec{v}$ :  
 $\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\vec{v} \cdot \text{grad}(\Phi) = 0$   
 $\therefore d\vec{r} \perp \text{grad}(\Phi)$   
 $\Rightarrow d\vec{r} \parallel \text{lineas de } \Phi \text{ constante}$



Las lineas de corriente son lineas de  $\Phi$  constante.  $\Phi$  vale una constante en cada linea de corriente pero no es necesario que sea la misma constante para todas las lineas diferentes.

Si consideramos  $\vec{f} = -g\hat{z}$

i) con  $\rho = \rho(r)$  (GAS ADIABÁTICO)  $\rightarrow \mathcal{H} = \int \frac{dp}{\rho^{1/\gamma}} = \frac{p^{1-1/\gamma}}{1-1/\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p}{\rho}$

$$\Phi = gz + \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$$

ii) con  $\rho = \rho$  (LÍQUIDO)

$$\Phi = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2$$

● **FLUJO IRROTACIONAL**  $\vec{\omega} = 0$

Puedo definir a la velocidad como un gradiente de alguna función  $\Phi$

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{v} \equiv \text{grad}(\Phi)$$

$$0 = -\text{grad} \left( \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Rightarrow \Omega + \mathcal{H} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{cte}$$

$$\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = h(t) \quad \text{es constante } \forall \vec{x}$$

● **FLUJO ESTACIONARIO e IRROTACIONAL**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\omega} = 0$$

$$0 = -\text{grad}(\Phi)$$

$$\Phi = \Omega + \mathcal{H} + \frac{1}{2} v^2 \quad \text{es constante } \forall \vec{x}$$

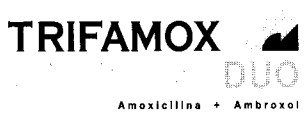
ii) LÍQUIDO en el campo gravitatorio  
 $\rho g z + p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$



Comprimidos x 14  
 Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
 Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
 Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
 Suspensión x 60 ml.  
 Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
 Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
 Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



## ● Ecuación de Helmholtz

Tomando el rotor en  $\left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} = -\text{grad}(\phi) \right\}$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{div}(\vec{\omega}) + \vec{\omega} \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \vec{\omega} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

NB  
No estoy considerando fluido incompresible

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

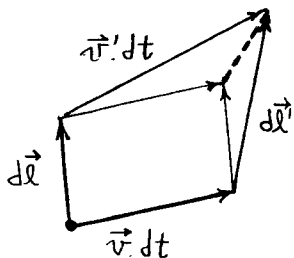
Pero, como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left[ \rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\rho}{dt} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \right) \vec{v}}$$

Ecuación de Helmholtz

## ● Evolución de un elemento de línea



$$d\vec{l}' - d\vec{l} = (\vec{v}' - \vec{v}) dt$$

$$\delta d\vec{l} = \delta \vec{v} dt$$

$$\delta d\vec{l} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta l} \delta l dt$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} (d\vec{l}) = (d\vec{l} \cdot \text{grad}) \vec{v}}$$

El elemento de línea  $d\vec{l}$  evoluciona en el tiempo como  $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dl'}{dl} = \frac{\omega'}{\rho} \frac{\rho}{\omega}}$$

$$\frac{\omega}{\rho} = \frac{\omega'}{\rho'} \frac{\delta l}{\delta l'}$$

$$\bullet \boxed{\delta L = \delta r \cdot \delta m \cdot v = \delta r \delta m (\delta r \omega)}$$

Momento angular de un cilindro

$$\delta m = \rho \cdot \pi (\delta r)^2 \delta l = \rho' \pi (\delta r')^2 \delta l' \rightarrow (\delta r')^2 = (\delta r)^2 \frac{\delta l}{\delta l'} \frac{\rho}{\rho'}$$

pues la masa no cambia

$$\delta L' = (\delta r')^2 \omega' \delta m = (\delta r')^2 \omega' \delta m = (\delta r)^2 \frac{\delta l}{\delta l'} \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{\delta l'}{\delta l} \frac{\rho'}{\rho} \omega \cdot \delta m = (\delta r)^2 \omega \delta m$$

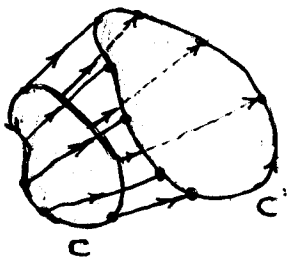
$$\Rightarrow \delta L = (\delta r)^2 \omega \delta m = \delta L'$$

$\Rightarrow$  El momento angular se conserva

Consideramos un cilindro infinitesimal material alineado con la vorticidad

## ● Circulación de la velocidad

Se define la circulación de un campo como la integral de línea en un circuito C. Considero un circuito formado por elementos materiales y quiero "seguir" esos elementos en el tiempo.



$$\boxed{\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}}$$

$$\frac{d}{dt} (\Gamma) = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{l})$$

$$\frac{d}{dt} (\Gamma) = \oint_C -\text{grad}(\Omega + \phi) \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \cdot \underbrace{\left( \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \text{grad} \right) \vec{v}}_{\text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \cdot d\vec{l}}$$

$$\frac{d}{dt} (\Gamma) = \oint_C \left[ -\text{grad}(\Omega + \phi) + \text{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \right] \cdot d\vec{l}$$

Pero por STOKES theorem se reduce a  $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$  con lo cual:



$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

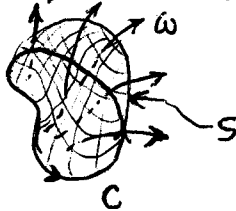
Tero

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \equiv \oint \omega$$

flujo de la vorticidad

$$\frac{d \oint \omega}{dt} = 0$$

EL flujo de la vorticidad a través de S no varía

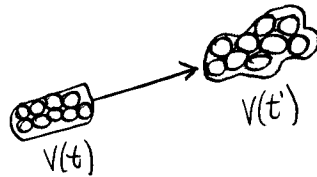


La idea en  $\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$  es que seguimos un dado conjunto de elementos de fluidos  $\vec{\ell}$  a lo largo de su evolución. Así como en el transporte de la masa seguimos un volumen  $V(t)$  compuesto de los mismos elementos de fluidos y podríamos "meter" la derivada dentro de la integral (sin rigor)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t)} \frac{d\rho}{dt} dV + \rho \cdot \frac{d}{dt} (dV) \quad \frac{d}{dt} (dV) = \frac{dJ}{dt} dV_0$$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{V(t)} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) \right] dV = 0$$

El volumen cambia pero los elementitos constituyentes son los mismos.



**TRIFAMOXIBL**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX**  
DUO  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica

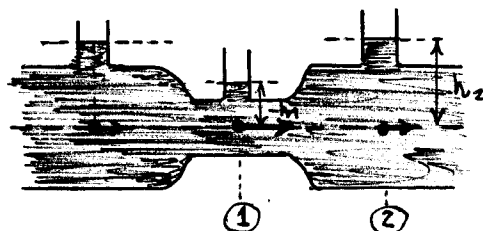
Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibiotioterapia  
www.bago.com.ar

Tubos de Venturi

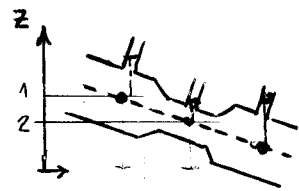
Los tubos de venturi permiten, aplicando Bernoulli, extraer información sobre presiones y velocidades

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 = \text{cte}$$



Esto es una constante en UNA LINEA de CORRIENTE como ---. Luego en

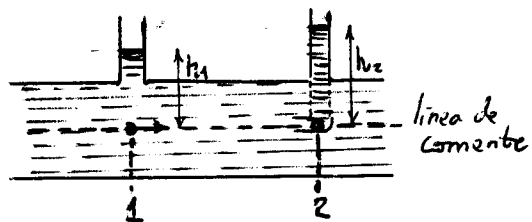
- ① sube  $v_1 \rightarrow$  baja  $p_1$
- ② baja  $v_2 \rightarrow$  sube  $p_2$



$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 = \text{cte}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

• Velocidad de un fluido en una tubería con un tubo pitot



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = 0$$

$$p = p_0 - \rho g z$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1)$$

$$v_1 = \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)^{1/2} z^{1/2}$$

$$v_1 = [z g (h_2 - h_1)]^{1/2}$$

• Modelo de variación de T con la altura

$$p \cdot V = nRT = \frac{m}{\mu} RT \rightarrow p/\rho^{\gamma} = \text{cte} \quad \text{y} \quad \rho^{\gamma/\mu} = \rho \left( \frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)^{\gamma/\mu}$$

$$\mathcal{H} = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'^{\gamma/\mu}} = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'^{\gamma/\mu}} = \frac{p^{-1/\mu+1}}{1-1/\mu} = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{RT}{\mu}$$

$$\mathcal{H} + \Omega = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{RT}{\mu} + gz = 0 \quad \text{si ajustamos } T(z=0) = 0 \rightarrow$$

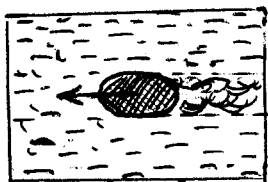
$$T = -g \cdot \frac{\mu}{RT} \left( \frac{\mu-1}{\mu} \right) z$$

$$\delta T = -\alpha \delta z$$

La variación de T con la altura es lineal y dada por el factor  $(-\alpha)$  {disminuye la T con z}

• Flujo de la cantidad de movimiento

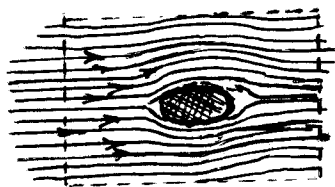
Al mover un cuerpo en el seno de un fluido viscoso éste deja una estela y es necesario aplicar una fuerza.



Pensamos que es posible hacer una equivalencia con un fluido ideal y un cuerpo inmóvil inmerso en él.

Podremos relacionar lo que sucede en este sistema en dos puntos de comportamientos diferente (cerca del objeto y lejos de él) mediante un teorema.

Este será el teorema del flujo de la cantidad de movimiento.



Escribimos el 1er principio y aplicamos teorema de transporte y definición "d/dt"

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_i d^3x = \int_{V(t)} F_i d^3x + \oint_{S(t)} \sigma_{ki} n_k dS \quad \text{; pero por otro lado aplicando transporte al LHS es}$$

$$= \int_{V(t)} \left( \frac{d}{dt} [\rho v_i] + \rho v_i \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) d^3x = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i) + (\rho v_i) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) d^3x$$

$$= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\rho v_i] d^3x + \underbrace{\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) d^3x}_{\oint_S \rho v_i v_k n_k dS} = \int_{V(t)} F_i d^3x + \oint_{S(t)} \sigma_{ik} n_k dS$$

$$\oint_S \rho v_i v_k n_k dS$$

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d^3x = \int_{V(t)} F_i d^3x + \oint_{S(t)} [\sigma_{ik} - \rho v_i v_k] n_k dS$$

Considerando un tiempo fijo y cambiando un signo :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i d^3x = \int_V F_i d^3x - \oint_S [\rho v_i v_k - \sigma_{ik}] n_k dS$$

TEOREMA DEL FLUJO DE LA CANTIDAD DE MOV.

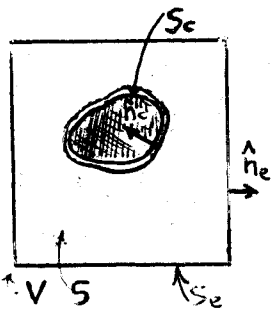


Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

con  $\rho v_i v_k - \sigma_{ik} \equiv \Pi_{ik}$

el tensor flujo de cantidad de movimiento. El momento lineal de un volumen fijo V variará por la acción de fuerzas externas o por flujo entrante o saliente a través de  $S \equiv \partial V$

• Aplicación del teorema : idea



Sea un volumen V rodeando un cuerpo de interés. Si nos hallamos en un régimen estacionario se tendrá que:

$$0 = \int_V F_i d^3x - \oint_S \Pi_{ik} n_k dS$$

Sean las fuerzas externas nulas ( $F_i=0$ ); luego:

$$0 = - \int_{S_e} \Pi_{ik} n_k dS - \int_{S_c} [\rho v_i v_k n_k - \sigma_{ik} n_k] dS$$

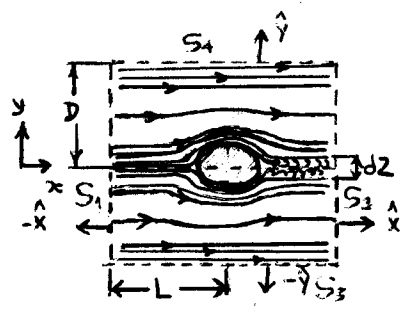
Porque en la superficie del cuerpo  $\vec{v}$  es  $\perp$  a la  $\hat{n}$

$$\int_{S_e} \Pi_{ik} n_k dS = \int_{S_c} \sigma_{ik} n_k dS$$

y esto representa la fuerza  $R_i$  del fluido sobre el cuerpo (a menos del signo). En la zona del cuerpo hay efectos viscosos importantes y la teoría del fluido ideal no es conveniente, pero lejos de allí si es aplicable y ahí es en donde calculamos.

Vemos lo que sucede en la frontera del cuerpo calculando en la frontera del V.

• Aplicación del teorema: ejemplo



Tomemos una caja grande hasta la zona de fluido ideal. Las fuerzas en  $\hat{y}$  se cancelan por simetría de revolución.

$$\vec{\Pi} = \begin{pmatrix} \rho v_x^2 + p & \rho v_x v_y \\ \rho v_y v_x & \rho v_y^2 + p \end{pmatrix}$$

Calcularemos sobre la superficie externa  $S_1, S_2, S_3, S_4$

$$\oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{\Pi} \cdot (-\hat{x}) dy + \int_{S_2} \vec{\Pi} \cdot (\hat{x}) dy + \int_{S_3} \vec{\Pi} \cdot (-\hat{y}) dx + \int_{S_4} \vec{\Pi} \cdot (\hat{y}) dx$$

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_{-D}^{+D} (\rho v_x^2 + p) dy & \int_{-D}^{+D} (\rho v_x^2 + p) dy & -\int_{-L}^{+L} \rho v_x v_y dx & \int_{-L}^{+L} \rho v_x v_y dx \\ -\int_{-D}^{+D} \rho v_y v_x dy & \int_{-D}^{+D} \rho v_y v_x dy & -\int_{-L}^{+L} (\rho v_y^2 + p) dx & \int_{-L}^{+L} (\rho v_y^2 + p) dx \end{pmatrix}$$

Ahora metemos unas suposiciones: sobre  $S_1$  es  $\vec{v} = (v_0, 0)$ , sobre  $S_3$  es  $\vec{v} = (v_0, -v_*)$ , sobre  $S_4$  es  $\vec{v} = (v_0, v_*)$  y sobre  $S_2$  es  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  en la zona  $-d \leq y \leq d$  y  $(v_0, 0)$  en el resto. Además  $p$  es  $p_0$  siempre.

$$R_x = -\int_{-D}^{+D} (\rho v_0^2 + p_0) dy + \int_{-D}^{+D} (\rho v_x^2 + p_0) dy + 2 \int_{-L}^{+L} \rho v_0 v_* dx$$

V será un volumen de control fijo. Eso permitirá aplicar el teorema.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

Las normales ilustradas  $\hat{n}_c, \hat{n}_e$  son las externas



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

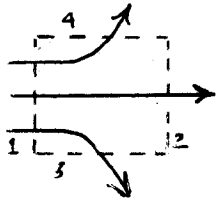


A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

$$R_y = \int_{-D}^{+D} \rho v_x v_y dy = \int_{-d}^{+d} \rho v_x v_y dy = 0 \quad (\text{es nula por simetría})$$

$$R_x = \int_{-D}^{+D} \rho (v_x^2 - v_0^2) dy + 2 \int_{-L}^{+L} \rho v_0 v_* dx$$

Ahora consideramos que el flujo de momento entrante es igual al saliente  $\Rightarrow$



$$\int_{-D}^{+D} \rho v_0 dx = \int_{-D}^{+D} \rho v_x dx + \left( - \int_{-L}^{+L} \rho (v_*) dx \right) + \int_{-L}^{+L} \rho v_* dx$$

$$\int_{-D}^{+D} \rho (v_0 - v_x) dx = 2 \int_{-L}^{+L} \rho v_* dx$$

**NB**  
 Notemos que para el flujo de momento interesa solamente  
 $\int \rho v_{\perp} dS = \int \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS$

$$R_x = \int_{-D}^{+D} \rho (v_x^2 - v_0^2) dy + \int_{-D}^{+D} \rho v_0 (v_0 - v_x) dy = \rho \int_{-D}^{+D} (v_x^2 - v_0^2 + v_0^2 - v_0 v_x) dy$$

$$R_x \approx \rho \int_{-D}^{+D} v_x (v_x - v_0) dy \Rightarrow \boxed{R_x \approx \rho \int_{-D}^{+D} v_x (v_x - v_0) dy}$$

donde hemos recordado el hecho de que supusimos fuera de la zona  $(-d, d)$  era  $v_x = v_0$ .

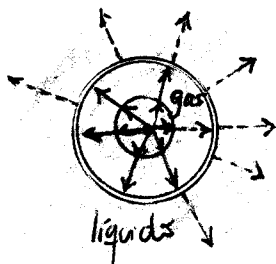
La fuerza  $R_x$  es la fuerza del cuerpo sobre el fluido pues las normales usadas son las exteriores a la superficie donde se mueve el fluido. Si:  $v_x < v_0$  resulta en  $-x$  lo cual es razonable.

# • Modelo de Explosión Submarina (Rayleigh)

Podemos pensar en la expansión de un gas que explota. Pienso en un fenómeno adiabático.

$$P(R^3)^{\gamma} = P_0(R_0^3)^{\gamma} \quad , \text{ pues } PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma} = \text{cte}$$

es adiabático



- No considero gravedad
- $\text{div}(\vec{V}) = 0$  incompresible con  $\rho$  constante
- $\vec{V} = \vec{V}(r, t) = v(r, t) \hat{r}$
- $\text{rot}(\vec{V}) = 0 \rightarrow \vec{V} = \text{grad}(\Phi)$   
irrotacional

La incompresibilidad implica que el gas empuja al líquido y que

$$\dot{R} = \dot{r} \rightarrow 4\pi R^2 \dot{R} = 4\pi r^2 \dot{r}$$

los flujos de cantidad de movimiento son iguales

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

Pero

$$v = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \Rightarrow \Phi = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad \therefore \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \text{grad}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$$

$$0 = -\text{grad}\left(-\frac{R^2 \ddot{R}}{r} - \frac{2R\dot{R}^2}{r} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) \Rightarrow \text{resulta una constante}$$

$$f(t) = -\frac{R^2 \ddot{R}}{r} - \frac{2R\dot{R}^2}{r} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} \quad \text{con } r \geq R$$

Con  $r \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{p_0}{\rho}$$

con  $r \rightarrow R$

$$p = \frac{P_0 (R_0^3)^{\gamma}}{R^{3\gamma}}$$

condiciones de borde

Pero por la adiabaticidad la  $p \neq p(t)$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

$$\boxed{-R\ddot{R} - 2\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0(R_0^3)^{3\gamma}}{\rho(R)^{3\gamma}} = \frac{P_0}{\rho}}$$

Conviene adimensionalizar con

$$x = \frac{R}{R_0}$$

$$\frac{P_0}{\rho R_0^2} = \frac{1}{T_0}$$

$$z = \frac{t}{T_0} \Rightarrow T_0 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$-R_0 x \cdot \frac{d^2}{dz^2}(x R_0) - \frac{3}{2} \left(\frac{d}{dz}(x R_0)\right)^2 + \frac{P_0}{\rho} \left(\frac{1}{x}\right)^{3\gamma} = \frac{P_0 R_0^2}{P_0 T_0}$$

$$-\frac{R_0^2}{T_0} x \frac{d^2}{dz^2}(x) - \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{T_0} \left(\frac{d}{dz} x\right)^2 + \frac{R_0^2}{T_0} x^{-3\gamma} = \frac{R_0^2}{T_0} \frac{P_0}{P_0}$$

$$-x \cdot x'' - \frac{3}{2} x'^2 + x^{-3\gamma} = \frac{P_0}{P_0}$$

$$\boxed{x \cdot x'' + \frac{3}{2} x'^2 - x^{-3\gamma} = -\frac{P_0}{P_0}}$$

$x = x(z)$   
 $x, x', x''$

Una ecuación de 2<sup>do</sup> orden. La podemos pasar a una de segundos orden mediante otro cambio de variable.

$$x' = \frac{d}{dt} x = q \rightarrow \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{dq}{dx} \cdot q = \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{2} \right)$$

$$x'' = \frac{d^2}{dz^2} x = \frac{dq}{dz}$$

$$x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{2} \right) + 3 \left( \frac{q^2}{2} \right) - x^{-3\gamma} = -\frac{p_0}{p_0} \quad ; \text{considerando } \xi = \frac{q^2}{2}$$

$$[1] \quad x \cdot \xi' + 3 \cdot \xi - x^{-3\gamma} = -\frac{p_0}{p_0}$$

Ahora es de orden 1

La versión homogénea de [1] es lineal de 1<sup>er</sup> orden. Podemos pedir además  $p_0 \rightarrow 0$  con lo cual

$$x \cdot \xi' + 3 \cdot \xi = x^{-3\gamma} \quad \text{se puede resolver considerando separadamente}$$

$$\xi = x^\lambda \rightarrow \lambda x^{\lambda-1} = \xi' \rightarrow x \cdot \lambda x^{\lambda-1} + 3x^\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -3$$

$$\xi_p = k \cdot x^{-3\gamma} \quad -3\gamma k x^{-3\gamma} + 3k x^{-3\gamma} = x^{-3\gamma} \rightarrow -3\gamma k + 3k = 1 \quad k = \frac{1}{3(1-\gamma)}$$

$$\xi = x^{-3} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-\gamma)} x^{-3\gamma}$$

### • Cavitación. Comentario

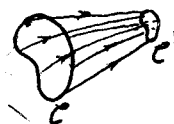
Las hélices de los barcos generan zonas de baja presión (burbujas), estas implotan por la presión circundante generando ondas de choque que golpean las hélices. Se puede modelar con el modelo de la explosión de Rayleigh en sentido inverso

### • Conservación de la vorticidad

Sea un fluido inicialmente irrotacional,  $\vec{\omega} = 0$ , a un tiempo  $t$ . Entonces:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_C} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \forall \text{ curva } C$$

Un tiempo después sea que  $\vec{\omega} \neq 0$  en alguna parte del fluido. Podemos elegir una pequeña curva  $C'$  tal que:



$$\Gamma = \oint_{C'} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_{C'}} \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS \neq 0,$$

pero esto no puede suceder porque en algún tiempo anterior debió ser nula (proyecto hacia el pasado  $C' \rightarrow C$ ) y dijimos que la circulación no cambiaba con el tiempo ( $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ ) para un circuito con las mismas partículas. La vorticidad persiste.

La idea es que  $C'$  se compone de ciertas partículas que pueden "seguir hacia atrás en el tiempo" al instante donde evalúe  $\Gamma = 0$  para dicha curva  $\Rightarrow$  allí está la contradicción.

La vorticidad se genera por la viscosidad

### • Modelo explosión submarina gas (ideas)

Análisis el movimiento del gas (adiabático)

$$p \cdot V^\gamma = p_0 \cdot V_0^\gamma$$

Consideramos que la expansión del gas provoca la expansión del líquido por la incompresibilidad

$$4\pi R^2 \dot{R} = 4\pi r^2 \dot{r} \quad \text{pues} \quad \int_{S_G} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_L} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

EL FLUJO DE CANTIDAD DE MOV. ES EL MISMO (cons. de la masa)

$\text{div}(\vec{v}) = 0 \leftarrow$  incompresible

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{grad}(\Phi) \leftarrow \text{irrotacional}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left( \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho_0} \right)$$

$$0 = -\text{grad} \left( \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

$$\vec{v} = \nabla(r, t) \hat{r}$$

no hay f. externas

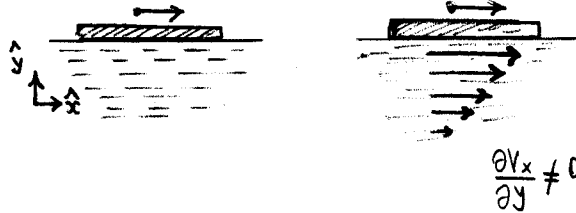
● Introducción a Fluidos viscosos  
Tenemos la ecuación indefinida

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$$

$$\rightarrow \sigma_{ki} = -p \delta_{ki} \quad (\text{ideal})$$

$$\sigma_{ki} = -p \delta_{ki} + \eta_{ki} \quad (\text{viscoso})$$

Se introduce la no-idealidad con un término  $\eta_{ki}$  que dará esfuerzos de corte. Los estudios de viscosidad de Newton llevaron a un comportamiento lineal con la velocidad. Arrastrar una placa en un fluido viscoso hace que se ponga en movimiento el fluido circundante por el **ARRASTRE**; en un fluido ideal hay **DESLIZAMIENTO**.



Esto lleva al modelo de fluido **NEWTONIANO**. La derivada  $\partial v_x / \partial y$  es una tasa de deformación.

$$\eta_{ki} \propto \epsilon_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

La viscosidad se pone con un factor  $\mu$  que dependerá de la temperatura en general

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_k} \right]$$

$$\text{div}(\vec{\sigma}) = -\text{grad}(p) + \mu (\nabla^2 \vec{v} + \text{grad}(\text{div}[\vec{v}]))$$

No obstante con el límite  $\mu \rightarrow 0$  no se recupera en general el comportamiento del fluido ideal. Esto es así porque se termina tirando la derivada de más pero perdiéndose el carácter de la ecuación.

● Número de Reynolds (intuitivo)

Tenemos dos efectos a considerar: inercia y viscosidad asociados a ciertos parámetros característicos del sistema bajo estudio. Dadas un tiempo característico ' $\tau$ ' y una longitud característica ' $L$ '

inercia  $\rightarrow \rho \frac{V}{\tau}$

$\frac{\mu V}{L^2}$   $\leftarrow$  viscosidad

y se define el número de Reynolds como

$$Re \equiv \frac{\text{efectos de inercia}}{\text{efectos de viscosidad}} = \frac{\rho \cdot V / \tau}{\mu \cdot V / L^2} = \frac{L^2}{\tau \mu / \rho} = \frac{L^2 / \tau}{\nu}$$

donde  $\nu \equiv \mu / \rho$  es la viscosidad cinemática.

Entonces

$$Re \gg 1 \Rightarrow \nu \text{ baja respecto a } \frac{L^2}{\tau} = L \cdot v$$

$$Re \ll 1 \Rightarrow \nu \text{ alta respecto a } \frac{L^2}{\tau} = L \cdot v$$

donde  $v \equiv \frac{L}{\tau}$  es una velocidad característica.

Con un  $Re$  alto se puede tomar el límite  $\mu \rightarrow 0$  y obtener fluido ideal.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



● **Flujos potenciales (introducción)**

Construimos cierto flujo 2D a partir de sumar dos potenciales  $\Phi$ . En la hoja siguiente se desarrollará la teoría completa de estos flujos potenciales.

Consideramos un flujo incompresible, irrotacional en 2D

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0, \quad \text{div}(\vec{v}) = 0,$$

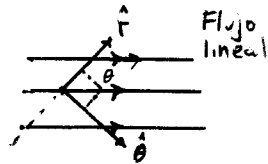
donde puedo definir un potencial tal que

$$\vec{v} = \text{grad}(\Phi)$$

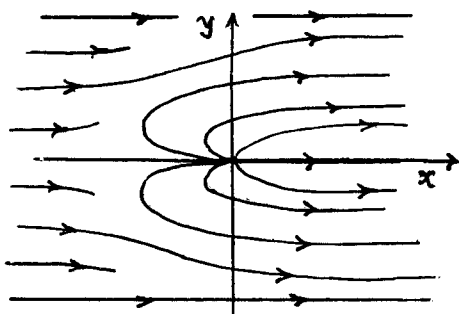
a)  $\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}, Q > 0 \rightarrow \vec{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$



b)  $\Phi = u_0 x = u_0 r \cos \theta \rightarrow \vec{v} = u_0 \cos \theta \hat{r} - u_0 \sin \theta \hat{\theta}$



Puedo superponer estas dos fuentes, en un sistema cilíndrico de coordenadas, donde tenemos traslación en  $\hat{z}$



$$\Phi = u_0 r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi r}$$

$$\vec{v} = \left[ u_0 \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2} \right] \hat{r} - [u_0 \sin \theta] \hat{\theta}$$

Podemos evaluar la presión con Bernoulli

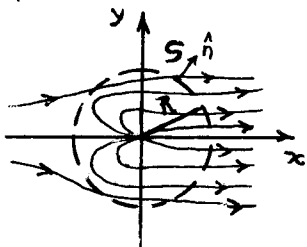
$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} v_\infty^2$$

Es obvio que con  $r \rightarrow \infty \quad \vec{v} = u_0 \cos \theta \hat{r} - u_0 \sin \theta \hat{\theta} \rightarrow |\vec{v}_\infty|^2 = u_0^2$

$$p - p_\infty = \rho \frac{1}{2} \left( u_0^2 - u_0^2 - u_0 \cos \theta \frac{Q}{2\pi r^2} - \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4} \right)$$

$$p - p_\infty = -\rho \frac{1}{2} \left[ \frac{u_0 \cos \theta Q}{2\pi r^2} + \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4} \right]$$

Podemos calcular con la expresión para  $p$  la fuerza sobre una superficie cilíndrica (por unidad de altura) situada en el origen y de radio  $r=R$



$$\vec{F}_{\text{Lia. CILINDRO}} = - \int_S p \hat{n} \cdot dS \quad (1)$$

$$\hat{n} = \hat{r} = \hat{x} \cdot \cos \theta + \hat{y} \cdot \sin \theta$$

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \hat{x} \cdot p \cdot r \cdot d\theta - \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \hat{y} \cdot p \cdot r \cdot d\theta$$

$$F_x = \left( + \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \frac{u_0 \cos^2 \theta Q r}{2\pi r^2} + \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \frac{Q^2 \cos \theta \cdot r}{16\pi^2 r^3} \cdot d\theta \right) \hat{x}$$

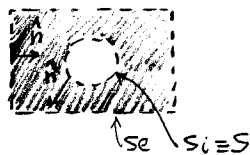
$$\frac{\rho Q u_0 \pi}{4\pi R} \rightarrow$$

$$F_x = \frac{1}{4} \rho u_0 Q$$

En (1) consideramos flujo estacionario y fluido ideal.

$$0 = 0 - \int_{S_e} p \hat{n} \cdot dS - \int_{S_i} p \hat{n} \cdot dS$$

$$F_{\text{Lia. CILINDRO}} = - \int_S p \hat{n} \cdot dS$$



Aquí NO hemos ajustado  $Q$  para que no presente un cilindro inmerso en el flujo, pero se puede hacer (en principio) poniendo  $v_r(r=R, \theta) = 0$ . Esto se procede a hacer en la hoja siguiente. Allí se ve que la fuerza sobre el cilindro es 0 a menos de que exista alguna circulación.



● Flujos incompresibles e irrotacionales en 2D

Sea un fluido:

■ incompresible

→  $\text{div}(\vec{v}) = 0$

Luego, como  $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$  puedo definir:

$\vec{v} \equiv \text{rot}(\vec{A})$

Como el flujo es 2D

$\vec{A} = (0, 0, \Psi(x, y, t))$

$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \Psi \end{vmatrix} = (\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi, 0)$

■ irrotacional

→  $\text{rot}(\vec{v}) = 0$

Luego, como  $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$  puedo definir:

$\vec{v} \equiv \text{grad}(\Phi)$

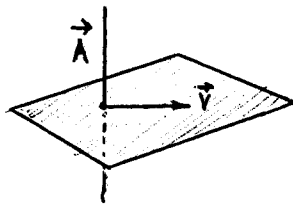
Como el flujo es 2D

$\Phi = \Phi(x, y, t)$

$\vec{v} = (\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, 0)$

$\Phi \equiv$  Potencial de velocidades

$\Psi \equiv$  función corriente



Pero este flujo será (quiero que sea) irrotacional:

$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_y \Psi & -\partial_x \Psi & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\text{rot}(\vec{v}) = (0, 0, -\partial_x^2 \Psi - \partial_y^2 \Psi) = 0$

⇒  $-\nabla^2 \Psi = 0$

∴  $\nabla^2 \Psi = 0$      $-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$

Pero este flujo será (quiero que sea) incompresible:

$\text{div}(\vec{v}) = \partial_x^2 \Phi + \partial_y^2 \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$

∴  $\nabla^2 \Phi = 0$

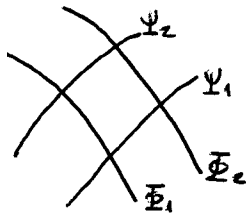
$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

Por otro lado puede verse que:

$\text{grad}(\Psi) \cdot \text{grad}(\Phi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

$\text{grad}(\Psi) \cdot \text{grad}(\Phi) = -v_y \cdot v_x + v_x \cdot v_y = 0$

de modo que las superficies equipotenciales de ambas funciones son perpendiculares entre sí, con lo cual pueden servir como base de un sistema de coordenadas.



Las funciones  $\Psi, \Phi$  son además ARMÓNICAS, pues

$\nabla^2 \Psi = 0$  ,  $\nabla^2 \Phi = 0$

$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$  ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$

y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$

$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  [1]

con lo cual pueden asociarse a una función de variable compleja

$f(x, y) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y)$

que será, por satisfacerse [1] una función analítica. Entonces toda la teoría de funciones complejas derivables puede usarse para modelar flujos



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

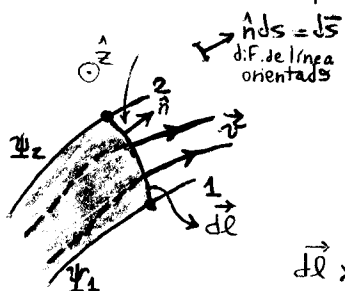


2D. Una función analítica tiene derivadas en cualquier dirección del plano  $\mathbb{C}$ .

La utilización de flujos provenientes de un potencial  $(\Phi, \Psi)$  permite simplificar los problemas por las ventajas de la linealidad: superponiendo fuentes y sumideros podemos generar flujos complicados. Estas fuentes y sumideros vienen a ser, analogía mediante, las cargas puntuales de la electrostática.

• Utilidad de la función corriente. Caudal y líneas de corriente

Sea evaluar el flujo por unidad de altura entre dos equipotenciales



$$Q = \rho \int_1^2 \vec{v} \cdot \hat{n} ds$$

, pues el  $dQ = \rho \vec{v} \cdot \hat{n} ds$  (a través de una superficie)

Debe notarse que no es la circulación de  $\vec{v}$  lo que estamos evaluando pues  $\hat{n} ds$  es un diferencial  $\perp$  curva (queremos ver el flujo que atraviesa la línea 1-2)

$$d\vec{l} \times \hat{z} = \hat{n} ds$$

NB

$$d\vec{l} \times \hat{z} = \hat{n} ds = d\vec{s}$$

Será  $d\vec{s} \perp d\vec{l}$

$$\frac{Q}{\rho} = \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) (dy, -dx) = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \Psi_2 - \Psi_1$$

$$\frac{Q}{\rho} = \Psi_2 - \Psi_1$$

Las líneas de  $\Psi$  etc. permiten calcular el caudal (por unidad de altura) fácilmente. Asimismo se ve que:

$$\Psi_0 = \text{líneas de corriente}$$

pues:

$$\text{grad}(\Psi) \cdot \vec{v} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v_y = -v_y v_x + v_x v_y = 0 \rightarrow \Psi_0 \parallel \vec{v}$$

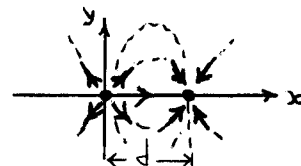
Las líneas de  $\Psi$  constante son las líneas de corriente. Por eso  $\Psi$  se llama función corriente.

• Potencial de un dipolo

Consideremos la fabricación de un dipolo. Sea  $Q > 0$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \quad \text{fuente en } \vec{r}=0$$

$$\Phi = \frac{-Q}{2\pi} \ln|\vec{r}-\vec{d}| \quad \text{sumidero en } \vec{d}$$



$$\Phi_D = -\frac{Q}{2\pi} (\ln|\vec{r}-\vec{d}| - \ln|\vec{r}|) = -\frac{Q \cdot d}{2\pi} \left( \frac{\ln|\vec{r}-\vec{d}| - \ln|\vec{r}|}{d} \right) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{-Q \cdot d}{2\pi} \left( \frac{\ln|\vec{r}-\vec{d}| - \ln|\vec{r}|}{d} \right)$$

$$\Phi_D = -\frac{a}{2\pi} (\text{grad} \ln|\vec{r}| \cdot \vec{d}) = -\frac{a}{2\pi r} (\hat{r} \cdot \vec{d}) = -\frac{a \cdot \vec{d} \cdot \hat{r}}{2\pi r^2} = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2}, \text{ con lo cual}$$

$$\Phi_D = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2}$$

En coordenadas polares y con  $\hat{d} = \hat{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

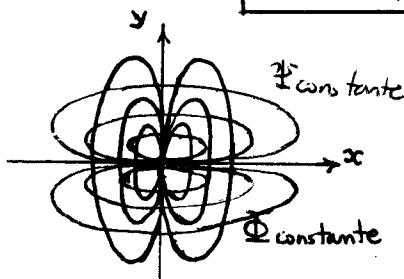
$$\Phi_D = -\frac{a \cos \theta}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow V = \left( \frac{a \cos \theta}{2\pi r^2}, \frac{a \sin \theta}{2\pi r^2} \right) = (v_r, v_\theta)$$

y se ve que:

$$\Psi_D = \frac{a \sin \theta}{2\pi r}$$

$$V = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)$$



• Potencial de un vórtice

Un vórtice se puede obtener desde:

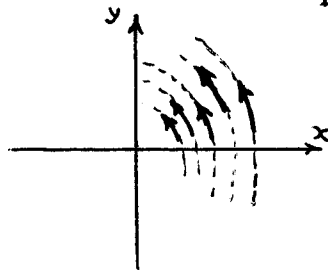
$$\Phi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta \Rightarrow \vec{V} = \left( 0, \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \right), \Gamma_0 > 0$$

donde la dirección es CCW; para obtener un vórtice CW usaremos

$$\Phi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta$$

Calculando la circulación en torno a una circunferencia centrada en el origen:

$$\Gamma = \oint_{C_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma_0}{2\pi r} r d\theta = \Gamma_0$$

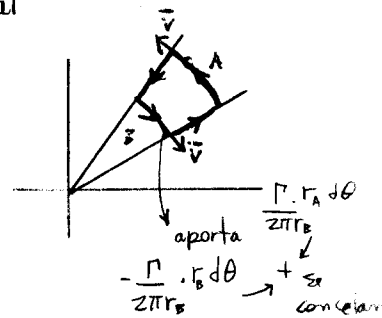


si la curva es genérica y además cumple no englobar al origen, se tiene que:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0, \gamma \text{ no rodea al origen}$$

La idea es que se compensan los aportes en 'A' con los de 'B' y tienen signos opuestos.

El filete vorticoso en el origen es el que provee la circulación cuando la curva lo encierra, de lo contrario es nula la  $\Gamma$ .



• Modelado de cilindro en flujo uniforme

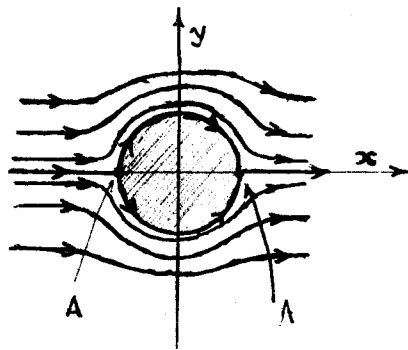
Consideremos la superposición de un flujo uniforme en  $\hat{x}$  y un dipolo orientado en  $\hat{x}$ , los cuales simularán un cilindro inmerso en un flujo uniforme si ajustamos el parámetro 'a'.

$$\Phi = U_0 r \cos \theta - \frac{a \cos \theta}{2\pi r}$$

Pediremos  $V_r(r=R, \theta) = 0$ ; es decir velocidad nula en los bordes (la perpendicular);

$$V = \left( U_0 \cos \theta + \frac{a \cos \theta}{2\pi r^2}, -U_0 \sin \theta + \frac{a \sin \theta}{2\pi r^2} \right)$$

$$0 = U_0 \cos \theta + \frac{a \cos \theta}{2\pi R^2} \rightarrow a = -2\pi R^2 U_0$$



$$\Phi = U_0 r \cos \theta + \frac{2\pi R^2 U_0 \cos \theta}{2\pi r} = U_0 \cos \theta r \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) = \Phi$$

$$\vec{V} = \left( U_0 \cos \theta - \frac{R^2 U_0 \cos \theta}{r^2}, -U_0 \sin \theta - \frac{R^2 U_0 \sin \theta}{r^2} \right)$$

$$\vec{V} = \left[ U_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right), -U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \right]$$

Se puede ver que en  $r=R$  es  $V_r = 0$  y  $V_\theta = -U_0 \sin \theta 2$ , entonces para  $r=R, \theta = 0, \pi$  existen puntos de velocidad nula, llamados puntos de estancamiento ('A' en la figura).



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml.



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20

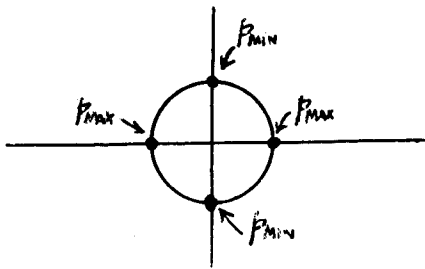


Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



La presión será:

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho \left( V_{\infty}^2 - [V_r^2 + V_{\theta}^2] \right)$$



$$\left( U_0^2 - U_0^2 \cos^2 \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)^2 - U_0^2 \sin^2 \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)^2 \right)$$

$$\left( U_0^2 - U_0^2 - U_0^2 \cos^2 \theta \frac{R^4}{r^4} - U_0^2 \sin^2 \theta \frac{R^4}{r^4} + 2U_0^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$p = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left( 2 \cos(2\theta) U_0^2 \frac{R^2}{r^2} - U_0^2 \frac{R^4}{r^4} \right)$$

$$p = p_{\infty} + \frac{U_0 \rho}{2} \left[ 2 \cos(2\theta) - \frac{R^2}{r^2} \right] \frac{R^2}{r^2}$$

Si le añadimos una circulación al potencial varará la  $V_{\theta}$

$$\Phi = U_0 r \cos \theta + \frac{R^2 U_0}{r} \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = U_0 \cos \theta \cdot r \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

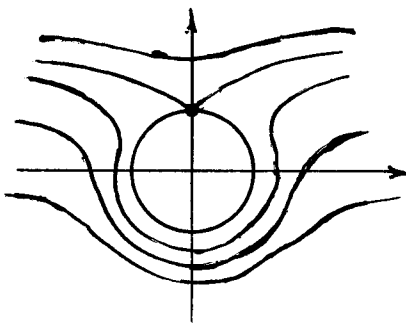
$$\vec{V} = \begin{cases} V_r = U_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ V_{\theta} = -U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Esto debería cambiar el punto de estancamiento

$$V_{\theta}(r=R) = -U_0 \sin \theta \cdot 2 + \frac{\Gamma}{2\pi R} \rightarrow \sin \theta_e = \frac{\Gamma}{4\pi R U_0}$$

$$\theta_e = \arcsin \left( \frac{\Gamma}{4\pi R U_0} \right)$$

Para que exista estancamiento sobre el cilindro  $\left| \frac{\Gamma}{4\pi R U_0} \right| \leq 1$ . El caso límite será  $\Gamma = 4\pi R U_0$  lo que lleva a  $\theta_e = \pi/2$ .



Si el punto de estancamiento se hallase fuera del cilindro; es decir que:

$$\left| \frac{\Gamma}{4\pi R U_0} \right| > 1$$

aún sería con  $\theta_e = \pm \pi/2$  puesto que anula  $V_r$ . En ese supuesto tenemos un  $r_e > R$  dado por:

$$V_{\theta} = -U_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r_e^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r_e} = 0, \quad r_e \doteq \text{radio de estancamiento}$$

Si calculamos ahora la presión obtendremos un término extra

$$-\frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 - \frac{8}{\pi r} U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \right]$$

Podemos evaluar el aporte a la fuerza por unidad de longitud del líquido sobre el cilindro con:

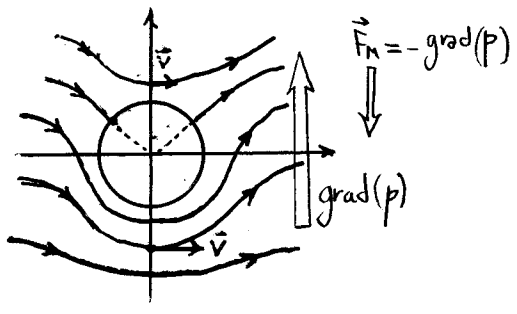
$$\vec{F} = \oint_{\text{borde cilindro}} p \hat{n} dl = \int_0^{2\pi} p (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) R d\theta$$

$$\hat{x}) + \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \cos \theta R d\theta - \frac{\rho U_0 \Gamma}{2 \pi R} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta R d\theta = 0$$

$$\hat{y}) + \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \sin \theta R d\theta - \frac{\rho U_0 \Gamma}{2 \pi R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta R d\theta = -\rho U_0 \Gamma \hat{y} \Rightarrow \vec{F} = -\rho U_0 \Gamma \hat{y}$$

Tendremos una zona de alta velocidad (y baja presión) en la parte inferior en relación a la superior donde la velocidad será menor (y la presión mayor). Esto provocará una fuerza en  $-\hat{y}$  que es la fuerza de Magnus

$$\vec{F}_{MAGNUS} = -\rho U_0 \Gamma \hat{y}$$



**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

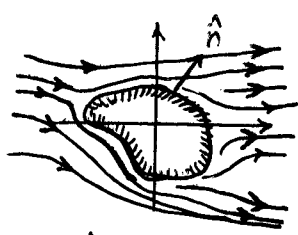
**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

Podríamos considerar un obstáculo arbitrario y hacer un desarrollo multipolar

$$\Phi = \Phi_{cilindro} + O(1/r^2)$$

donde las contribuciones de este obstáculo van como  $1/r^2$  dado que lejos del mismo tienden a desvanecerse siendo que la situación es indistinguible de la de un cilindro.



$$\vec{v} \cdot \hat{n} = 0$$

Para calcular la fuerza del líquido sobre el obstáculo usaremos el Teorema del flujo de la cantidad de movimiento. En un caso estacionario y sin fuerzas externas será:

$$0 = -\oint_S \pi_{ik} n_k dS \Rightarrow$$

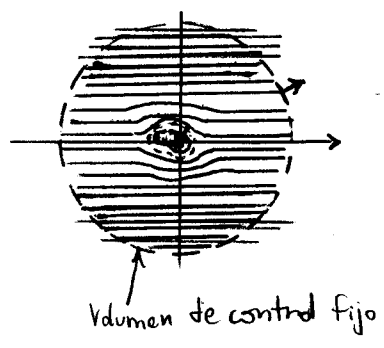
$$0 = \int_{S_{EXTERNA}} \pi_{ik} n_k dS + \int_{S_{obstaculo}} \pi_{ik} n_k dS$$

$$0 = \int_{S_E} [\rho v_i v_k + p \delta_{ik}] n_k dS + \int_{S_{obst.}} \pi_{ik} n_k dS$$

fácil de calcular

$$0 = II + \int_{S_{obst.}} \rho v_i v_k n_k dS + \int_{S_{obst.}} p n_i dS$$

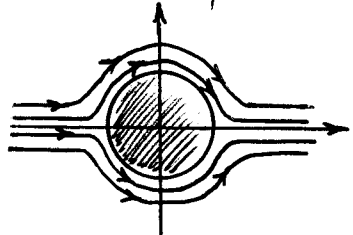
$$-\int_{S_{obst.}} p \hat{n} dS = II \quad \text{fuerza del líquido sobre el obstáculo}$$



Volumen de control fijo

• Observación importante sobre la fuerza sobre el cilindro

Se puede ver que no habrá fuerza neta en el caso del flujo que sobrepasa el cilindro porque:



en  $\hat{y}$  es simétrico  $\rightarrow f_y = 0$

en  $\hat{x}$  no es simétrico pues se invierte la orientación de las líneas de corriente, pero la  $p \propto V^2 \Rightarrow$  no importa un cambio de signo en  $V \Rightarrow f_x = 0$

Por supuesto con una  $\Gamma$  ya se pierde la simetría.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

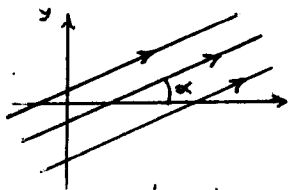
**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatinica

Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

● Potenciales de flujos básicos 2D

- Flujo uniforme en ángulo  $\alpha$  con el eje  $\hat{x}$

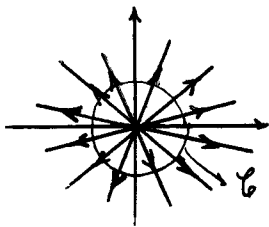


$$\Phi = U_0 \cdot \cos \alpha \cdot x + U_0 \cdot \sin \alpha \cdot y$$

$$\Phi = U_0 \cdot \cos \alpha \cdot r \cdot \cos \theta + U_0 \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot \sin \theta$$

$$\vec{V} = (U_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta + U_0 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta, -U_0 \cos \alpha \sin \theta + U_0 \sin \alpha \cos \theta)$$

- Fuente lineal en el origen



$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \ln(r)$$

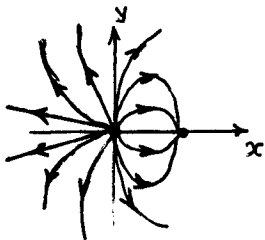
, con un (-) es un sumidero

$$\vec{V} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \hat{r}$$

Esta definición asegura que el caudal por unidad de longitud a través de un círculo en torno al origen será:

$$\oint_C \vec{v} \cdot \hat{n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} \cdot r \cdot d\theta = Q$$

- Dipolo conformado de fuente en el origen y sumidero a distancia  $a$  (en  $\hat{x}$ )



$$\Phi = -\frac{a \cdot \cos \theta}{2\pi \cdot r}$$

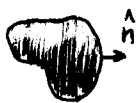
$$\vec{V} = \frac{a \cdot \cos \theta}{2\pi r^2} \hat{r} + \frac{a \cdot \sin \theta}{2\pi r^2} \hat{\theta}$$

● Comentario Potenciales

EL potencial de velocidades  $\Phi$  y la función corriente  $\Psi$  cumplen ecuaciones de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 \Psi = 0$$

con ciertas condiciones de contorno:



$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  La velocidad normal es nula en el contorno (obstáculo impermeable)

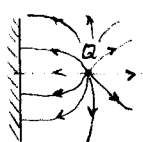
$\Psi|_{\text{sólido}} = \text{cte.}$  (el contorno es línea de corriente) (no deslizamiento)

Pero con sólidos en el dominio la solución no es única: hay que dar  $\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{x}$  en torno a una curva  $C$  que rodee al sólido.

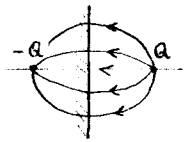
EL hecho de que  $\nabla^2$  sea lineal posibilita que valga superposición y me pueda construir un potencial sumando soluciones elementales.

Por supuesto, serán flujos irrotacionales e incompresibles porque ese fue el punto de partida.

También tenemos una analogía al método de imágenes del EM, pero aquí cambia el contorno

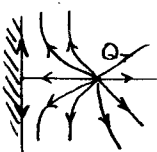


≡

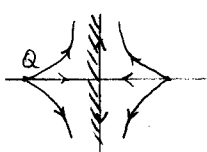


$$\vec{E}_{\text{contorno}} = (E_n, E_t=0)$$

(electromagnetismo)



≡



$$\vec{V}_{\text{contorno}} = (V_n=0, V_t)$$

(fluidodinámica)

## • El Formalismo complejo

Podemos pasar a un formalismo complejo definiendo

$$W(z) \equiv \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y)$$

donde

$$z = x + i \cdot y$$

siendo la función  $W(z)$  el «potencial complejo», una función analítica que cumplirá:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

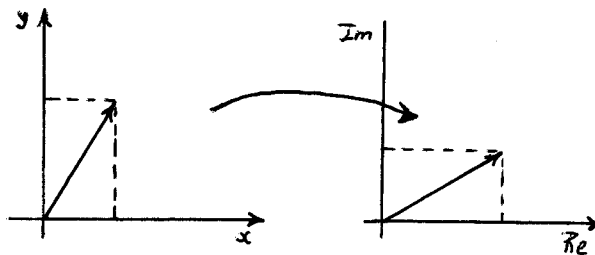
$$\frac{dW}{dz} = V_x + i(-V_y) = V_x - i V_y \equiv V^*$$

donde

$$V \equiv V_x + i \cdot V_y$$

es la velocidad compleja.

Podemos llevar un problema 2D desde el espacio físico (plano xy) hacia el plano complejo.



Evaluando:  $\oint_C V^* dz$

$$\int (V_x - i \cdot V_y)(dx + i \cdot dy) = \int V_x dx + V_y dy + i \int V_x dy - V_y dx$$

$$\oint_C V^* dz = \Gamma + i \cdot Q$$

Los flujos se expresarán de forma de incluir el potencial  $\Phi$ , y la función corriente  $\Psi$

$$W(z) = U_\infty^* z$$

flujo uniforme

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z), \quad Q > 0$$

fuente

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z), \quad \Gamma > 0$$

vórtice horario

$$W(z) = \frac{u_0^*}{2\pi} \frac{1}{z}$$

dipolo (fuente y sumidero)

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

$$(V_x, V_y)(dx, dy) = \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

$$(V_x, V_y)(dy, -dx) = \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica

Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**

A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

Podemos convertir a cartesianas

$$U_\infty^* z = |U_\infty| e^{-i\alpha} (x + iy) = |U_\infty| (\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha)(x + iy)$$

$$U_\infty^* z = |U_\infty| [\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y] + i |U_\infty| [\cos \alpha \cdot y - \sin \alpha \cdot x]$$

$$W(z) = \underbrace{\Phi}_{\text{potencial}} + i \cdot \underbrace{\Psi}_{\text{función corriente}}$$

$$\frac{\mu_0^*}{2\pi} \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mu_0|}{(x^2+y^2)} (\cos \alpha - i \sin \alpha)(x-iy)$$

$$W(z) = \frac{|\mu_0|}{2\pi(x^2+y^2)} [\cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y] + i [\cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot x] \cdot \frac{-|\mu_0|}{2\pi(x^2+y^2)}$$

$$W(z) = \underbrace{\quad}_{\Phi \text{ dipolo}} + i \underbrace{\quad}_{\Psi \text{ dipolo}}$$

Para el ejemplo visto de una corriente uniforme y una fuente se tendría

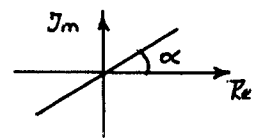
$$W(z) = U_0 z + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{z^*}{|z|^2} = U_0 \left( z + \left( \frac{\mu_0}{2\pi U_0} \right) \frac{z^*}{|z|^2} \right)$$

veamos que si  $|z|^2 = \mu_0/2\pi U_0$  se tiene  $W(z) = U_0 (z + z^*) \in \mathbb{R}$ ; con lo cual  $\Psi = 0$ . Esto determina que  $|z| = \sqrt{\mu_0/2\pi U_0}$  es una línea de corriente.

Los valores de las constantes  $U_0, \mu_0$  generalizan la dirección de los flujos pues

$$U_0^* = |U_0| (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$\mu_0^* = |\mu_0| (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$



Para un flujo uniforme en  $\hat{x}$  es:

$$U_0^* = |U_0| e^{-i0} (x+iy) = |U_0| (x+iy) = \underbrace{|U_0| x}_{\Phi} + i \underbrace{|U_0| y}_{\Psi}$$

y para un dipolo con  $\hat{d} = \hat{x}$  será:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^*}{2\pi} \frac{z^*}{|z|^2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{|\mu_0|}{r} e^{-i0} (x-iy) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mu_0|}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \underbrace{\frac{|\mu_0| \cos \theta}{2\pi r}}_{\Phi} + i \underbrace{\left( \frac{-|\mu_0| \sin \theta}{2\pi r} \right)}_{\Psi} \end{aligned}$$

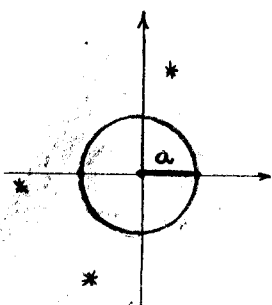
### • Teorema del círculo

Sea un flujo sin singularidades en  $|z| \leq a$ ,  $W_0 = f(z)$  el potencial complejo de este flujo.

$$\Rightarrow W(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

(donde  $\bar{f}(z) = f^*(z)$  y luego tomo  $z = a^2/z$ )

es el potencial complejo de este flujo con  $|z|=a$  como línea de corriente



Un flujo con  $W_0$  sin singularidades en  $|z| \leq a$   
 $\rightarrow W(z)$  es el potencial al poner un cilindro de radio 'a' en el origen.

### • Fuerza sobre un volumen 2D de contorno $\mathcal{C}$

La fuerza por unidad de altura a lo largo de una curva  $\mathcal{C}$  se calcula como:

$$[1] \quad \vec{F} = - \oint_{\mathcal{C}} p \hat{n} ds$$

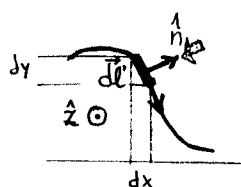
donde  $\hat{n}$  es la normal exterior y  $d\vec{s}$  es un diferencial de curva orientada según la normal.

Se calcula como

$$d\vec{l} \times \hat{z} = \hat{n} ds$$

$$(dx, dy, 0) \times (0, 0, 1) =$$

$$-dx \hat{y} + dy \hat{x} = \hat{n} dl$$



explicativa

[1] es una integral de sup. reducida en una dimensión:

$$\vec{F} = \iint_{\mathcal{C}} p \hat{n} ds dz = -z_0 \int_{\mathcal{C}} p \hat{n} ds$$



Podemos definir una fuerza compleja  $F^*$  dado que:

$$\vec{F} = -\oint_{\mathcal{C}} p (dy \hat{x} - dx \hat{y}) = \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} p dy}_{F_x} \hat{x} + \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} p dx}_{F_y} \hat{y},$$

de manera que:

$$F = \oint p (-dy + i dx) = i \oint p \left( -\frac{dy}{i} + dx \right) = i \oint p (dx + i dy)$$

$$F = -\oint p \cdot dy + i \oint p \cdot dx$$

$$F = F_x + i F_y$$

la fuerza compleja

$$F = i \oint_{\mathcal{C}} p dz$$

$$F = i \oint \left[ cte - \frac{1}{2} \rho v^2 \right] dz$$

$$F = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz$$

$$F = F_x + i F_y = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz$$

Esta es la "fórmula de Blasius" y da la fuerza del fluido sobre un cuerpo inmerso en el mismo de contorno  $\mathcal{C}$ .

● Cuerpo circular en un flujo complejo

Sea un cuerpo circular en un flujo complicado (uniforme + vórtice + fuente + ...)

$$W(z) = u_0 \cdot e^{-i\alpha} z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z) + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

$$\frac{dW}{dz}(z) = u_0 \cdot e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} - \frac{A}{z^2} - \frac{2B}{z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right)$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = u_0^2 e^{-i2\alpha} + \frac{u_0 \cdot e^{-i\alpha} \Gamma}{\pi i z} - \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2u_0 A e^{-i\alpha}\right) \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right) + \dots$$

Lo que aportará significativamente a la integral con  $|z| \gg 1$  será:



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml.



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1.

$$F = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = -\frac{i\rho}{2} \frac{u_0 \cdot e^{-i\alpha} \Gamma}{\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz = -\frac{\rho u_0 \Gamma e^{-i\alpha}}{2\pi} \underbrace{2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right)}_{=1}$$

$$F = -\rho u_0 e^{-i\alpha} \Gamma \cdot i \cdot 1$$

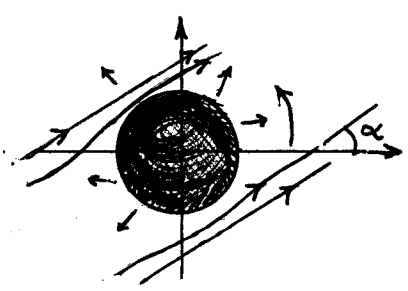
Sea el caso especial  $\alpha = 0$ ,

$$F = F_x + i F_y = -i \rho u_0 \Gamma \Rightarrow$$

$$F_y = -\rho u_0 \Gamma$$

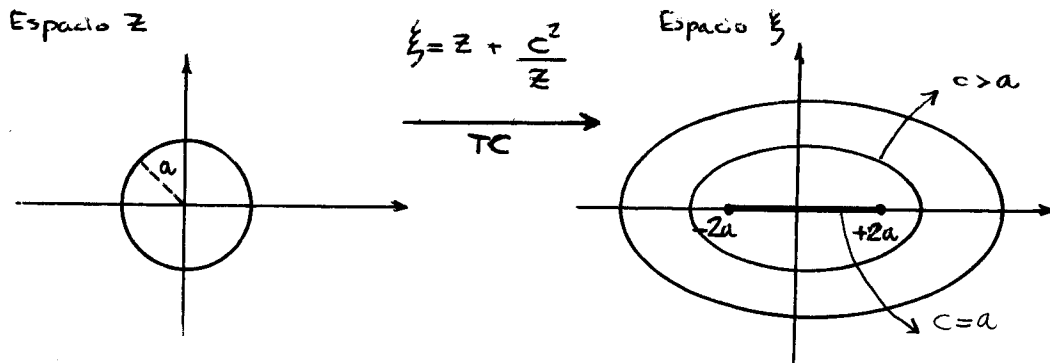
el resultado de Magnus

Lejos del cuerpo la fuerza es la de Magnus



## ● Perfil de ala de avión

Conociendo la solución de un flujo que ataca un cilindro podemos (con una transformación conforme) pasar a un perfil de ala.



El flujo pasando un cilindro lo obtenemos a partir del teorema del círculo con

$$W_0 = U_0 e^{-i\alpha} z \quad \text{uniforme sin sing. en } |z| \leq a$$

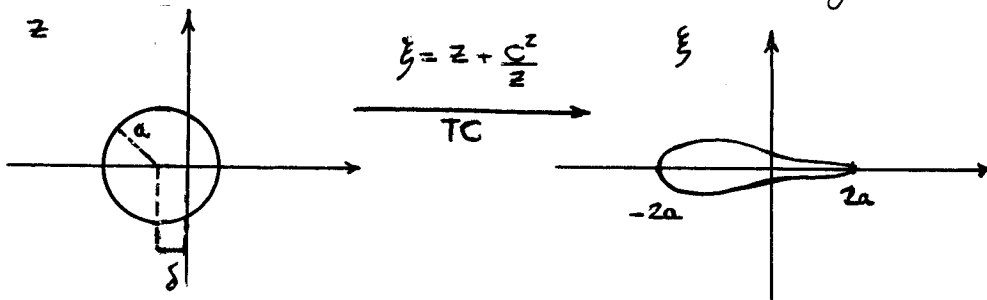
$$W(z) = U_0 e^{-i\alpha} z + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{z}$$

para un flujo con un cilindro de radio  $r=a$

Luego le sumamos una circulación (vórtice)

$$W(z) = U_0 e^{-i\alpha} z + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

Dependiendo del valor de 'a' el círculo va a elipses o a una recta ( $c=a$ ). Con un círculo desplazado la simetría se rompe y obtenemos formas de gota



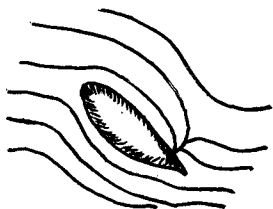
Luego

$$W(z) = U_0 e^{-i\alpha} (z+\delta) + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{z+\delta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z+\delta) \quad (\text{Hemos desplazado el círculo})$$

Entonces hay que convertir  $z \rightarrow \xi$  con lo cual  $W(z) \rightarrow W(\xi)$  de manera que:

$$\frac{dW(\xi)}{d\xi} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\xi} = \frac{dW/dz}{d\xi/dz} = \frac{dW/dz}{[1 - c^2/z^2]}$$

pero en la práctica surge un problema: experimentalmente se ve que hay un punto de estancamiento y para que sea estable debe caer en el borde de fuga.



Para que esto suceda anularemos el numerador pues necesito  $\vec{V}(z=a-\delta)$  nula. Entonces:

$$\frac{dW}{dz} = U_0 e^{-i\alpha} - U_0 e^{i\alpha} a^2 (z+\delta)^{-2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z+\delta}$$

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=a-\delta} = U_0 e^{-i\alpha} (z+\delta)^2 - U_0 e^{i\alpha} a^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi} (z+\delta) \Big|_{z=a-\delta} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} = U_0 \left[ e^{-i\alpha} (z+\delta) - e^{i\alpha} \frac{a^2}{(z+\delta)} \right]$$

Como el estancamiento cae en  $z = a - \delta (\in \mathbb{R})$ , se tiene:

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} = U_0 [e^{-i\alpha} \cdot a - e^{i\alpha} \cdot a]$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi U_0 a \cdot 2i \sin(\alpha)$$

$$\Gamma = -4\pi U_0 a \sin(\alpha)$$

$\Gamma < 0 \Rightarrow$  Vórtice CW

$$\Gamma = -4\pi U_0 a \sin(\alpha)$$

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica

Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibioterapia  
www.bago.com.ar

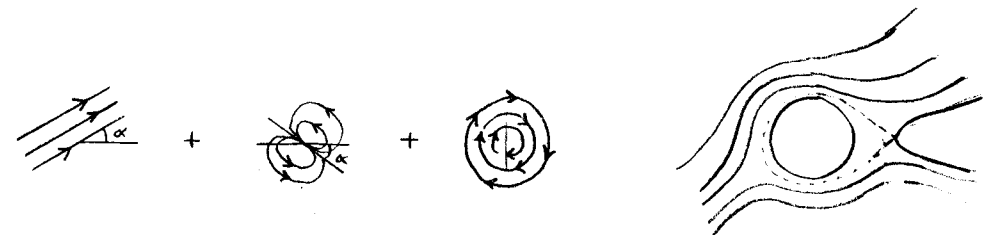
Metiendo esto en el teorema de Blasius se ve que:

$$F_{sust} = \rho \pi U_0^2 4a \sin(\alpha) \hat{y}$$

Esta teoría de sustentación funciona si el ángulo  $\alpha$  es suficientemente grande.

Al despegar el avión se generan vórtices cerca de la punta del ala por la viscosidad. Estos vórtices se desprenden y dejan una circulación tal que el punto de fuga es el de estancamiento.

El resto del fluido será irrotacional porque se partió del reposo; la circulación que dejan los vórtices es la necesaria para que haya sustentación.



• Teorema del círculo (desplazado)

El teorema del círculo puede generalizarse para un círculo desplazado

$$W(z) = U_0 e^{-i\alpha} z + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{z + \delta}$$

sería el potencial de un flujo uniforme con  $|z + \delta| = a$  como línea de corriente. Difiere del potencial que hemos desplazado ulteriormente a  $z + \delta$  en una constante  $(U_0 e^{-i\alpha} \delta)$  que no modifica la velocidad.

$$W(z) = U_0 e^{-i\alpha} z + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{|z + \delta|^2} (z^* + \delta)$$

$$= U_0 e^{-i\alpha} |z| e^{i\beta} + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{|z + \delta|^2} |z| e^{-i\beta} + U_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{|z + \delta|^2} \delta$$

$$W(|z + \delta| = a) = U_0 e^{i(\beta - \alpha)} |z| + U_0 e^{-i(\beta - \alpha)} |z| + U_0 \delta e^{i\alpha}$$

$$W(|z + \delta| = a) = \underbrace{U_0 |z| 2 \cos(\beta - \alpha)}_{\Phi} + \underbrace{U_0 \delta \cos(\alpha) + i U_0 \delta \sin(\alpha)}_{+ i \Psi}$$

Luego, como  $\Psi$  es una constante, se sigue que  $|z + \delta| = a$  es una línea de corriente.

## ● Flujos viscosos

El modelo, basado en el de Newton, considera relación lineal entre los tensores de esfuerzos y de deformación:

$$\text{Corrección tensor de esfuerzos } \rightarrow \sigma'_{ij} = A_{ijmn} \epsilon_{mn} \leftarrow \text{tensor de deformación} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

con  $A_{ijmn}$  de cuarto rango isotrópico. Luego, la corrección a un fluido ideal será:

$$\sigma'_{ij} = [\mu \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu' \delta_{in} \delta_{jm} + \mu'' \delta_{im} \delta_{jn}] \epsilon_{mn}$$

Dado que  $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$  se sigue que  $\mu' = \mu''$ , entonces

$$\sigma'_{ij} = \mu \delta_{ij} \epsilon_{mm} + 2\mu' \epsilon_{ij}$$

con lo cual

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \delta_{ij} \cdot \text{div}(\vec{v}) + 2\mu' \epsilon_{ij}$$

puesto que:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \epsilon_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \rightarrow \epsilon_{ii} = \text{div}(\vec{v})$$

Pediremos que el término  $\sigma'_{ij}$  haga contribución nula a la presión normal media  $\rightarrow$

$$\sigma'_{ii} = 0 = 3\mu \text{div}(\vec{v}) + 2\mu' \cdot \text{div}(\vec{v}) \rightarrow \mu = -\frac{2}{3}\mu'$$

y cambiando  $\mu'$  por  $\mu$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \frac{2\mu}{3} \delta_{ij} \cdot \text{div}(\vec{v})$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left[ \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \text{div}(\vec{v}) \cdot \delta_{ij} \right]$$

Entonces metiendo el nuevo  $\sigma_{ij}$  en las ecuaciones de Euler y considerando  $\mu$  constante,

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \left[ \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \text{div}(\vec{v})}{\partial x_j} \right]$$

Operando en el corchete se tiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad}(p) + \mu \left[ \text{div}(\text{grad}[\vec{v}]) + \frac{1}{3} \text{grad}\{\text{div}(\vec{v})\} \right]$$

$\text{Lapl}(\vec{v}) = \nabla^2 \vec{v}$

Si la  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  (fluidos incompresible) se tiene:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

← Navier-Stokes de fluidos incompresible

Se suele usar la viscosidad cinemática ' $\nu$ ' definida como:

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \cdot \nabla^2 \vec{v} \oplus \text{div}(\vec{v}) = 0$$

La viscosidad produce una difusión de la velocidad (disipativo)

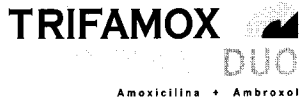
4 ecuaciones escalares para hallar  $\vec{v}, p$  en función de  $\vec{x}, t$ . A veces se usa  $p = p(\rho)$  (Estado)



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



Podemos evaluar la potencia recordando de la mecánica que

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot m \vec{a} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\tilde{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_V v_i F_i dV + \int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS \quad \frac{d\tilde{E}}{dt} = \int_V \frac{d\tilde{E}}{dt} dV$$

$$= \int_V v_i F_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ v_i \left[ F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right\} dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_V v_i \left[ F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[ e_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] dV$$

$$2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu e_{ij} e_{ij}, \text{ pues}$$

$$e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$+ 2\mu e_{ij} e_{ij} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$+ 2\mu e_{ij} e_{ij} - \frac{2\mu}{3} [\text{div}(\vec{v})]^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ v_i \left[ F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] - p \cdot \text{div}(\vec{v}) + 2\mu \left( e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} [\text{div}(\vec{v})]^2 \right) \right\} dV$$

El término en rojo es definido positivo ( $\geq 0$ ) y corresponde a energía mecánica disipada en forma de calor. En un fluido incompresible será:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ v_i \left[ \frac{d v_i}{dt} \rho \right] + 2\mu (e_{ij} e_{ij}) \right\} dV$$

● EJEMPLO: flujo viscoso 1D (planteo)

Sea un flujo 1D  $\vec{v} = (U(y,z,t), 0, 0)$  con  $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = 0$  (término convectivo nulo)  
Entonces:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

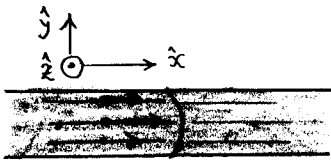
de lo cual deducimos  $p = p(x, t)$  pero como  $U = U(y, z, t) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = G(t)$  con lo cual:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} G(t) + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right),$$

siendo el estacionario:

$$\frac{G(t_0)}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

Ecuación de difusión



En el caso estacionario debemos entregar energía para mantener el flujo por lo que se va en calor debido a la disipación de la viscosidad. El borde del caño hace esfuerzos tangenciales

● Adimensionalización

La adimensionalización requiere hallar valores característicos del sistema ( $a, v_0$ )

$$\left[ \frac{x}{a} = \tilde{x} \right] \quad \left[ \frac{v}{v_0} = \tilde{v} \right] \quad \left[ \frac{a}{v_0} = \tau \right], \quad \left[ \frac{t}{\tau} = \tilde{t} \right] \quad \text{donde } \tau \text{ es el tiempo en atravesar 'a' a la velocidad 'v_0'}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Se quiere comparar el término convectivo con el de difusión definiendo:  $Re \equiv \frac{v_0 \cdot a}{\nu}$

$$\frac{v_0}{\tau} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{v_0^2}{a} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\nu v_0}{a^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}$$

$\frac{v_0}{a} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{1}{\rho v_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\nu}{v_0 a} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}$

multiplicamos ambos miembros por  $\frac{a}{v_0^2}$

Però podemos definir  $p = \rho v_0^2 \tilde{p} \rightarrow -\frac{1}{\rho v_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i}$

Entonces el  $Re$  indica la magnitud relativa entre el término convectivo sobre el difusivo

$Re$  chico  $\Rightarrow \nu$  grande

$Re$  grande  $\Rightarrow \nu$  chica

Muchos problemas pueden resolverse escalando la ecuación y el modelo físico. En este último caso si al modificar la escala siguen valiendo las mismas ecuaciones  $\Rightarrow$  el problema es REESCALABLE.

EL número de Reynolds es un parámetro intrínseco del problema.

Si tenemos  $\vec{f}$  (fuerzas por unidad de masa) se puede adimensionalizar con:

$$\vec{f} = f \hat{f} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \left[ \frac{af}{v_0^2} \right] \hat{f} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \left[ \frac{\nu}{a \cdot v_0} \right] \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}$$

$\uparrow \frac{1}{F_r^2} \quad \quad \quad \uparrow \frac{1}{Re}$

tuvimos en cuenta la multiplicación  $\frac{a}{v_0^2}$

En los números  $Re, Fr$  no aparece el  $\tau$  explícitamente

donde resultan dos números adimensionales:

$$Fr \equiv \frac{V_0}{\sqrt{a \cdot f}}$$

$$Re \equiv \frac{a V_0}{\nu}$$

donde  $f = g$  usualmente (la aceleración de la gravedad).

Luego, todos los sistemas físicos con iguales valores de  $Re$  y  $Fr$  se comportarán de igual forma porque su solución de Navier Stokes es la misma.

Volviendo al número de Reynolds:

$$\bullet \frac{|\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}|}{|\mu \nabla^2 \vec{v}|} = \frac{\rho V_0^2 / a}{\mu V_0 / a^2} = \frac{\rho V_0 a}{\mu} = \frac{a V_0}{\nu} \equiv Re$$

donde  $\frac{|\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}|}{|\mu \nabla^2 \vec{v}|} \approx \frac{\text{fuerzas inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$

$Re$  { chico  $\longrightarrow$  regimen viscoso  
grande  $\longrightarrow$  regimen turbulento

$Re > 9000$  turbulento  
 $Re < 2000$  viscoso

Para el número de Froude tenemos

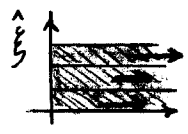
$$\bullet \frac{|\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}|}{|\rho f|} = \frac{\rho V_0^2 / a}{\rho f} = \frac{V_0^2}{a f} \equiv Fr^2$$

$\uparrow$  fuerzas en volumen

• Flujo laminar

flujo laminar es un modelo sencillo de flujo viscoso 1D, pues consideramos

$$\vec{V} = v(\xi) \hat{\alpha}$$



$\xi$  coordenada  $\perp \vec{v}$   
 $\alpha$  coordenada  $\parallel \vec{v}$

donde cada capa o lámina en  $\xi$  se mueve con una cierta velocidad. Caso tradicional es una placa que comienza a moverse y arrastra, gradualmente a las subsiguientes. Aparece una fuerza visca por



Por supuesto no se puede asegurar, en general, que el flujo sea estable y que las capas de fluidos no se mezclen.

La condición para que un problema sea razonablemente resoluble es

flujo laminar  $\oplus Re$  chico  $\longrightarrow$  solución cerrada ( $\sim$ )

En este caso Navier-Stokes se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

donde  $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \Rightarrow 0$  pues  $Re$  es chico ("tiró la convección"). Desde el punto de vista de la resolución de problemas el  $\text{grad}(p)$  está dado por un agente externo (una bomba por ejemplo) que empuja al fluido.

**TRIFAMOXIBL**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

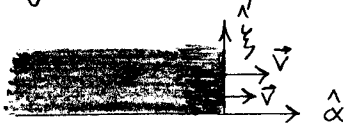
Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatinica

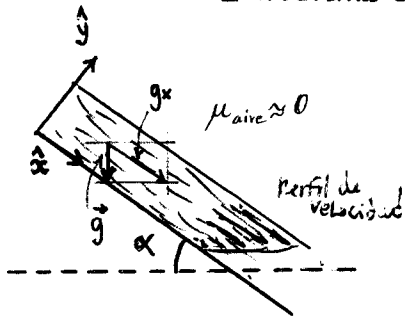
Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

Hay que destacar que si el fluido se mueve uniformemente en  $\hat{\alpha}$  no se considera que exista un gradiente de presión; pero sí existe gradiente de presión en  $\hat{\xi}$



■ Problema de ejemplo



flujo newtoniano, incompresible, Re chico, estacionario

no hay bombas  $\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$   $\rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$   $\rightarrow (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$  lo tiro  $\rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$   
 $\rightarrow$  laminar

$\vec{v} = V(y) \hat{\alpha}$   
 se puede deducir que  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  aunque  $\frac{\partial p}{\partial y} \neq 0$ .

$$0 = g \cdot \text{sen} \alpha + \nu \cdot \frac{d^2 v}{dy^2} \quad \text{Navier-Stokes en } \hat{x}$$

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{dv}{dy} \right) = -\frac{g}{\nu} \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{g}{\nu} (\text{sen} \alpha) y + C_1$$

$$v = -\frac{g}{2\nu} \cdot \text{sen} \alpha \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

■ CONTOORNOS

•  $v(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

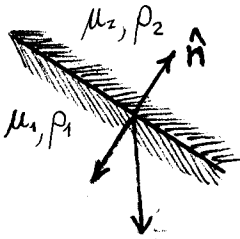
• interfase líquido - aire

$$\mu \left. \frac{\partial v(y)}{\partial y} \right|_{y=h} = -g \mu \text{sen} \alpha \cdot h + C_1 \mu = 0$$

$$\Rightarrow v = -\frac{g \cdot \text{sen} \alpha \cdot y}{\nu} \left( \frac{y}{2} - h \right)$$

■ Condiciones de contorno

Hay que mirar los esfuerzos de corte en las interfaces. Estos serán continuos puesto que de lo contrario existiría una aceleración en la misma.



$$\vec{dF} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$dF_i = -p \delta_{ij} n_j + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) n_j$$

En un fluido newtoniano es  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  con lo cual resulta:

$$dF_i = -p \delta_{ij} n_j + 2\mu e_{ij} n_j$$

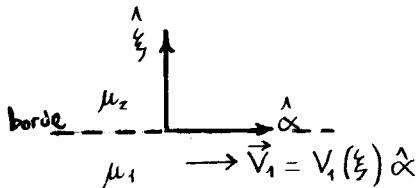
Los esfuerzos tangenciales serán

$$dF_i^{\dagger} = 2\mu e_{ij} n_j$$

y como en un fluido laminar podemos escribir:  $\vec{v} = V(\xi) \hat{\alpha}$ , resulta

$$2\mu e_{ij} n_j = 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial V \hat{\alpha}}{\partial X \hat{\xi}} \hat{\xi} \Rightarrow$$

La igualdad de los esfuerzos será:



$$\mu_2 \left. \frac{\partial V_2 \hat{\alpha}}{\partial X \hat{\xi}} \right|_{\text{borde}} = \mu_1 \left. \frac{\partial V_1 \hat{\alpha}}{\partial X \hat{\xi}} \right|_{\text{borde}}$$



■ Análisis dimensional. Comentarios

La idea es que las ecuaciones de la física valen en cualquier sistema de unidades. En el siguiente experimento se propuso para la presión

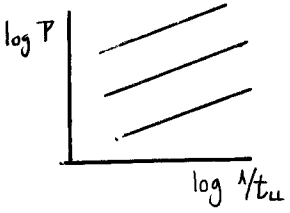
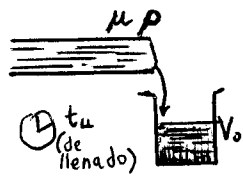
$$P = f(t_u, V_o, \mu, \rho)$$

donde experimentalmente obtenran rectas diferentes según la sustancia. Había cuatro parámetros implicando tres magnitudes fundamentales.

Según teorema  $\Pi$ , P adimensionalizada sería función solamente de UN único número adimensional.

$$\Pi_1 = \dots$$

$$\Pi_2 = f(\Pi_1), \text{ donde } \Pi_2 \text{ sería P adimensionalizado}$$



$$\Pi_1 = t_u^a V_o^b \mu^c \rho^d$$

$$L^0 M^0 T^0 = T^a L^{3b} L^{-c} M^c T^{-c} M^d L^{-3d}$$

$$\begin{cases} 0 = a - c \\ 0 = 3b - c - 3d \\ 0 = c + d \end{cases}$$

, donde tomamos  $d = 1$

$$\begin{aligned} c &= -1 \\ 0 &= 3b + 1 - 3 \rightarrow b = 2/3 \\ 0 &= a + 1 \rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = t_u^{-1} V_o^{2/3} \mu^{-1} \rho = \frac{\rho V_o^{2/3}}{t_u \cdot \mu} \text{ dimensional}$$

El segundo número saldrá de:

$$\Pi_2 = P t_u^\alpha V_o^\beta \mu^\gamma = M L^{-1} T^{-2} T^\alpha L^{3\beta} M^\gamma L^{-\gamma} T^{-\gamma}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \gamma & \gamma &= -1 \\ 0 &= -1 + 3\beta - \gamma & \beta &= 0 \\ 0 &= -2 + \alpha - \gamma & \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = P t_u \mu^{-1} = \frac{P t_u}{\mu} = f(\Pi_1) \text{ dimensional}$$

$$[1] \quad P = \frac{\mu}{t_u} f(\Pi_1) \quad \text{con } f(\Pi_1) = f\left(\frac{\rho V_o^{2/3}}{t_u \mu}\right)$$

Lo que es importante aquí es que al hacer un pasaje de unidades no varían las unidades de  $\Pi_1$  porque es adimensional. Esto permite reescalar un dado modelo físico manteniendo la misma ley que lo gobierna.

Así, por ejemplo, si en un sistema la expresión de P es [1] donde tenemos  $\frac{\rho V_o^{2/3}}{t_u \mu} = \Pi_1$  un número sin dimensiones podemos escalar el sistema pasando a unidades diferentes en  $\Pi_1$  (conservando el valor numérico) con lo cual tal vez la experimentación resulte más sencilla en éste nuevo sistema reescalado donde sigue valiendo [1] (la física es la misma).

En segundo lugar si P depende en bloque de  $\Pi_1$  podemos (conservando el valor del mismo) reescalarlo según conveniencia para describir la física dada por [1] en otros sistemas con igual valor de  $\Pi_1$

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX**  
Amoxicilina  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago  
Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago  
Comprimidos x 10

**VIXCEF**  
Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

$$\frac{P}{(\mu/t_u)} = f\left(\frac{\rho V_o^{2/3}}{t_u \mu}\right) \text{ depende de un } * \text{ adimensional}$$

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA  
Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica  
Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

● EJEMPLO: Explosión nuclear

Queremos hacer una estimación del radio del hongo atómico, con un modelo muy sencillo

$$r = f(E, t, \rho_0) \rightarrow$$

	r	E	t	$\rho_0$
L	1	2	0	-3
M	0	1	0	1
T	0	-2	1	0

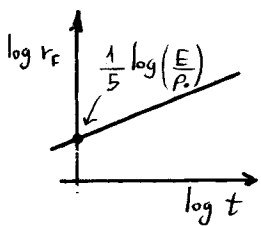
Tenemos  $n=4$  y  $k=3$  lo que nos deja un único número  $\pi$

$$[\pi] = L^1 L^{2a} M^a T^{-2a} T^b L^{-3c} M^c \rightarrow \begin{cases} 0 = 1+5a \\ 0 = a+c \\ 0 = -2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2/5 \\ a = -1/5 \\ c = 1/5 \end{cases}$$

$$\pi_1 = r E^a t^b \rho_0^c$$

$$r = \pi_1 \left( \frac{E t^2}{\rho_0} \right)^{1/5}, \text{ con } \pi_1 \text{ una constante}$$

Si consideramos  $\pi_1 \sim 1$  y consideramos que puede medirse  $r$  en función de  $t$ , entonces será

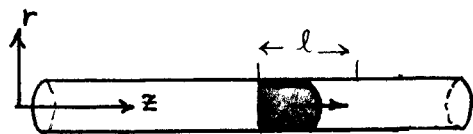


$$r^{5/2} = \frac{E}{\rho_0} t \rightarrow \frac{5}{2} \log(r) = \log\left(\frac{E}{\rho_0}\right) + \log(t)$$

y podemos extraer, estimadamente, el valor de la energía  $E$  de la explosión siendo  $\rho_0$  la densidad del aire

● Flujo de Poiseville

Consideramos un flujo 1D en una zona de un caño donde todo el fluido se ha "enterado" de la viscosidad en la pared. Una 'l' distante de la entrada donde se ha estabilizado la velocidad.



Desde Navier-Stokes general consideramos:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=0 \text{ estacionario}} + \underbrace{\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}}_{=0 \text{ pues } \vec{v} = v(r)\hat{z}} = \underbrace{\vec{F}}_{=0 \text{ no hay fuerzas externas}} - \underbrace{\text{grad}(p)}_{=G(t)} + \underbrace{\mu(\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \text{grad}\{\text{div}\vec{v}\})}_{=0 \text{ por fluido incompresible } \text{div}(\vec{v})=0} \Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z$$

$$G(t) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad \boxed{p = Gz + C} \rightarrow \text{El grad}(p) \text{ provoca el flujo del fluido}$$

$$0 = -G(t) + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{G}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{ no depende de } r \Rightarrow$$

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{Gr^2}{2\mu} + C_1 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{Gr}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \rightarrow v = \frac{Gr^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

Aplicamos condiciones de contorno

● No deslizamiento  $v(r=a) = 0 \rightarrow 0 = \frac{Ga^2}{4\mu} + C_1 \ln a + C_2$   
 $v(r=0) < \infty \rightarrow C_1 = 0$

$$v = \frac{G}{4\mu} (r^2 - a^2) \rightarrow \boxed{v = \frac{|G|(a^2 - r^2)}{4\mu}} \leftarrow \text{Perfil parabólico de velocidad}$$

El caudal por el caño será:

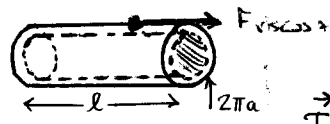
$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G}{4\mu} (r^2 - a^2) r dr d\theta = \frac{G}{4\mu} 2\pi \int_0^a (r^2 - a^2) r dr$$

$$Q = \frac{\pi G}{2\mu} \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^a - \frac{a^2 r^2}{2} \Big|_0^a \right) = \frac{\pi G}{2\mu} \left( \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} \right) = -\frac{\pi G a^4}{8\mu}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi a^4 |G|}{8\mu}}, \text{ con } G < 0 \text{ para que tenga sentido la expresión}$$

RESERVA  
 si  $G > 0 \Rightarrow$  el líquido fluye en  $-\hat{z}$  pues  $p = Gz + C$  tiene la dirección de  $-\text{grad}$  en  $-\hat{z}$

Podemos calcular la fuerza viscosa en un cascarón cilindrico de longitud 'l'



$$\vec{T}_t = \mu \cdot \frac{dv}{dr} \Big|_{r=a} \hat{z}$$

esfuerzo de cizalla en el borde del caño

$$\mu \cdot \frac{dv}{dr} \Big|_{r=a} \cdot 2\pi a \cdot l = \mu \cdot \frac{G}{4\mu^2} \cdot 2\pi a \cdot l = -G a^2 \pi l = F_{viscosa} = a^2 \pi \Delta p$$

El perfil parabólico hace que haya fuerza neta de arrastre (viscosa).



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

Para la disipación de energía tenemos, (con  $\text{div}[\vec{v}] = 0$ ), que:

$$P_{\text{DISIPADA}} = \int_V dv 2\mu e_{ij} e_{ij} \rightarrow \frac{\delta P}{\delta V} = 2\mu e_{ij} e_{ij}$$

$$\frac{\delta P}{\delta V} = \mu \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 = \frac{G^2 r^2}{4\mu^2} = \frac{G^2 r^2}{4\mu}$$

$$P_{\text{disip}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^l r d\theta dr dz \frac{G^2 r^2}{4\mu} = \pi l \frac{r^4 G^2}{4 \cdot 2\mu} \Big|_0^a = \frac{\pi l G^2 a^4}{8\mu}$$

$$\Rightarrow P_{\text{disipada}} = \frac{\pi l G^2 a^4}{8\mu}$$

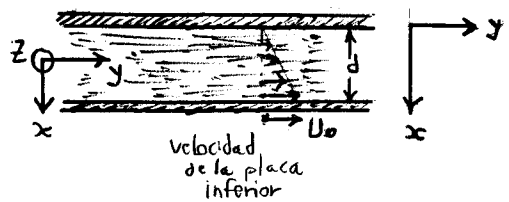


Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10

● Líquido viscoso entre placas



$$\vec{v} = v(x) \hat{y}$$

Considero el caso estacionario

$$0 = + G(t) + \mu \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{G}{\mu}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{G}{\mu} x + C_1$$

$$v = -\frac{G}{\mu} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} x=0 & \vec{v}=0 \\ x=d & \vec{v}=U_0 \hat{y} \end{cases} \quad (\text{condiciones})$$

$$v = -\frac{G}{2\mu} x^2 + \frac{Gd}{2\mu} x + \frac{U_0}{d} x$$

$$C_2 = 0$$

$$U_0 = -\frac{Gd^2}{2\mu} + C_1 d$$

$$v = \frac{G}{2\mu} x(d-x) + \frac{U_0}{d} x$$

Perfil de velocidad lineal



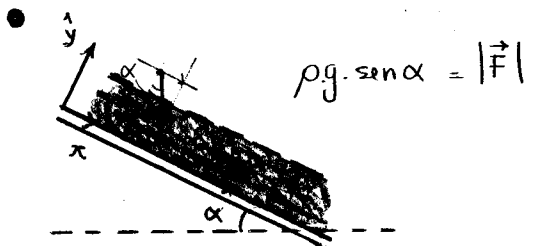
Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



$$\rho g \cdot \text{sen } \alpha = |\vec{F}|$$

En lugar de considerar un gradiente, piense en una fuerza volumétrica dada por la gravedad en la dirección del movimiento.

$$\dots = \vec{F} - \underbrace{\text{grad}(p)}_{=0} + \dots$$



$$-\frac{G}{\mu} y^2 + \frac{Gh}{\mu} y + U_0$$

$$\begin{cases} y=0, & \vec{v} = U_0 \hat{x} \\ y=h, & \mu \cdot \frac{dv}{dy} \Big|_{y=h} = 0 \end{cases}$$

$$C_2 = U_0 \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{Gy}{\mu} \Big|_h + C_1 \Big|_h = 0 \rightarrow C_1 = \frac{Gh}{\mu}$$

$$v = -\frac{G}{2\mu} y \left( \frac{y}{2} - h \right) + U_0$$

otro perfil de velocidad lineal

Este segundo caso es ligeramente diferente porque los contornos son diferentes. El caudal por unidad de longitud en  $\hat{z}$  será

$$Q = \int_0^h \vec{v} \cdot \hat{n} dl = \int_0^h dy \left[ U_0 - \frac{Gy}{\mu} \left( \frac{y}{2} - h \right) \right] = \int_0^h dy \left( U_0 - \frac{Gy^2}{2\mu} + \frac{Gyh}{\mu} \right)$$

$$Q = U_0 \cdot h - \frac{Gh^3}{6\mu} + \frac{Gh^2}{2\mu} = \boxed{U_0 \cdot h + \frac{Gh^3}{3\mu} = Q}$$

● Flujos 1D no estacionarios. Solución de Green.

Conducirán a ecuaciones de difusión.

Sea  $\vec{V} = (V(y,z,t), 0, 0) \rightarrow$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{\rho V \frac{\partial V}{\partial x}}_{=0} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = - \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Sea que  $\frac{\partial p}{\partial x} \equiv G = 0 \rightarrow$   
(no hay gradientes de presión)

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)} \quad [1] \quad \leftarrow \text{Ecuación de difusión}$$

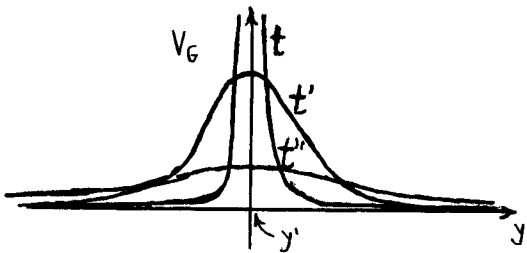
Una solución de esta ecuación podría ser una función de Green como:

$$\boxed{V_G(y,z,t) = \frac{A}{4\pi\nu t} e^{-\frac{(y-y')^2}{4\nu t} - \frac{(z-z')^2}{4\nu t}} \quad [2]}$$

que es una solución elemental de la ecuación de difusión.  $V_G$  es no nula salvo en un único punto del espacio y a  $t=0$ . La solución total será la integral

$$V(y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' dz' \frac{A}{4\pi\nu t} e^{-\frac{(y-y')^2}{4\nu t} - \frac{(z-z')^2}{4\nu t}}, \quad \text{con } \frac{A}{4\pi\nu t} = V(y',z',t)$$

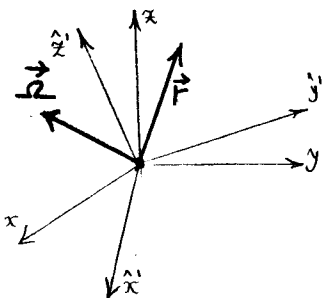
La [2] es una gaussiana que se difunde en el tiempo, siendo una fuente puntual en  $(y',z')$  que arranca en  $t=0$ . La constante  $A$  está determinada por la condición inicial



$$A = \iint dy dz U(y,z,t) = \iint dy dz U(y,z,0)$$

y representa el caudal de la fuente (se conserva y es el mismo a  $t=0$  y a un  $t$  posterior)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{Coriolis}} + 2 \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}}_{\text{centrífuga}}$$

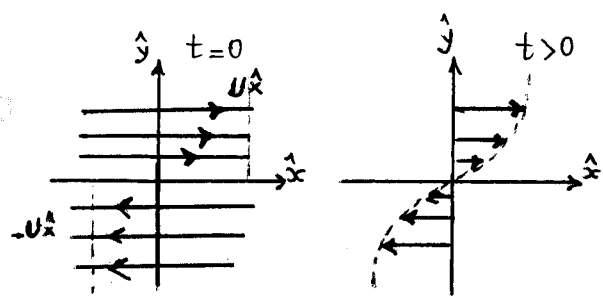


● Ejemplo aplicación

Un problema simple para aplicar la Vgreen es el del efecto viscoso en la transición entre dos flujos a velocidad constante pero direcciones opuestas



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

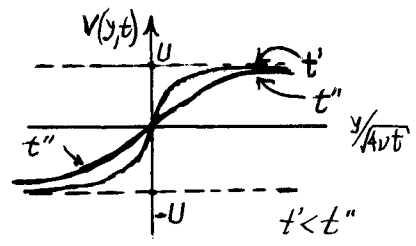


$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} V(y, 0) = \pm U & y \geq 0 \\ V(0, t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

$$V(y, t) = \frac{U}{2(\pi \nu t)^{1/2}} \left[ \int_0^\infty e^{-(y-y')^2/4\nu t} dy' - \int_0^\infty e^{-(y+y')^2/4\nu t} dy' \right]$$

$$V(y, t) = \frac{U}{\pi^{1/2}} \cdot 2 \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-x'^2} dx' = U \cdot \text{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right)$$



$$V(y, t) = U \cdot \text{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right)$$

la cual cumple los contornos y a medida que t avanza se ensancha más (se difunde)



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

$x'$  es un cambio de coordenada muda; no tiene nada que ver con  $x$



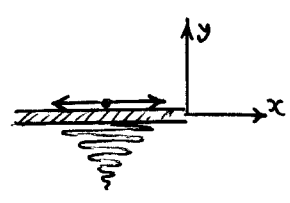
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

● No estacionario oscilante. Aplicación

Consideramos una tabla que al oscilar induce movimiento en el fluido



$$u(x, y=0, t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

Queremos ver el oscilatorio gobernado por

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

⇒ planteo solución separable

$$V(y, t) = \text{Re} \{ U(y) \cdot e^{i\omega t} \}$$

$$U(y) e^{i\omega t} i\omega = \nu \frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} e^{i\omega t}$$

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\nu} U \Rightarrow$$

$$U = U_0 \cdot e^{\pm \sqrt{i\omega/\nu} \cdot y}$$



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

, pero  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$$U = U_0 \cdot e^{\frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} \cdot y} \cdot e^{i \frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} \cdot y} \cdot e^{i\omega t}$$

Luego por contorno será

$$A \cdot \cos(\omega t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}, \text{ a } t=0 \text{ es } A=U_0$$

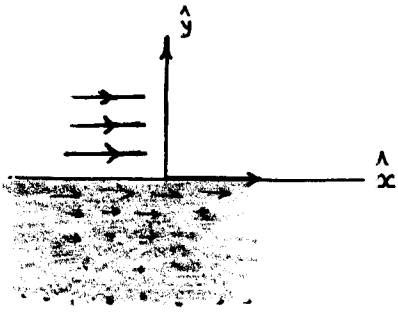
$$V(y, t) = A \cdot e^{\frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} \cdot y} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} \cdot y\right) \cdot \cos(\omega t) - \text{sen}\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2\nu} \cdot y\right) \cdot \text{sen}(\omega t) \right]$$



En la forma compleja se ve claramente

$$U(y,t) = A \cdot \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y}}_{\substack{\text{atenuación} \\ (y < 0) \text{ de la} \\ \text{amplitud}}} \cdot \underbrace{e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y}}_{\substack{\text{oscilaciones} \\ \text{en el espacio}}} \cdot \underbrace{e^{i\omega t}}_{\substack{\text{oscilaciones} \\ \text{en el tiempo}}}$$

### ● Modelo de la capa de Ekman. Introducción



Consideremos una superficie líquida, inicialmente en reposo bajo la gravedad, se comienza a mover por la acción de un esfuerzo tangencial aplicado en el borde.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\text{borde}} &= S, \forall t \\ V \rightarrow 0 \text{ con } y \rightarrow -\infty, \forall t \\ V(y, t=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Condiciones de contorno}$$

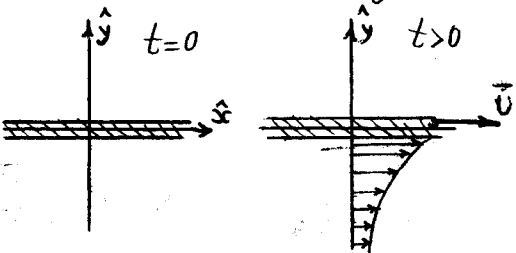
S absorbe el factor  $\mu/\mu_0$

Podemos pensar en un problema para  $V' = \frac{\partial V}{\partial y}$  pues

y  $V'$  cumple también  $\frac{\partial V'}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2}$

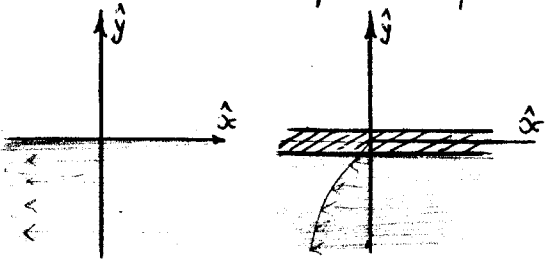
$$\left[ \begin{aligned} V'(0, t) &= S, t > 0 \\ V'(y, 0) &= 0, y < 0 \\ V' &\rightarrow 0, t > 0, y \rightarrow -\infty \end{aligned} \right.$$

Esto se relaciona con el siguiente problema de un plano que se mueve súbitamente con velocidad constante  $U$



$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \oplus \left[ \begin{aligned} V(y, 0) &= 0, y < 0 \\ V(0, t) &= U, t > 0 \end{aligned} \right] \quad [1]$$

Podemos este mismo problema pensarlo desde el punto de vista de un sistema fijo en la placa



$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \oplus \left[ \begin{aligned} V(y, 0) &= -U, y < 0 \\ V(0, t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \right] \quad [2]$$

Este problema ahora es equivalente al que hemos resuelto de los dos flujos de direcciones opuestas (en realidad a 1/2 problema). Luego la solución que verifique los

contornos en [1] es:

$$V = U + U \cdot \text{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right)$$

la cual es una modificación de la solución de [2] que es a su vez la solución del contraflujo. Podemos aplicar esta solución al problema inicial y vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial y} = S + S \cdot \text{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right)$$

es solución, con lo cual:

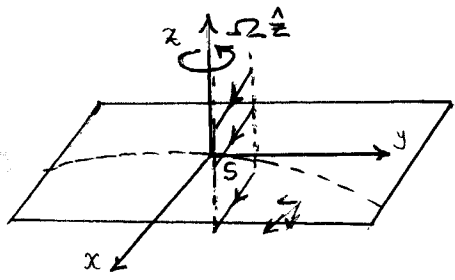
$$V = S \cdot y + S y \cdot \text{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \right) + 2S \left( \frac{\nu t}{\pi} \right)^{1/2} \cdot e^{-y^2/4\nu t}$$

es la expresión para la velocidad.

● Capa de Ekman. Resolución sumaria

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Este modelo considera esfuerzos de cizalla y la fuerza de Coriolis. Alineo el viento con  $\hat{x}$

$$\mu \cdot \frac{dV_x}{dz} \Big|_{z=0} = \mu S, \quad \mu \cdot \frac{dV_y}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

**TRIFAMOX**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

$$V = (V_x(z), V_y(z), 0)$$

CC  $\frac{dV_x}{dz}(z=0) = S$

$$\frac{dV_y}{dz}(z=0) = 0$$

$$V_x, V_y \rightarrow 0$$

$$z \rightarrow -\infty$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + 2\Omega V_y$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - 2\Omega V_x$$

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

Despreciando los gradientes de presión en (x,y) se llega al sistema:

$$-2\Omega V_y = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}$$

$$2\Omega V_x = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}$$

que puede resolverse definiendo una velocidad  $V = (V_x + i \cdot V_y)$  y notando que

$$\nu \cdot \frac{d^2}{dz^2} [V] = 2i\Omega [V]$$

$$V = A \cdot e^{(\Omega/\nu)^{1/2} (1+i) z}$$

En el estado estacionario la velocidad se va frenando hasta cierta profundidad de forma que se compensa exactamente la fuerza de Coriolis.

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

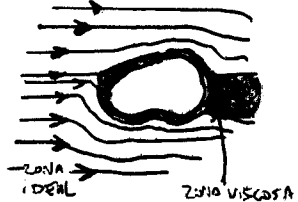
● Teoría de la capa límite

Los efectos viscosos se suelen observar sobre los contornos de los cuerpos inmersos en fluidos; son importantes en la llamada "capa límite" que rodea al objeto. Lejos el flujo tiende al ideal.

Sabemos que en general:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \text{flujo viscoso} \neq \text{flujo ideal}$$

porque en la ecuación de Navier-Stokes  $\mu$  aparece en la derivada de mayor orden.



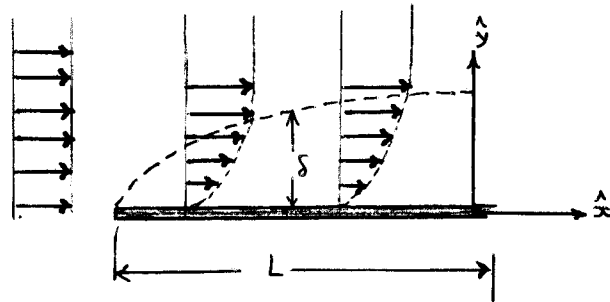
**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

Consideremos un flujo uniforme que embiste una placa donde  $\vec{v} = (V_x, V_y, 0)$

y con  $\delta \ll L$ . Este parámetro  $\delta$  mide el ancho de la capa límite que es la zona donde la velocidad del fluido se ve afectada por la viscosidad mas allá el flujo es ideal.

Si el flujo es estacionario y no hay fuerzas en volumen con fluidos incompresibles



$$\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right)$$

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica

Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bagó**  
A la vanguardia en antibiotioterapia  
www.bago.com.ar

La adimensionalización de éste caso es más delicada que la vista anteriormente porque hay que considerar diferentes escalas en  $\hat{x}$  y en  $\hat{y}$  (las longitudes características son diferentes) dentro de la capa límite.

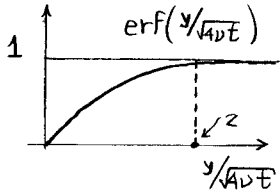
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \sim \frac{V_x}{L} \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} \sim \frac{V_y}{\delta}$$

y como vale la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{V_x}{L} \approx \frac{V_y}{\delta} \Rightarrow \boxed{V_y \approx \frac{\delta}{L} V_x}$$

Vemos que los gradientes en  $\hat{x}, \hat{y}$  son diferentes ( $V_x \gg V_y$ )  $\Rightarrow$  necesito diferentes escalas en la capa límite. Sabemos que un flujo viscoso va como  $\text{erf}(y/\sqrt{4\nu t})$ ; y que en  $y/\sqrt{4\nu t} \approx z$  ya tenemos el efecto viscoso casi despreciable  $\Rightarrow$



$$\delta \doteq y = \sqrt{4\nu t} \Rightarrow \boxed{\delta \approx (\nu t)^{1/2}}$$

El ancho de la capa límite va (inicialmente) como  $t^{1/2}$ . Pero por otro lado

$$x = V_x \cdot t \rightarrow$$

$$\boxed{\delta(x) \approx \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{V_x}}}$$

con  $x=0$  el punto inicial de la placa.

Adimensionalizaremos entonces según el cuadro:

$$x = L \tilde{x}$$

$$y = \delta \tilde{y}$$

$$V_x = V_x^0 \tilde{V}_x$$

$$V_y = V_y^0 \tilde{V}_y = V_x^0 \frac{\delta}{L} \tilde{V}_y$$

$$p = \rho (V_x^0)^2 \tilde{p}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu \cdot L}{V_x^0}}$$

, donde  $V_x^0$  es la velocidad lejos de la placa.

$$\frac{(V_x^0)^2}{L} \tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{V_y^0 V_x^0}{\delta} \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{y}} = - \frac{(V_x^0)^2}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \left[ \frac{V_x^0}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{(V_x^0)^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right]$$

$$\boxed{\tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}} + \underbrace{\left( \frac{V_y^0 L}{V_x^0 \delta} \right)}_{\rightarrow 1} \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \underbrace{\left( \frac{\nu}{L \cdot V_x^0} \right)}_{Re^{-1}} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \left( \frac{L^2}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right]}$$

$$\frac{\nu L}{V_x^0 \delta^2}$$

$$\frac{(V_x^0)(V_y^0)}{L} \tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}} + \frac{(V_y^0)^2}{\delta} \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}} = - \frac{(V_x^0)^2}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \nu \left[ \frac{V_y^0}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{V_y^0}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right]$$

$$\frac{V_x^0 \delta}{L^2} \tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}} + \frac{V_x^0 \delta}{L^2} \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}} = - \frac{(V_x^0)^2}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\delta V_x^0 \nu}{L^3} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right]$$

$$\boxed{\tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}} = \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \underbrace{\left( \frac{\nu}{L \cdot V_x^0} \right)}_{Re^{-1}} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \left( \frac{L^2}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right]}$$

$\frac{\delta^2}{L^2} = \frac{1}{Re} \Rightarrow Re = \frac{L^2}{\delta^2}$ , y como  $L \gg \delta \rightarrow Re$  alto  $\delta(x) = \left( \frac{\nu \cdot x}{V_x} \right)^{1/2}$  da la ley de la difusión de la información de la presencia de la placa.

Dado que  $\delta \ll L$  se sigue que  $\frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}^2} \ll \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{y}^2}$  y  $\frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{x}^2} \ll \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}^2}$

Como  $\tilde{V}_x$  es  $\mathcal{O}(1)$  y asumimos  $\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}}$  es  $\mathcal{O}(1) \Rightarrow$  por continuidad  $\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$

y será  $\frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{y}}$  de  $\mathcal{O}(1)$ , pero si  $\tilde{y}$  es  $\mathcal{O}(1) \rightarrow \tilde{V}_y$  es  $\mathcal{O}(1)$

$$\underbrace{V_y}_{\mathcal{O}(\delta)} = \underbrace{\tilde{V}_y}_{\mathcal{O}(1)} \underbrace{V_x^0}_{\mathcal{O}(L)} \underbrace{\delta}_{\mathcal{O}(L)} \quad \underbrace{y}_{\mathcal{O}(\delta)} = \underbrace{\delta}_{\mathcal{O}(\delta)} \underbrace{\tilde{y}}_{\mathcal{O}(1)}$$



$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + Re \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad [1]$$

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = - Re \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}^2} + Re \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad [2]$$

Quedándonos con las cosas a orden 1, luego de multiplicar [2] por 1/Re para tener todo al mismo orden resulta el siguiente sistema:

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$0 = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0$$

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambrroxol  
Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago  
Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago  
Comprimidos x 10

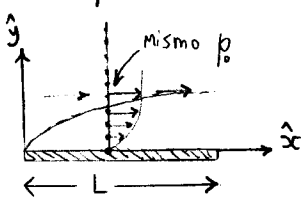
**VIXCEF**  
Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA  
Comprimidos x 10 y 20

**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatínica  
Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bago**  
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

Se puede ver que no hay difusión en  $\hat{x}$  pues no está el término  $\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}}$ . Asimismo la presión es independiente de  $\hat{y}$ , con lo cual deberá ser igual a la presión fuera de la capa limite (si pensamos que depende de  $x$ ) entonces será  $p = Cte$ .



$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$v_x(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$v_y(x, 0) = 0$$

$$\vec{V} = v_x \hat{x} \quad y \rightarrow \infty$$

Para resolver dimensionalizamos:

$$\lambda = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\left[ \frac{x \cdot \nu}{v_x^0} \right]^{1/2}} = y \left( \frac{v_x^0}{x \cdot \nu} \right)^{1/2}, \text{ que cumple:}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \left( \frac{v_x^0}{x \cdot \nu} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = - \frac{y}{2 \cdot x} \left( \frac{v_x^0}{x \cdot \nu} \right)^{1/2} = - \frac{\lambda}{2x}$$

Entonces definimos una función corriente  $\Psi$  tal que:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

y suponemos que

$$v_x = v_x^0 \cdot f(\lambda)$$

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \cdot \left( \frac{v_x^0}{x \cdot \nu} \right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x \cdot \nu} \cdot v_x^0 \cdot f(\lambda) = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$$

$$\Psi = \int_0^\lambda d\lambda \cdot \sqrt{x\nu V_x^0} \cdot f(\lambda) = \sqrt{x\nu V_x^0} \int_0^\lambda f(\lambda) \cdot d\lambda = \sqrt{x\nu V_x^0} g(\lambda) \Rightarrow \Psi = (x\nu V_x^0)^{1/2} g$$

$$V_x = \sqrt{x\nu V_x^0} \cdot \underbrace{g'(\lambda)}_{\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}} \cdot \sqrt{\frac{V_x^0}{x\nu}} = V_x^0 \cdot g'(\lambda) \Rightarrow \boxed{g'(\lambda) = f(\lambda)}$$

$$V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu V_x^0}{x} \right)^{1/2} \cdot g - (\nu x V_x^0)^{1/2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dg}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow V_y = -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu V_x^0}{x} \right)^{1/2} g + (\nu x V_x^0)^{1/2} \frac{y}{2x} \left( \frac{V_x^0}{x\nu} \right)^{1/2} g'$$

$$V_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu V_x^0}{x} \right)^{1/2} [-g + \lambda g']$$

Mediante estas expresiones en la ecuación original puede resolverse este problema

$$(V_x^0)^2 g' \cdot \frac{\partial g'}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu V_x^0}{x} \right)^{1/2} (\lambda g' - g) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot V_x^0 = \nu V_x^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (g')$$

$$(V_x^0)^2 g' g'' \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{x} \right)^{1/2} V_x^{3/2} (\lambda g' - g) g'' \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \nu \frac{V_x^0^2}{x\nu} \frac{\partial}{\partial \lambda} [g'']$$

$$- V_x^0^2 g' g'' \frac{\lambda}{2x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{x} \right)^{1/2} V_x^{3/2} (\lambda g' - g) g'' \left( \frac{V_x^0}{x\nu} \right)^{1/2} = \nu \left( \frac{V_x^0^2}{x\nu} \right) g'''$$

$$- \frac{V_x^0^2}{2x} \lambda g' g'' + \frac{V_x^0^2}{2x} g'' (\lambda g' - g) = \frac{V_x^0^2}{2x} 2 g'''$$

$$- \lambda g' g'' + \lambda g' g'' - g g'' = 2 g'''$$

$$2g''' + g g'' = 0$$

$$\boxed{g''' + \frac{1}{2} g g'' = 0}$$

Ecuación de Blasius  
(no lineal)

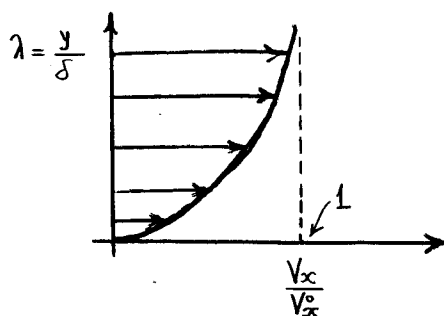
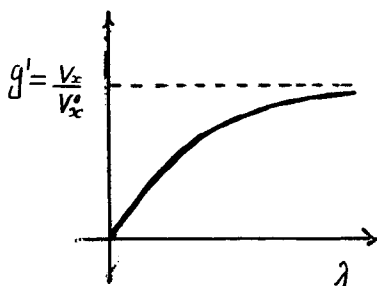
$$g(\lambda=0) = g'(\lambda=0) = 0$$

$$g'(\lambda \rightarrow \infty) = 1$$

pues  $V_x = V_x^0 \cdot g'(\lambda)$

$$\lambda = y \cdot \left( \frac{V_x^0}{x \cdot \nu} \right)^{1/2}$$

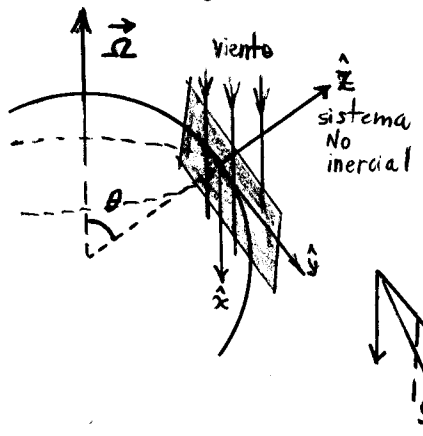
Númicamente la solución es algo como lo mostrado en la figura. Esta figura puede invertir sus ejes para intuir cómo serían las "flechas" de la velocidad en la zona de la capa límite.



donde  $V_x^0$  será la velocidad 'ideal' en la zona no perturbada

• Capa de Ekman. Resolución detallada

Suponemos un fluido acotado por una superficie horizontal sobre la cual se ejerce un esfuerzo constante  $\mu S$  en la dirección  $\hat{x}$



$\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu S$  El esfuerzo es en  $\hat{x}$

$\vec{V} = (v_x(z), v_y(z), 0)$  La  $\vec{V}$  del viento es en  $\hat{x}, \hat{y}$

$\frac{dv_x}{dz} = S$  y  $\frac{dv_y}{dz} = 0$ , en  $z=0$

$v_x, v_y \rightarrow 0$  con  $z \rightarrow -\infty$

$2\vec{\Omega} \times \vec{V}' = 2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \Omega_3 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 2(v_x \Omega_3 \hat{y} - v_y \Omega_3 \hat{x})$  Coriolis

$\hat{x}) \quad 0 = 2v_y \Omega_3 + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$

$\hat{y}) \quad 0 = -2v_x \Omega_3 + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$

donde hemos despreciado los gradientes de presión en  $(x,y)$ . Esto se resuelve con una variable compleja  $V = v_x + i \cdot v_y$

$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -2v_y \Omega_3$

$i \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 2v_x \Omega_3$

$\nu \frac{\partial^2 (V)}{\partial z^2} = i 2 \Omega_3 V \rightarrow$

$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{i 2 \Omega_3}{\nu} V = 0$

Entonces:

$V = A \cdot e^{\pm [i 2 \Omega_3 / \nu]^{1/2} z}$

$V = A \cdot e^{\pm (1+i) \sqrt{\frac{\Omega_3}{\nu}} z}$

$\frac{dV}{dz} \Big|_{z=0} = A \cdot e^{\pm (1+i) \sqrt{\frac{\Omega_3}{\nu}} z} \cdot (1+i) \sqrt{\frac{\Omega_3}{\nu}} \Big|_{z=0} = S$

$A (1+i) \left(\frac{\Omega_3}{\nu}\right)^{1/2} = S$

$A = \left(\frac{\nu}{\Omega_3}\right)^{1/2} \frac{S}{(1+i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\Omega_3}\right)^{1/2} S (1-i)$

$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\Omega_3}\right)^{1/2} S (1-i) e^{\sqrt{\Omega_3/\nu} z} \cdot e^{+i \sqrt{\Omega_3/\nu} z}$

$V = \left(\frac{\nu}{2\Omega_3}\right)^{1/2} S \cdot e^{-i\pi/4} \cdot e^{\sqrt{\Omega_3/\nu} z} \cdot e^{i \sqrt{\Omega_3/\nu} z}$

$V = S \left(\frac{\nu}{2\Omega_3}\right)^{1/2} e^{\sqrt{\Omega_3/\nu} z} e^{i(\sqrt{\Omega_3/\nu} z - \pi/4)}$

si  $k = \sqrt{\Omega_3/\nu}$

$V_x = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{kz} \cos(kz - \pi/4)$

$V_y = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{kz} \sin(kz - \pi/4)$

**TRIFAMOXIBL DUO**  
Amoxicilina + Sulbactam

Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.

**TRIFAMOX DUO**  
Amoxicilina + Ambroxol

Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml

**SEPTILISIN**  
Cefalexina Bago

Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.

**SEPTICIDE**  
Ciprofloxacina Bago

Comprimidos x 10

**VIXCEF**

Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.

**UROSEPTAL**  
NORFLOXACINA

Comprimidos x 10 y 20

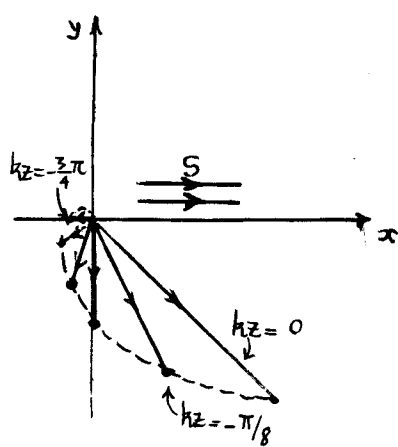
**Pen Di Ben**  
Penicilina Benzatinica

Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

**Bago**  
A la vanguardia en antibioticoterapia  
www.bago.com.ar

$e^{kz}$  es atenuación  
pues  $z < 0$

$\Rightarrow$



En el estado estacionario la velocidad  $\vec{V} = (v_x, v_y)$  tiene su magnitud máxima  $\frac{S}{k\sqrt{2}}$  en  $z=0$  y a un ángulo de  $45^\circ$  en CW respecto al esfuerzo aplicado.

A medida que nos sumergimos en  $z$  la velocidad rota en sentido CW y la magnitud se atenúa como  $e^{kz}$

Con  $z = -\pi/k$  la magnitud ha caído a  $e^{-\pi} (\sim 0.04)$  de su valor superficial.

Es un flujo estacionario que balancea las fuerzas de fricción con la de Coriolis y fue estudiado inicialmente por Ekman (1905).

Un parámetro de interés para este modelo es el flujo neto de agua entre planos verticales. Lo podemos obtener desde

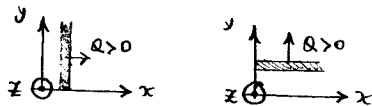
$$\int_{-\infty}^0 (v_x + i v_y) dz = -\frac{i S}{2k^2} = -\frac{i \mu S}{2\rho \Omega z}$$

Coordenada  $z$  (No es  $C$ )

donde vemos que el flujo neto en la dirección del esfuerzo es nulo (pues el resultado es imaginario). Si hubiese un movimiento neto en  $\hat{z}$  ello originaría una fuerza de Coriolis neta en una dirección ortogonal que no sería balanceada por otra fuerza externa.

$$\int v_x dz dy + i \int v_y dz dx$$

caudal a través de un plano  $x$       caudal a través un plano  $y$ .

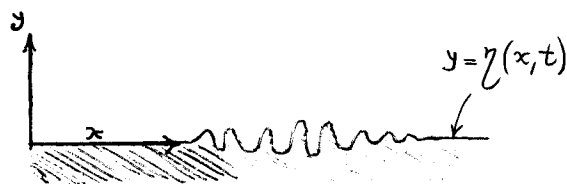


### • Ondas superficiales en agua

Sean ondas de agua 2D, con

$$\vec{v} = (v_x(x,y,t), v_y(x,y,t), 0)$$

y consideramos fluido irrotacional  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v}) = 0$



$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}(\partial_x v_y - \partial_y v_x) = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

Luego existe una  $\phi$ :  $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow$  si es incompresible

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\text{grad } \phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

La superficie libre tendrá ecuación:  $y = \eta(x, t)$

Pediremos que cualquier partícula de la superficie permanezca en la misma. Luego para una partícula de la superficie

$$F(x,y,t) = y - \eta(x,t) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})F = 0 \quad \text{en la superficie}$$

$$= -\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y = 0 \Rightarrow$$

$$[1] \quad \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_y} \quad \text{en } y = \eta(x,t)$$

Si la superficie permanece horizontal  $\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$  y  $v_y = \frac{\partial \eta}{\partial t}$

Si la superficie es estacionaria  $\rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$

La pendiente de las líneas de corriente es la pendiente de la superficie libre

Sea que consideramos una solución tipo onda plana:

$$\boxed{\eta = A \cdot e^{i(kx - \omega t)}}$$

Considerando a 1º orden la [1] resulta  $\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx v_y$  en  $y = \eta(x,t)$

$$\rightarrow v_y \approx -A \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot i\omega \rightarrow$$

$$\phi = \int v_y \cdot dy + C(x) = -A \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot i\omega \cdot y + C(x) \rightarrow \text{podemos tomar}$$

$$\boxed{\phi = f(y) \cdot e^{i(kx - \omega t + \alpha)}}$$

con  $f(y) \in \mathbb{R} \Rightarrow$  evaluando  $\nabla^2 \phi = 0$

$$\cancel{e^{i(kx - \omega t + \alpha)}} \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + f(y) \cdot \cancel{e^{i(kx - \omega t + \alpha)}} \cdot (ik)^2 = 0$$

$$f''(y) - k^2 f(y) = 0 \quad \text{con solución}$$

$$f = C \cdot e^{ky} + D \cdot e^{-ky}$$



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1

Pedimos potencial separable en 'y' y en 'x,t'



A la vanguardia en antibioterapia  
www.bago.com.ar

Ahora necesitamos condiciones de contorno apropiadas.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \underbrace{\text{rot}(\vec{v})}_{=0} \times \vec{v} = -\vec{g} - \text{grad}(p)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = -\vec{\nabla} \left( gy + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)$$

$$0 = -\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)$$

$$G(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \rightarrow \text{tomando } \phi' = \phi + G(t)$$

resulta en:

$$\boxed{0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)}$$

Desde:  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_y$  con  $y = \eta(x, t) \rightarrow$  conservando 1<sup>er</sup> orden

$\frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{y=\eta} \approx v_y \rightarrow$  le hago un Taylor y resulta en:

$$v_y(x, y, t) = v_y(x, 0, t) + \eta \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}(x, 0, t) + \dots \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{y=\eta} = v_y \Big|_{y=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{y=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0}}$$

Desde:  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + gy + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) = 0 \rightarrow$  conservando 1<sup>er</sup> orden

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{p}{\rho} \approx 0 \quad \text{en } y = \eta$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow \text{una constante}}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=\eta} \approx -g\eta \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = -g\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0}$$

$$\rightarrow -A e^{i(kx - \omega t)} i\omega$$

$$\phi = [C e^{ky} + D e^{-ky}] e^{i(kx - \omega t + \alpha)}$$

$$\eta = A e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = [C e^{ky} - D e^{-ky}] k e^{i(kx - \omega t + \alpha)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A e^{i(kx - \omega t)} (-i\omega)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = [C e^{ky} + D e^{-ky}] e^{i(kx - \omega t + \alpha)} (-i\omega)$$

Usando ahora las condiciones de contorno



Comprimidos x 14  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 y 90 ml.



Comprimidos x 14  
Suspensión x 50 ml



Comprimidos x 16  
Suspensión x 60 ml.  
Suspensión x 90 ml.



Comprimidos x 10



Comprimidos x 6 y 10  
Suspensión x 30 y 60 ml.



Comprimidos x 10 y 20



Ampollas de 1.200.000 U.I. x 1  
Ampollas de 2.400.000 U.I. x 1



$$k[C-D] e^{i(kx-\omega t)} e^{i\alpha} = -i\omega A e^{i(kx-\omega t)}$$

$$k[C-D] e^{i\alpha} = -i\omega A \rightarrow e^{i\alpha} = -i \rightarrow \alpha = -\pi/2$$

$$k[C-D] = \omega A$$

$$[C+D] e^{i(kx-\omega t)} e^{i\alpha} (-i)\omega = -gA e^{i(kx-\omega t)}$$

$$-[C+D]\omega = -gA$$

$$k[Ce^{-kH} - D.e^{+kH}] e^{i(kx-\omega t)} e^{i\alpha} = 0$$

$$Ce^{-kH} - D.e^{kH} = 0$$

Juntamos todo:

$$C-D = \frac{\omega A}{k}$$

$$C+D = \frac{gA}{\omega}$$

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega A}{k} + \frac{gA}{\omega} \right) \quad D = \frac{1}{2} \left( \frac{gA}{\omega} - \frac{\omega A}{k} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\omega A}{k} + \frac{gA}{\omega} \right) e^{-kH} - \frac{1}{2} \left( \frac{gA}{\omega} - \frac{\omega A}{k} \right) e^{kH} = 0$$

$$\frac{\omega A}{k} (e^{-kH} + e^{kH}) - \frac{gA}{\omega} (e^{kH} - e^{-kH}) = 0$$

$$\frac{\omega A}{k} = \frac{gA}{\omega} \frac{(e^{kH} - e^{-kH})}{(e^{kH} + e^{-kH})}$$

$$\boxed{\omega^2 = gk \tanh(kH)}$$

Como vemos esto significa que el medio es dispersivo. La velocidad de grupo  $V_g$  no coincide con la velocidad de una onda. Sabiendo que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\omega^2 = g \frac{2\pi}{\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)$$

En aguas muy profundas  $H \gg \lambda \rightarrow \frac{2\pi H}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \tanh(kH) \rightarrow 1$

$$\omega^2 = g \frac{2\pi}{\lambda} = gk \rightarrow \omega = \sqrt{gk} \rightarrow \text{dispersión}$$

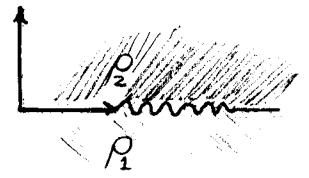
En aguas poco profundas  $H \approx \lambda \rightarrow \tanh(kH) \rightarrow kH$

$$\omega^2 = g k^2 H \rightarrow \omega = \sqrt{gH} k \rightarrow \text{no hay dispersión}$$

	velocidad profundas	poco profundas
grupo	$\frac{d\omega}{dk} = V_g$	$\frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$
fase	$\frac{\omega}{k} = V_f$	$\sqrt{g/k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

Para el caso de dos medios de diferente densidad:

$$\rho_1 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} + \rho_1 g \eta = \rho_2 \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right|_{z=0} + \rho_2 g \eta$$



$$\omega = \sqrt{gk \cdot \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)}$$

en aguas muy profundas  
(para ambas direcciones)

Dado que se tiene  $V_c > V_g$  y  $V_p \propto \lambda^{1/2}$  significa que dentro de un paquete de ondas, que se mueve como un todo con la  $V_g$  las componentes de mayor longitud de onda  $\lambda$  se moverán con una velocidad mayor.